第 26 卷　第 6 期
2003 年 6 月

计　算　机　学　报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

Vol. 26　No. 6
June 2003

条件事件代数研究综述

邓　勇[1)]　刘　琪[2)]　施文康[1)]

[1)]（上海交通大学电子信息学院　上海 200030）

[2)]（上海交通大学生命科学技术学院　上海 200030）

摘　要　综述了条件事件代数理论的原理、主要性质和应用. 条件事件代数是一门新兴的解决不确定性、概率性和模糊性推理问题的学科，是在确保规则概率与条件概率相容的前提下，把布尔代数上的逻辑运算推广到条件事件(规则)集合中得到的代数系统，目的是为智能系统中的条件推理建立一个数学基础. 该文也对比条件事件代数更一般的逻辑系统——关联事件代数理论进行了介绍.

关键词　条件事件代数；数据融合；关联事件代数

中图法分类号　TP301

A Review on Theory of Conditional Event Algebra

DENG Yong[1)]　LIU Qi[2)]　SHI Wen-Kang[1)]

[1)]（*School of Electronics & Information Technology*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200030）

[2)]（*School of Life Science & Technology*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200030）

Abstract　Multiple source information forms one of the key components of data fusion. Such information may emanate from various mechanical sensor sources such as radar or Doppler systems, or it may derive from human-based sources, such as via expert opinion expressed through natural language. In general, each unit information is associated with degree of uncertainty/certainty which is traditionally determined through the use of probability. Thus, one can evaluate probabilistically any desired logical combination of events for use in decision-making. On the other hand, information uncertainty is provided in a way that there appears to be no single underlying Boolean event whose probability evaluation matches the prescribed uncertainty. Such uncertainty is often expressed in the form of given functions of probability evaluations of contributing simpler events. For example, when these functions are simple arithmetic divisions with arguments being pairs of events, each numerator argument event being a subevent of the denominator argument event, the quantitative uncertainty corresponding to each unit of information then, becomes a conditional probability. But, in general, the standard development of probability theory and statistics has not produced a way to represent conditional probabilities as single event probability evaluations, so that standard statistical decision-making techniques cannot be used in systematic sound way here. Recently, probability theory has been expanded to address the problem in the form of conditional event algebra. Conditional Event Algebra (CEA) is a relatively new logic system which rigorously extends standard probability theory to include events which are contingent such as rules and conditionals. The" if …then" is modeled as Boolean elements, and yet compatible with conditional probability quantitative value. The principle theory and application of conditional event algebra is presented. We also introduce the idea of relational event algebra which is more general than conditional event algebra.

收稿日期：2001-10-10；修改稿收到日期：2002-07-14. 邓勇，男，1975 年生，博士研究生，研究方向为条件事件代数和随机集理论在信息融合中的应用. E-mail：doctordengyong@sohu.com. 刘琪，女，1977 年生，博士研究生，研究方向为生物信息学. 施文康，男，1942 年生，教授，博士研究生，研究方向为自动测试理论.

Keywords　conditional event algebra; data fusion; relevant event algebra

1　引　言

在人工智能和知识工程的研究中,事件的条件性扮演了一个重要的角色.无论是在自然语言还是机器语言,逻辑或是概率,统计应用或是基于规则的专家系统中,都可以看到条件的存在.提出一个没有假设的命题是不可能的,而且在许多情况下某些假设是含糊不清的.如“if x,then y”,“x 蕴含 y”,“x 引起 y”,“y 在 x 的范围之内”和“y 是前提 x 的一个结果”,这些陈述都具有模糊性,前提和结论的部分相容,也就更容易引起条件陈述的模糊.为了让机器模拟人类的决策思维和推理行为,所面临的一个困难就是如何处理条件信息.

随着科学技术的发展,传感器的性能获得了很大的提高,各种面向复杂应用背景的多传感器系统大量涌现.一个新兴的学科——多传感器数据融合迅速发展起来,并在现代 C3I 系统中得到了广泛的应用.如何把机械电子类型传感器所获取的定量数据与自然语言描述的数据(信息)和专家的经验性知识(比如专家系统中的规则)有效地融合是数据融合研究的重要课题.由于缺少数学基础,对这一类问题总是依赖于某些特定的、非正式的方法,并且少有理论上的证明.这一现象实际上已经成为建造高性能智能系统的瓶颈,理论上的创新和突破成为进一步构造高性能智能系统的先决条件.条件事件代数理论就是在这一背景下迅速发展起来的一门学科.

条件事件代数(Conditional Event Algebra,CEA)是一门新兴的解决不确定性、概率性和模糊性推理问题的学科.条件事件代数理论又称为条件信息理论,它是针对知识表示与推理中的条件问题,通过研究条件事件代数结构与条件推理,达到充分利用条件信息来解决不确定性问题的.可以说,凡是涉及到专家系统中的产生式规则“if a,then b”的问题都与条件事件代数有关.条件事件代数是在确保规则概率与条件概率相容的前提下,把布尔代数上的逻辑运算推广到条件事件(规则)集合中得到的代数系统,目的是为智能系统中的条件推理建立一个数学基础,也是计算机进行高层次推理与高层次专家系统所必需的工具.

2　条件事件代数产生背景

2.1　实际应用中的一些问题

条件事件的研究源于布尔的早期工作,布尔在文献[1]中给集合定义了四种运算,分别对应于普通意义上的+、−、×和一个事件的 if-then 结构,随着布尔代数的广泛传播,布尔加法、减法和乘法早已为人们所熟知,而布尔除法“|”却很少被人注意,人们知之甚少,其原因除了布尔除法本身较为晦涩难懂外,当时布尔也未能就其含义作出清楚的说明,故根本就没有被布尔代数的编撰者所收录.在此之后 50 多年里,现代布尔代数有了很大的发展,但是事件的除运算却没有任何改进.一个重要的原因是包括 Jevons 和 Schroder 等人在内的布尔代数研究先驱者认为:尽管布尔给出了事件除运算的许多特性和一些有趣的应用,但是这个运算并不十分清楚[2].Macforlane 曾将布尔除法重新整理,以更易于理解的文本发表.但他的努力也未获得多大的成功.事实上,布尔除法所留下的真空已经迅速被其它逻辑运算(如蕴含运算)所填补,因而对晦涩的布尔除法,人们普遍感受不到理解它的必要.100 多年后,Hailperin 在仔细分析布尔原作的基础上指出:布尔除法可以进行充分的合理化和严格化;Hailperin 还表明:布尔除法的概念实际上等价于布尔环中主理想的陪集的概念,在对布尔的事件除作少许改动就能严格地构成 Chevalley-Uzkov 代数小数框架,该框架等同于主理想商代数的陪集(coset of priciple idea)[3].而在 20 世纪 30 年代,DeFinetti 引入了条件事件的陈述概念.他利用三值逻辑事件来表示“b given a”类型的条件事件,并试图在 Lukasiewicz 的三值逻辑基础之上定义这些三值事件的合取、析取、取反等运算,DeFinetti 甚至对高阶条件问题进行了研究[4].他的这些思想在 50 年后由 Goodman I R, Nguyen H T 等人发展成为 GNW 条件事件代数.

应该指出,由于缺乏对标准集合或事件的除运算,人们无法有效地解决包括条件表述在内的很多问题.概率论也仅仅是在数值上定义了条件概率:$P(a|b)=P_b(a)=P(a\cdot b)/P(b)$.然而,随着人工智能的发展和基于规则的专家系统的出现,事件的“|”引起了人们的重视.在专家系统中,我们要利用客观世界不确定的因果关系和不确定推理来得出近

乎合理的结论，推理的任务就是求出断言 A 的可信度(certain Factor) $CF(A)$. 如果 A 是一规则的结论，就要根据前提 E 的可信度 $CF(E)$ 及规则的可信度 $CF(\text{if } E \text{ then } A)$ 按一定的算法得到 $CF(A)$. 如果条件概率 $P(A|E)$ 被用作规则"if E then A"的可信度，就要适当的表示"if E then A"，使得对于任何概率度量 P, $P(\text{if } E \text{ then } A)=P(A|E)$. 从数学角度看，就是定义一个数学实体 $(A|E)$，用它来表示"if E then A"这种形式的蕴涵命题，使它能像无条件布尔命题一样参与各种逻辑运算，而且和条件概率相容.

布尔代数的极大成功，尤其是布尔代数和一阶逻辑的完美结合，对条件事件的研究影响很大，形成了大多数研究工作以布尔代数和布尔环为出发点的局面. 凭直觉，对于布尔环上的任意两个元素 a 和 b，人们自然希望将条件表达式"if b then a"模型化为 $b \rightarrow a$ (其中 $\rightarrow$ 为逻辑蕴涵：$b \rightarrow a = b' \vee a = b' \vee ab$)，而另一方面，如果 P 是布尔环 R 上的概率测度，人们当然也希望用概率赋值 $P(a|b)$ 对表达式"if b then a"进行度量. 然而可以证明：

$$P(b \vee a') \geq P(a \mid b) \tag{1}$$

式(1)中的等号当且仅当 $P(b)=1$ 或 $P(a|b)=1$ 时成立[5]. 也就是对于二值命题逻辑的精确推理来说，式(1)取等号；对于命题逻辑的不精确推理场合，把规则命题"if b then a"本身为真的概率 $P(b \rightarrow a)$ 与条件概率 $P(a|b)$ 用于作为规则的可信度是不等价的. 在某些场合，我们需要知道已知一条规则"if b then a"后，一个事件 x 的概率，比如一条规则：如果气温低于 0 摄氏度(b)，则穿上棉袄(a)；现在气温为 3 摄氏度(x). 对这类问题，形式上似乎可以对其度量为 $P(x|(a|b))$，但是根据式(1)，这个概率不能释为 $P(c|(b' \vee a))$，针对条件情形的贝叶斯方法也不能解决这样的问题. 这是因为在标准的概率论中，概率空间 (Ω, B, P) 是由一些非条件事件及其相应的概率分配所决定的，而对于条件事件 $(a|b)$，则从 (Ω, B, P) 出发导出概率空间 (b, Bb, P_b). 这里的 b 是 Ω 的一个子集，$P(b) \neq 0$, $Bb=\{ab: a \in B\}$, $P(a|b)=P_b(a)=P(a \cdot b)/P(b)$. 因为没有给条件事件下一个定义，所以 $(a|b) \notin B$，在 (Ω, B, P) 中 $(a|b)$ 不是一个事件. 更一般地，已知两条规则"if b then a"和"if d then c"，那么我们如何基于"(if b then a) $\wedge$ (if d then c)"来计算 x 的概率？这里实际上涉及到两个条件事件如何联结的问题. 还有，在概率推断中，形如"if b then a"形式的规则的概率是用 $P(a|b)$ 来计算的，假设 a 和 b 本身也是条件事件时，即 a 表示成"if c then d"，b 表示成"if e then f"，则这条规则可以表示成"if "if c then d" then "if e then f"". 这种高阶条件形式在 C^3I 数据融合决策系统中是常见的，那么应该如何表示它，它的概率又如何计算？

人们会问：在对规则"if b then a"的可信度(或称为规则强度)进行度量时，是使用 $P(a|b)$ 还是使用 $P(b \rightarrow a)$？一般而言，使用条件概率 $P(a|b)$ 更合适一些. 比如，有一条规则"如果某物体是钻石，则它比较软". 如果我们采用 $P(b \rightarrow a)$ 对其度量，因为物体是钻石的概率 $P(b)$ 是很小的，这样 $P(b \rightarrow a) = P(b' \vee a) = P(b' \vee ab) = 1 - P(b) + P(ab)$ 趋于 1，也就是这条规则的可信度很高，但是根据常识我们知道这是不对的. 如果采用条件概率 $P(a|b)$ 来对其进行度量的化，则可以有效地避免这一问题：尽管物体是钻石的概率 $P(b)$ 很小，但是物体既是钻石且比较软的概率 $P(ab)$ 更小，这样可以得出 $P(a|b)$ 是一个很小的数，它客观地反映了这一规则的信度. 如果规则"if b then a"的可信度可以用 $P(a|b)$ 来度量，就要适当地表示"if b then a"，使它对规则的各种合成运算和条件概率相容，这方面的工作归纳起来有如下几个方面：

(1)给自然语言里的蕴涵陈述(条件事件)建立一个适当的数学模型.

(2)适当地定义条件事件之间的运算，并使这种运算与条件概率相容.

(3)像无条件事件形成布尔代数一样，条件事件对于 $\vee$, $\wedge$, $\neg$ 和 $|$ 等运算要形成一个代数系统，而且在这个代数系统中推演符合自然推演法则，对于布尔代数上的任何概率度量 P，都可以推广到这个代数系统中.

上面的问题说明：经典概率论仅仅涉及到了条件概率，而并未触及到条件问题的实体——条件事件，也就更谈不上进行条件推理了. 既然 $P(b \rightarrow a) = P(a|b)$ 一般来说不成立，那么能否在布尔环上建立一个二元运算 f，使得 $P(f(a,b)) = P(a|b)$ 呢？Lewis 在文献[5]中提出的 Lewis 定理表明这种与概率相容的二元运算是不存在的. 在这篇论文中，Lewis 指出在基本的事件空间 Ω 中不存在一个表示蕴含式 $b \rightarrow a$ 的非条件事件，从而在传统的概率空间中无法给出一种和 $P(a|b)$ 相一致的 $P(b \rightarrow a)$ 的定义. 因而为了解决相容性问题，就必须从基本的事件空间出发，构造一个包含原空间的更大的度量空间 (Ω_0, B_0, P_0)，使得 $P(b \rightarrow a) = P(a|b)$. 而且传统的

∨、∧等运算在这个新的空间中仍然被保持，新的事件空间关于这几种运算最好仍然是一个布尔代数结构.

条件事件(或规则)不是概率论中的基本事件，无法用概率论来进行测度，除非对其进行扩张，这一思想是比较容易理解的. 比如对自然数 0,1,2,…来说，可以进行加或乘等运算，但是当求解 $x+3=2$ 的方程时，就必须把代数空间扩展到整数的范围. 若求解 $2x=3$，则代数空间扩展到了包括小数的有理数. 类似地，假设有一个方程 $x\wedge b=a$，其概率形式为 $P(x)P(b)=P(a)$，可以把条件事件 $(a|b)$ 设想成这一方程的具有逻辑小数(Logic fraction)的通解[6].

2.2　条件事件代数的定义

关于条件事件代数的定义，现已有多种表述方式，我们介绍文献[6]中对条件事件代数的定义. 首先从概率论出发，在概率论中，设 (Ω,B,P) 是一概率空间，Ω 为样本空间，B 为 Ω 中的固定的事件域，P 是对应于 Ω,B 的一个确定的概率测度(probability measure). 对每个 $s\in B$，概率测度 P 有以下的性质：

(1) $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$.

(2) $P(s_1\cup s_2\cup\cdots\cup s_j\cdots)=P(s_1)+P(s_2)+\cdots P(s_j)+\cdots$(可列可加性).

条件事件代数的基本思想是：在数学上寻求一个可测空间 (Ω_0,B_0,P_0)，该可测空间不仅包含概率论中的基本事件，而且包含对诸如"if X then S"等规则形式的"条件事件"，使它们满足：

(3)所有的条件事件集是一个同样具有∧，∨和求补运算的布尔代数集.

(4) $(S|\Omega_0)=S$. 也即普通事件是条件事件的特例.

(5)所有对 Ω 集合中的事件的概率测度 P 可以对应地扩展到定义于 Ω_0 空间的条件事件的概率度量 P_0，如 $P_0((S|X))=P(S|X)$. 也就是说：在条件事件代数中，条件概率是条件事件的真实概率测度(true probability measure).

(6) $(S|X)\wedge X=(S\wedge X)$. 这实际上是人工智能中一种经典的假言推理(modus ponens)方式.

通过(1)～(6)可看出：在条件事件代数下，如果规则在数学上被表示为条件事件，概率论中的概率测度可以推广到规则(而不仅仅是基本事件). 这样在基于规则的人工智能系统中，我们可以计算 $P_0(S|X)$ 并用它来表示规则 $(X\rightarrow S)$ 的概率权植(probabilistic weight)或者是规则强度. 可以认为，任何对布尔事件代数扩展的逻辑系统，只要满足条件(3)～(6)，都可以称为条件事件代数. 如果不满足条件(3)则称其为非布尔型条件事件代数.

条件事件代数作为一门新的数学工具，它能解决什么样的问题也是十分重要的. 下面比较系统地给出了条件事件代数所需解决的问题，这些问题是发展和开发高层次人工智能系统和数据融合系统迫切需要的. 而在很长的一段时间，这些问题或被忽视，或是用非正式的或特定的方法进行处理[7].

(1)对于事件 a,b,c,d 来说，"if b then a 或 if d then c"的概率，也就是 $P[(\text{if } b \text{ then } a)\vee(\text{if } d \text{ then } c)]$ 是什么，如何表示和度量条件事件的逻辑运算？其中 b 和 d 不一定相同，且 $P(\text{if } b \text{ then } a)=P(a|b)$.

(2)如何结合(1)中与条件概率一致的 if－thenif-then 表达式来估计一个我们感兴趣的参数？

(3)条件或非条件语言信息的引入如何影响信息的组合？

(4)如何解释组合证据中诸如"if (if b then a) then (if d then c)"那样的高阶条件形式？

(5)能否研究从前提推论出结果或用于语义/概率估计的 if－then 语句的逻辑线路？这对于强烈依赖于把推理规则结合起来的专家系统是特别重要的.

(6)能否把随机变量的概念扩展到条件形式，使之与标准结果相容，也与条件语句的展开及其逻辑结果相容. 在建立真实世界的实现时，这种随机变量必须作为度量函数发挥重要作用.

3　几种条件事件代数

迄今为止，人们建立了多种条件事件代数的数学模型，比较典型的有三种：GNW 条件事件代数(GNW-CEA)、SAC 条件事件代数(SAC-CEA)和乘积空间条件事件代数(PS-CEA). 其中 GNW-CEA 和 SAC-CEA 是非布尔类型，而 PS-CEA 是布尔类型条件事件代数. 下面分别对这三种条件事件代数作一简单介绍.

3.1　GNW 条件事件代数

GNW 条件事件代数是 Goodman，Nguyen 和 Walker 等人[2]在 DeFinetti 研究的基础之上提出的一个逻辑代数系统. DeFinetti 早在 1935 年就提出了一种条件事件代数[4]，并在文献[8]中对其进行完善. 他的工作是基于 Lukasiewicz 的三值逻辑，通过指示函数(indicator functions) $\phi(a|b):\Omega\rightarrow\{0,u,1\}$ 来表示条件事件 $(a|b)$，其中，u 是除了经典二值逻辑的 0 和 1 之外增加的一个第三值或是中间值，u

具有这样一些性质：$0<u<1$，$1-u=u$. 对给定的由基本事件 $a,b,c,d,\cdots$ 组成的概率空间 (Ω,B,P) 来说，式(2)成立：

$$\phi(a\mid b)(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in ab\\ 0, & \omega\in ab'\\ u, & \omega\in b'\end{cases} \tag{2}$$

DeFinetti 所给出的条件事件代数对任何两个条件事件 $(a|b)$ 和 $(c|d)$ 有

$$\begin{aligned}&\phi((a\mid b)')(\omega)=1-\phi(a\mid b)(\omega),\\ &\phi((a\mid b)\wedge(c\mid d))(\omega)\\ &\quad=\min(\phi(a\mid b)(\omega),\phi(c\mid d)(\omega)),\\ &\phi((a\mid b)\vee(c\mid d))(\omega)\\ &\quad=\max(\phi(a\mid b)(\omega),\phi(c\mid d)(\omega)),\forall\omega\in\Omega\end{aligned} \tag{3}$$

但是 DeFinetti 并没有给出如何精确地计算式(3)中的条件事件逻辑组合的概率. 之后，Goodman，Nguyen 和 Walker 在式(2)(3)基础之上，建立了一种确切表达条件事件和对条件事件逻辑组合进行有效概率评估的条件事件代数. Goodman 等人基于布尔环上的主理想陪集，把条件事件 $(a|b)$ 表示成事件区间(interval of events)的形式：$[ab,b\rightarrow a]=\{c\in B:ab\leq c\leq b\rightarrow a\}$. 其中"→"为逻辑蕴涵 $b\rightarrow a=(\text{if } b \text{ then } a)=b'\vee a$. 布尔代数的一般例子是一个给定集合的所有子集的结合关于 $\vee$，$\wedge$，$(\ )'$ 三种运算构成的代数系统. 如果把 $\vee$，$\wedge$ 定义为集合的并和交，$(\ )'$ 定义为集合补，那么度量空间 (Ω,B,P) 中的事件可以构成一布尔代数. 如我们定义乘法为 $\wedge$，定义"+"为 $a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b)$，一个布尔代数能构成一个环. 这个环叫布尔环，它是一个交换环[9]. 并具有原布尔格中的偏序关系：$a\leq b$ 如果 $ab=a$. 有等式 $a\vee b=a+b+ab$ 原布尔代数得以恢复，使布尔代数的研究和布尔环等价. Goodman 指出：给定布尔环 R，事件空间 B 和满射二元操作 $(\cdot\mid\cdot):R^2\rightarrow B$. $(\cdot\mid\cdot)(a,b)$ 简记为 $(a|b)$. 在给出两个引理的基础之上[7]，可以得到一个双射 $\tau:B\rightarrow((A|A)=\{Ab'\vee ab:.a,b\in A\})$ 使 $\tau((a|b)=\{xb'\vee ab:.x\in A\}=[ab,b'\vee ab]=\{x\in A:xb=ab\}$ 成立. 其中，$\{xb'=ab:x\in A\}$ 就是由 b' 生成的主理想 $Ab'=\{xb':x\in A\}$ 所决定的陪集. $[ab,b'\vee ab]$ 是条件事件 $(a|b)$ 的区间表示形式. 这样，给定布尔代数 A，通过函数映象推广，普通的布尔逻辑运算可以推广到 $A|A$ 中：

(i) $(a|b)'=\{x':x\in(a|b)\}=(a'|b)$.

(ii) $(a|b)\wedge(c|d)=\{x\cdot y:x\in(a|b),y\in(c|d)\}=(abcd|a'b\vee c'd\vee abcd)$.

(iii) $(a|b)\vee(c|d)=\{x\vee y:x\in(a|b),y\in(c|d)\}=(ab\vee cd|ab\vee cd\vee bd)$　　(4)

在性质(i)～(iii)中包含了以下等式：

(1) $(a|b)\cdot b=ab\leq a$ (modus ponens：假言推理).

(2) $(a|b)\cdot c=(abc|bc\vee c')$ (推广的假言推理).

(3) $(a|b)\cdot(c|b)=(a\cdot c)|b$.

(4) $(a|b)\vee(c|b)=(a\vee c)|b$ (标准的陪集特性)　　(5)

与式(4)相对应的概率形式为

$$\begin{aligned}&P_0((a|b)')=P(a'|b),\\ &P_0((a|b)\wedge(c|d))=P(abcd|a'b\vee c'd\vee abcd),\\ &P_0((a|b)\vee(c|d))=P(ab\vee cd|ab\vee cd\vee bd)\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)中 P_0 与经典概率中的概率测度 P 是有区别的，下文中的 P_0 如无特别说明都表示在条件事件代数空间中的概率测度.

可以证明 GNW-CEA 是一个 Stone 类型的代数系统[10]，但它不是布尔型代数，这使得它在概然(Probabilitic)逻辑系统或专家系统的应用中受到限制. 比如：GNW 条件事件代数的$(.)'$运算并不是真正的求补运算，这意味着概率论中的一些典型的定理在这种情况下不再适用，对概率测度 P 进行扩张的 P_0 本身不是一个概率测度(probability measure)并导致了下面不等式成立：

$$\begin{aligned}&P_0((a\mid b)\vee(c\mid d))\\ &\neq P(a\mid b)+P(c\mid d)-P_0((a\mid b)\wedge(c\mid d))\end{aligned} \tag{7}$$

此外，如果 $bd=\varnothing$，有 $P_0((a|b)\wedge(c|d))=0$，$P_0((a|b)\vee(c|d))=1$.

这是我们不希望得到的.

GNW 条件事件代数的应用十分广泛，文献[2]比较全面地介绍了 GNW-CEA 在证据理论和专家系统中等智能系统中的应用. 特别值得一提的是文献[11,12]，把 GNW 条件事件代数和随机集(Random sets)理论结合起来，拓展了条件事件代数应用的领域，具有重要的意义.

3.2　SAC 条件事件代数

另一种重要的非布尔型条件事件代数是由 Schay，Adams 和 Calabrese 建立的 SAC 条件事件代数. Adams 首先在文献[13,14]中介绍了其基本思想. 之后，Calabrese 在文献[15,16]中也提出了类似的方法. Schay 介绍了两种不同的 non-Demorgan 型条件事件代数[17]，如果将其中一种条件事件代数的合取运算(conjunction)和另一种条件事件代数的析取运算(disjuntion)结合在一起，其结果就是 Adams 和 Calabrese 等人提出的条件事件代数. 此外，Schay

还提出了一种求补运算(complement),该运算与其它条件事件代数相同.事实上,正是 Calabrese 的工作激发了现代人们对条件事件代数研究的兴趣,使沉寂了多年的条件事件代数理论重新被研究人员所关注.从 1987 年 Goodman 等人的文章为起点标志[18],研究人员在国际学术刊物和会议上发表了大量的论文,特别值得一提的是 1994 年第 12 期《IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics.》条件事件代数专刊(Special issue on Conditional Event Algebra),系统的介绍了当时的研究进展和应用情况[19].

Adams 没有指明条件事件的明确表达形式,但是他提出了一种准(quasi)逻辑运算.Calabrese 则将条件事件解释成有序对(ordered pairs)并给出了与 Adams 相同的运算.文献[20]表明:SAC-CEA 的"∧"运算对应了事件区间的相交(intersection);此外,文献[21]表明:与 GNW-CEA 对应 Lukasiewicz 三值逻辑相似,SAC-CEA 的逻辑基础是 Sobocinski 三值逻辑.在文献[2]中证明:在基于三值逻辑的条件事件代数中,三值逻辑操作可以对应相应布尔函数.比如式(8)是成立的.

$$g((a|b),(c|d))=(h_g(ab,b,cd,d)|k_g(ab,b,cd,d)),\quad a,b,c,d\in d \tag{8}$$

式(8)中的 g 可以是析取函数,也可以是合取函数.下面简单地给出了 SAC-CEA 的条件事件逻辑运算:

(1) $(a|b)'=(a'|b)$,

(2) $(a|b)\wedge(c|d)=((a|b')\vee(c|d)')'=((b\rightarrow a)(d\rightarrow c)|b\vee d)=(abcd\vee abd'\vee b'cd|b\vee d)$,

(3) $(a|b)\vee(c|d)=(ab\vee cd|b\vee d)$　(9)

与 GNW-CEA 相类似,在 SAC-CEA 的事件空间中,也可以给出条件事件逻辑运算的概率测度:

(1) $P_0((a|b)')=P(a'|b)$,

(2) $P_0((a|b)\wedge(c|d))=P((b\rightarrow a)(d\rightarrow c)|b\vee d)=P(abcd\vee abd'\vee b'cd|b\vee d)$,

(3) $P_0((a|b)\vee(c|d))=P(ab\vee cd|b\vee d)$　(10)

3.3　两种非布尔型条件事件代数的比较

AC-CEA 和 GNW-CEA 都具有链(chaining)和假言推理(modus ponens)的特性:

$$(a|bc)\wedge(b|c)=(ab|c),\quad a,b,c\in B\quad(\text{链}),$$

可以推导出

$$(a|b)\wedge(b|\Omega)=(ab|\Omega)\quad(\text{假言推理}).$$

相应的概率形式为 $P_0((a|bc)\wedge(b|c))=P(a|bc)P(b|c)=P_0((a|bc))=P(a|bc)$.

可以证明基于式(10)形式的三值逻辑的条件事件代数不是布尔型条件事件代数.而 GNW-CEA 也只是一种 Stone 类型代数[10].由于这一原因,概率的某些基本法则不再有效,对此前文已有讨论.除此之外,GNW-CEA 和 SAC-CEA 还有一些其它的缺点.比如可能存在这一情况,有简单事件 a,b,c,d,其中 ab 和 b 相对于 cd 是独立(P-independent)的,也就是下列关系存在:

$$P(abcd)=P(ab)P(cd),\ P(abd)=P(ab)P(d),$$
$$P(bcd)=P(b)P(cd),\ P(bd)=P(b)P(d),$$

但是可以证明$(a|b)$和$(c|d)$却不是独立(P_0-independent)的:

$$P_0((a|b)\wedge(c|d))\neq P(a|b)P(c|d) \tag{11}$$

对 GNW-CEA 和 AC-CEA 来说都是如此.

此外,GNW-CEA 和 AC-CEA 都涉及了高阶条件的问题,也就是如何处理$((a|b)|(c|d))$形式的事件.两者均把高阶条件事件强制在与条件事件$(a|b)$,$(c|d)$的事件空间中.

$$GNW:((a\mid b)\mid(c\mid d))=(a\mid b\wedge(a'd'\vee cd))$$
$$AC:((a\mid b)\mid(c\mid d))=(a\mid b\wedge(d\rightarrow c)) \tag{12}$$

当 $d=b$ 或者 $d=\Omega$ 时,两者均为$(a|bc)$.但是注意到式(5)和(10),两者对高阶条件的定义均不能使下列等式成立:

$$P_0((a|b)|(c|d))=P_0((a|b)\wedge(c|d))/P(c|d).$$

3.4　乘积空间条件事件代数

与 GNW-CEA 和 SAC-CEA 不同,乘积空间条件事件代数(Production Space Conditional Event Algebra)是一种布尔型条件事件代数.下面介绍它的基本思想.

设(Ω,B,P)是对非条件事件 $a,b,c,d,\cdots$ 的概率空间,现构建一个扩展的乘积概率测度空间(Ω_0,B_0,P_0),其中,

$$\Omega_0=\Omega\times\Omega\times\cdots,$$

B_0是由 $B\times B\times\cdots$扩展的布尔代数或 σ 代数,P_0是乘积空间的概率测度.

那么可以得到:

$$\begin{aligned}(a\mid b)=&((a\wedge b)\times\Omega_0)\vee\\&(b'\times(a\wedge b)\times\Omega_0)\vee\\&(b'\times b'\times(a\wedge b)\times\Omega_0)\vee\\&(b'\times b'\times b'\times(a\wedge b)\times\Omega_0)\vee\cdots\end{aligned} \tag{13}$$

设有一映射 $f:B\times B\rightarrow B_0$,其中 f 由 $f(a,b)=ab\vee(b'\times ab)\vee(b'\times b'\times ab)\vee\cdots$定义,我们可以得到

$$\begin{aligned}P_0(f(a,b)) &= P_0[ab \vee (b' \times ab) \vee \\ &\quad (b' \times b' \times ab) \vee \cdots \\ &= P_0(ab) + P_0(b' \times ab) + \\ &\quad P_0(b' \times b' \times ab) + \cdots \\ &= P(ab) + P(b' \times ab) + \\ &\quad P(b' \times b' \times ab) + \cdots \\ &= P(ab) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (P(b'))^j \\ &= P(a \mid b) \end{aligned} \tag{14}$$

这样，(Ω_0, B_0, P_0)实现了对(Ω, B, P)的扩张，并且有 $P_0(f(a,b)) = P(a|b)$成立，其中 P_0 是 P 在 $\Omega_0 = \Omega \times \Omega \times \cdots$上的扩张. 这样就可以把规则 $b \rightarrow a$ 看成 $f(a,b)$这样一个事件，只不过该事件处于另外一个测度空间.

在 PS-CEA 中，事件$(a|b)$可以这样来理解：假设有一赌博游戏，规则是第一次掷得 b 后，第二次掷得 a 则胜，如果第二次掷得 a'则负；但是如果第一次掷得的是 b'，则要继续投掷，直到掷出第一个 b. 每一个子空间 Ω 称为柱(cylinder)，条件事件的表示是建立在无穷可数(countable infinite) 个两两互不相交(disjoint)空间柱相乘的乘积空间之上. 显而易见，乘积空间条件事件代数是布尔型的. 根据其定义，在 PS-CEA 中的条件事件逻辑运算及其对应的概率如下：

(1)$(a|b)' = (a'|b)$，

(2) $(a|b) \wedge (c|d) = [(abcd|\Omega) \vee abd' \times (c|d) \vee b'cd \times (a|b) | b \vee d]$，

(3)$(a|b) \vee (c|d) = [(ab \vee cd|\Omega) \vee a'bd' \times (c|d) \vee b'c'd \times (a|b) | b \vee d]$，

(4)$P_0((a|b) \wedge (c|d)) = (P(abcd) + P(abd') \times P(c|d) + P(b'cd)P(a|b)) | P(b \vee d)$，

(5)$P_0((a|b) \vee (c|d)) = (P(ab \vee cd) + P(a'bd') \times P(c|d) + P(b'c'd)P(a|b)) | P(b \vee d) = P(a|b) + P(c|d) - P_0((a|b) \wedge (c|d))$，

(6)$(a|b) \wedge (c|\Omega) = (abc|\Omega) \vee b'c \times (a|b)$ (推广的假言推理，generalized modus ponens) (15)

上面仅列举了 PS-CEA 的一些基本性质，其证明和其它性质可以参考文献[22,23]. 前面介绍 GNW-CEA 和 SAC-CEA 的高阶条件时曾指出：两者均强制性的将高阶条件事件限制在 B_0 中，而 PS-CEA 的高阶条件事件可以表示成$((a|b)|(c|d)) \in (B_0)_0$，其概率测度为

$$\begin{aligned}(P_0)_0((a \mid b) \mid (d \mid d)) &= P_0((a \mid b) \mid (c \mid d)) \\ &= P_0((a \mid b) \wedge (c \mid d))/P(c \mid d)\end{aligned}$$

该式成立的条件是 $P(c|d) > 0$.

4 条件事件代数应用

从前面的介绍可以看出，条件事件代数是代数学、逻辑学、计算机科学等学科紧密联系发展起来的. 其早期发展较慢，但是从 20 世纪 80 年代开始，条件事件代数的发展十分迅速，主要原因是它有着极强的应用背景. 条件事件代数现在主要应用于军用数据融合和 C3I 系统. 从某种程度上来说，正是数据融合等军事科学的需要刺激了条件事件代数的研究. 数据融合是实现对多源信息进行有效处理的一个非常活跃的研究领域. 在以信息战为核心的现代化战争中，双方的数据融合系统性能直接影响到战争的胜负. 从目前的研究现状看来，数据融合的研究方向和所取得的成果主要集中在数据融合的较低层次，也就是数据融合的第一级——融合的位置和标识估计. 在低层次的数据融合实现了对数据的压缩、提炼以后，其输出结果可作为高层次上的态势评估和威胁估计的主要依据. 到目前为止，这一领域发展相当缓慢. 一方面是其需要考虑的因素太广(不仅包括兵力结构，还包括地理环境、社会政治等各方面)，另一方面是需要系统建立算法和推理机制. 现有的研究结果表明单一的数学方法很难达到这一目标. 人们谋求借助于人工智能如专家系统、黑板技术等来解决这一问题. 已有一些专家系统被移植、扩充为具有一定功能的融合系统并在一定的范围内得到了应用. 尽管如此，态势评估和威胁估计还是缺乏理论基础，使得评估各种有效的处理方法的适应性变得相当困难. 面对这样的现状，为了把态势评估和威胁估计问题纳入到坚实的逻辑数学处理的范围之中，美国国防部将条件事件代数列为数据融合技术的基础理论的研究课题[24]. 以美军海洋与太空战略系统研究中心(Space & Naval Warfare Systems Center)研究员 Goodman I R 等人为首的课题组在条件事件代数的基础研究方面作了大量的工作.

下面给出一个条件事件代数应用的简单例子，使读者有一个感性上的认识. 在基于规则的专家系统中，对 if X then S 形式的规则而言，如果证据与规则的前提 X 一致，就可以认为该证据“触发了”(fire)规则. 比如有规则 a：小偷是罪犯；张三是小偷这一证据与规则 a 的前提一致而触发了规则 a，可以推出张三是罪犯的结论. 在人工智能推理中，还广泛使用类似于“If X implies S and If X, then X and

S”的假言推理方法,用符号表示为$(S|X)\wedge X=(S\wedge X)$,如果证据 X 和规则 if X then S 相结合,则根据假言推理在某些场合可以对系统进行简化,比如,$P(R|(S|X)\wedge X)$的概率可以由式(16)给出.

$$P(R \mid (S \mid X) \wedge X) = P(R \mid S \wedge X) \quad (16)$$

现在经常遇到的一个问题是:我们观测到的事件 X 并不一定完全与规则 if X then S 中的 X 相一致.因此我们希望建立这样一个代数逻辑系统:当观测的事件 Y 不完全与规则 if X then S 的前提相一致的情况下(我们将其表示成 $Y\wedge(S|X)$),系统能够使规则局部触发(Partial firing).本文介绍的条件事件代数就是满足这一要求的代数系统.因为对条件事件代数而言,$Y\wedge(S|X)$可以看成其事件空间中的普通事件.我们可以根据式(17)计算局部触发规则的概率测度.

$$P_0(R|(S|X)\wedge X)=\frac{P_0(R\wedge(S|X)\wedge Y)}{P_0((S|X)\wedge Y)}$$
$$=\frac{P(R\wedge S\wedge X\wedge Y)+P(R\wedge Y\wedge X')P(S|X)}{P(S\wedge X\wedge Y)+P(Y\wedge X')P(S|X)} \quad (17)$$

这一方法是有实际应用价值的.比如,设事件 R,S,X 和 Y,其中 $X=x,Z=z$,且有 $Y\in W_1$ 和 $Y\in W_2$.那么式(18)成立:

$$P_0(x \mid (z \mid W_1), W_2) = P_0(R \mid (S \mid X) \wedge X) \quad (18)$$

事件描述如下:

$Y\in W_1$ 为观测者 1 看到一艘军舰位于 $2a$ 区域,

$Y\in W_2$ 为观测者 1 看到一艘军舰位于 $2b$ 区域,

$Z=z$ 为传感器 3 收集的观测集 z,

$(Z=z|Y\in W)$为“如果观测者 1 看到一艘军舰位于 $2a$ 区域则传感器 3 收集观测集 z”.若 $W_1=W_2$,则有

$$P_0(x \mid (z \mid W), W) = p(x \mid z, W) \quad (19)$$

式(12)的数值表明在证据“如果观测者 1 看到一艘军舰位于 $2a$ 区域则传感器 3 收集观测集 z”下的后验分布(Posterior distribution).如果 $W_1\neq W_2$,根据条件事件代数的性质和式(18)(19)可得

$$P_0(x|z|W_1),W_2)=$$
$$\frac{P(x,z,W_1\wedge W_2)+[P(x,W_2)-p(x,W_1\wedge W_2)]P(z|W_1)}{P(z,W_1\wedge W_2)+[P_Y(W_2)-P_Y(W_1\wedge W_2)]P(z|W_1)} \quad (20)$$

这个例子实现了规则的“局部触发”,更重要的是:它把“如果观测者 1 看到一艘军舰位于 $2a$ 区域则传感器 3 收集观测集 3”这样的经验性知识(规则)有机地与“观测者 1 看到一艘军舰位于 $2b$ 区域”等普通事件联系起来,在数学上给出一个测度对其进行度量.限于篇幅,我们无法一一例举条件事件代数的种种具体应用,下文介绍一些文献供有兴趣的读者参考.文献[18]提出了 GNW 条件事件代数的基本思想.文献[25]中回顾条件事件代数发展的历史,并对 GNW 类型条件事件代数的性质进行研究.在文献[2,26]中系统地给出了 GNW-CEA 理论.由于 GNW-CEA 是非布尔类型,实际的应用系统提出了布尔型条件事件代数的要求.文献[27]中提出了乘积空间条件事件代数的基本思想并研究了其性质.文献[28]对 PS-CEA 的计算复杂度进行了讨论.文献[22,23]深入研究了 PS-CEA 的具体性质使其逐步完善.文献[29]系统介绍了 PS-CEA 理论.PS-CEA 理论已经应用到实际的军用数据融合与决策系统中.决策理论一般来说包括三个方面,也即假设检验(hypotheses testing)、估计与置信(estimation and confidence setting)和演绎(deduction).在 1997～1999 年的美军海洋与太空战略系统研究中心的报告中介绍了 PS-CEA 在决策系统三个方面的应用[30～32].

条件事件代数的理论和应用研究不能不涉及随机集理论(Random sets Theory),随机集实际上可以看成是概率论中的随机变量的推广形式;随机集理论是一个一般性的理论,是一门强有力的数学工具.随机集理论为数据融合提供了一个整体的框架[33,34],也就是将数据融合中的数据处理纳入随机集体系.这方面研究的代表是洛克希德战术防务系统(Lockheed Martin Tactial Defense Systems)研究人员 Ronald P. S. Mahler.文献[11]中将 GNW 条件事件代数的条件事件逻辑纳入随机集中,文献[12]处理的是高阶条件事件.可以证明证据推理与随机集有密切联系,它是相互独立、非空的随机集理论[35,36].利用单点覆盖随机集函数可以将随机集理论与概率论和模糊数学联系起来[37,39],而 PS-CEA 是概率论的扩张,实际上也就是将模糊理论与条件事件代数联系起来.文献[38]中,讨论了随机集(random sets)、条件集(conditional sets)、模糊集(fuzzy sets)和粗集(rough sets)4 种非增集合之间的联系,随机集的作用是作为一个桥梁将它们联系起来.将随机集和条件事件代数及其它数据融合的方法结合起来有大量的应用:在证据理论的应用中,如果证据是模糊或残缺的,如何处理这些证据并取得较好的融合效果是十分重要的.文献[40～42]中,利用单点覆盖函数,Mahler 基于条件事件代数和随机集理论将证据理论推广为条件证据理论(CDS)并给出在目标识别中的应用,他没有直接引入条件置

信函数,而是定义一个先验一致变量,将它加入Dempster组合规则,用组合结果再求每个焦元的先验一致度,使得在先验条件一致性好的情况下,融合结果较好.当先验条件一致性差时,融合结果近似于Dempster规则的结果.另外,条件证据理论有很好的概率基础,当先验概率为贝叶斯条件时,它的组合公式就是并行贝叶斯公式,并且Smets意义下的"赌博"概率(pignistic probability)也是它的一种特殊情况[43].在数据融合系统中,除了机械电子类型的传感器(如雷达、声纳等),还有许多基于自然语言的表达(情报人员的信息、专家对某一对象的判断等).Goodman通过单点覆盖随机集,将自然语言中的模糊逻辑表述与概率论和条件事件代数结合起来,提供了解决这一问题的新途径[44].Kramer G F将这一方法用于数据融合中目标的关联(correlation)和跟踪(tracking)[45].目前,条件事件代数主要应用于军用方面,但是这门学科毫无疑问的可以应用到民用领域的各个方面.文献[46]将乘积空间条件事件代数应用到图像估计,与传统方法相比,该方法具有占用较少内存和较快的处理速度等优点.文献[47]利用条件事件代数对系统参数进行辩识和估计,该文将条件事件代数(系统知识,如规则)和随机集理论(统计性质)结合起来实现了基于知识的辩识,仿真实验表明:基于条件事件代数(规则)的系统辩识优于最小二乘法,由于将知识融入辩识过程,可以用小样本获得满意的结果,这对实时性要求较高和无法过多采样的场合具有重要意义.

国内从事这方面研究工作的单位主要为西安电子科技大学和国防科学技术大学.西安电子科技大学曾组织了一个条件事件代数的初级讨论班,由于各种原因这个讨论班没有继续.康耀红在其著作中用一章的篇幅[24]介绍了GNW条件事件代数的一些基本原理和性质,这是国内至今为止首次在专著中涉及这门学科.文献[48]以GNW条件事件代数理论为基础,在有限布尔集上建立一个自由布尔多项式,并在该多项式上利用布尔关系给出了条件事件的一个新的表示方法,解决了专家系统中一类循环规则的合成问题与复杂条件命题概率计算.李兵[49~51]也在条件事件的表示和条件事件随机变量及条件证据组合等方面进行了研究.但是总的说来,国内条件事件代数的基础理论和应用研究的基础十分薄弱,在乘积空间条件事件代数等方面的文献至今是空白.

5 发展趋势

随着条件事件代数研究的深入,其理论也逐渐完善.在今后的发展中,我们认为下面几个方面值得进一步研究:

(1)是否还能建立其它类型的条件事件代数?前面介绍了三种典型的条件事件代数,其中GNW-CEA和SAC-CEA不是布尔型的,PS-CEA虽然是布尔型的,但是其计算复杂度成指数上升,因此在实际应用中都要作一些近似,这极大的限制了其应用.这在某种程度上成为其在实际应用中的一个最大障碍.能否找到一个类似于傅立叶变换中的快速傅立叶变换以提高运算速度?或者能否找到一个新的布尔型且计算复杂度较小的条件事件代数系统?这都将有待研究.

(2)在数据融合系统和其它大型智能系统中,都存在大量结构复杂的事件,这些复杂事件可以由一些简单的事件构成.比如,某一专家对敌军第二天对我发动进攻的可能性进行判断.其中:

事件 a:敌军主力转移到区域 C;

事件 b:明天是晴天,温度约为30°;

事件 c:海洋状态为等级 A;

…….

相应地,我们往往采用由组成该复杂事件的简单事件概率的数值函数来对复杂事件进行描述.式(21)表示了这一思想:

$$y_j = f_j(P(a), P(b), \cdots), \ j = 1,2,\cdots,m \tag{21}$$

式(21)中的 f_j 是第 j 个专家对复杂事件"敌对我进攻"中基本事件 a,b,c 等综合考虑的函数,该函数可以是线性的,也可以是非线性的.事件 a,b,c 在一般情况下并非独立或不相交的,可以称它们为关联事件(relational events).式(21)存在着这样的特殊情况:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(P(a), P(b), \cdots) = P(ab)/P(b) = P(a|b), \\ y_2 &= f_2(P(a), P(b), \cdots) = P(cd)/P(d) = P(c|d) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{22}$$

如果复杂系统中的事件的概率运算关系可以表示成式(22)所示的条件概率形式,也就是所讨论的关联事件之间是诸如"if b then a"和"if d then c"等条件逻辑结构,则我们可以利用条件事件代数对系统进行研究.人们若问:如果这些简单事件之间的逻辑结构并不只是单纯"if then"的条件结构,或者说事件概率之间运算关系除了条件概率,比如事件概率的幂、事件概率的开方等运算表明事件之间的一

个什么样的逻辑结构？这就是关联事件代数(Relational Event Algebra,REA)研究的范畴.我们简单的比较一下概率论与条件事件代数和关联事件代数.从学科的角度来看:概率论是一门研究随机现象的规律性的科学,当我们使用概率这一测度对事件进行描述时有两个并行的但不相同的方面[52]:一个是基于代数的(algebraic-based),它涉及对进行评估的相关事件的代数或逻辑的结构;另一个是基于数值的(numerical-based),它主要指概率评估本身.尽管绝大多数有关概率论的著作在基本理论部分都会指出逻辑和代数(或布尔)理论在对事件进行描述时有着重要的作用,但是概率论的发展史表明绝大部分学者主要把研究兴趣放在了后者之上.这些研究在理论和应用等方面都取得了丰硕的成果,比如我们所熟知的马尔科夫过程、概率分布函数、随机变量分析以及由 Pearl 提出的贝叶斯网(bayesian net,又叫信度网)等等.虽然概率论取得了很大的发展,但是由于研究中忽视概率论中基于代数的一面,也造成了许多问题,比如前面讨论的规则逻辑概率和条件概率不相容的问题.事实上,在经典概率论中,事件集的交、并和补等基本逻辑运算都与乘、加和减等数值运算一一对应,比如独立事件 a 和 b 相交的概率可以表示成 $P(a \wedge b)=P(a) \cdot P(b)$,借助于文氏图等工具,我们就能够更好地理解这些数值运算的实质.显而易见,基于数值的和基于代数(或逻辑)的方法统一起来对事件进行描述要比仅仅只是使用数值方法的描述更具有逻辑性和可信性.这种统一的描述在诸如数据融合等复杂系统中更显得十分必要.CEA 和在随后发展起来的 REA 相对于概率论而言更注重从事件的逻辑结构等方面来对事件进行描述和评估,它们与概率论即有联系也有一定的区别.REA 是一个比 CEA 更为复杂的逻辑系统[23,44,51,52],乘积空间条件事件代数只是关联事件代数的一个特例.REA 的研究处于起步阶段,它也是一个有意义的研究课题.

尽管数据层融合的性能优良,但是如果高层次不能有效的对信息集成,则会极大的限制系统的性能.许多国家都注意到了这一点,并把研究的重点向数据融合的高层次转移.我们相信 CEA 和 REA 在这一领域有广阔的应用前景.

参　考　文　献

1 Bool G. An investigation of the Laws of Thought. New York: Dover, 1951

2 Goodman I R, Nguyen H T, Walker E A. Conditional Inference and Logic for Intelligent Systems: A Theory of Measure-Free Conditioning. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science,1991

3 Hailperin T. Boole's Logic and Probability. North-Holland, Amsterdam:Elsevier Science,1976

4 DeFinetti, B La Logique de la Probabilite, Actes du Congres Intern. de Philosophie Scientifique. Hermann et Cie Editeurs, Paris, 1935, IV(1): 1～9

5 Lewis D. Probabilities of conditionals and conditional probabilities. Philosophy Review,1976, 85(3):297～315

6 Goodman I R, Mahler R P S, Nguyen H T. What is conditional event algebra and why should you care? In:Proceedings of SPIE Conference on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition, San Diego,1999. 2～13

7 Goodman I R. Toward a comprehensive theory of linguistic and probabilistic evidence: Two new approaches to conditional event algebra. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics,1994,24(12):1685～1698

8 Definetti B. Theory of Probability. New York: Wiley, 1974

9 Philip Calabrese. A algeberaic syntheesis of the foundation of logic and probability. Information Science,1987, 42(3):187～237

10 Elbert A. Walker Stone Algebra, Conditional Events. Three valued logic. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, 1994,24(12):1699～1707

11 Ronald P S Mahler. Representing rules as random sets (I): Statistical correlations between rules. Information Science, 1996, 88(1): 47～68

12 Ronald P S Mahler. Representing rules as random sets (II): Iterated rules. International Jouanal of Intelligent System, 1996, 11(9):583～610

13 Adams E W. Probability and the Logic of Conditionals. In: Hintikka J, Suppes P eds. Aspects of Inductive Logic. North-Holland, Amesterdam:Elsevier Science, 1966. 265～316

14 Adams E W. The Logic of Conditionals. Dordrecht, Holland: D. Reidel Co. ,1975

15 Calabrese P G. An algebraic synthesis of the foundations of logic and probability. Information Science, 1987, 42(2): 187～237

16 Calabrese P G. A theory of conditional information with applications. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1994, 24(12):1676～1684

17 Schay G. An algebra of conditional events. Journal of Mathematical Analysis Applications, 1968, 24(4):334～344

18 A measure-free approach to conditioning. In: Proceedings of the 3rd American Association for Artificial Intelligence Workshop on Uncertainty in AI, Seattle, 1987. 270～277

19 Dubois D, Goodman I R, Calabrese P G Eds. IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics, 1994,24(12):1671～1675

20 Igoshin V I. Lattices of intervals and lattices of convex sublattices of lattices. Ordered Sets and Lattices, 1980,6(1):69～76
21 Rescher N. Many-Valued Logic. New York: McGraw-Hill Book Co., 1969
22 Goodman I R, Nguyen H T. Mathematical foundations of conditionals and their probabilistic assignments. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 1995,3(3): 247～339
23 Goodman I R, Kramer G F. Extension of relational event algebra to random sets with applications to data fusion. In: Proceedings of Workshop on Applications and Theory of Random Sets, Institute for Mathematics and Its Applications(IMA), Berlin, 1996. 209～242
24 Kan Yao-Hong. Theory and Application of Data Fusion. Xi′an: Xidian Publisher House,1997(in Chinese)
(康耀红.数据融合理论与应用.西安:西安电子科技大学出版社,1997)
25 Goodman I R. Evaluation of combiantions of conditioned information: A history. Information Sciences, 1991,57(1):79～110
26 Goodman I R, Gupta M M , Nguyen H T, Walker E A. Conditional Logic in Expert Systems. North-Holland:Elsevier Science,1991
27 Goodman I R, Nguyen H T. A Theory of Conditional Information for Probabilistic inference in Intelligent System:Ⅱ, Product Space Approach. Information Sciences, 1992,74(1):13～42
28 Goodman I R, Nguyen H T. A theory of conditional information for probabilistic inference in intelligent system:Ⅲ, mathematic appendix. Information Sciences, 1993,75(3):253～277
29 Goodman I R, Mahler R P S, Nguyen H T. Mathematics of Data Fusion. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1997
30 Goodman I R, Kramer G F. Decision theory augmented by natural metrics with applications to data fusion. Independent Research 1997 Annual Report, SSC San Diego, CA, 1997. 29～48
31 Goodman I R. Algebraic estimation of multivalued phenomena with applications to data fusion . Independent Research 1998 Annual Report, IDS9823 SSC San Diego, CA,1998
32 Goodman I R. Deduction in data fusion based upon algebraic representation of probabilistic models. Independent Research 1998 Annual Report, IDS9823 SSC San Diego, CA, 1999
33 Malher R. A unified foundation for data fusion. In:Proceedings of the 7th Joint Service Data Fusion Symposium, Warmingster PA, 1996. 153～173
34 Malher R. Unified data fusion: fuzzy logic, evidence, and rules. In:Proceedings of SPIE Conference on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition, San Diego, 1996. 226～237
35 Hestir K, Nguyen H T, G S Rogers. A random set formalism for evidential reasioning. In: Goodman I R, Gupta M M, Nguyen H T, Walker E A ed. Conditional Logic in Expert Systems, North-Holland:Elsevier Science,1991. 46～58
36 Zhang Wen-Xiu. Representation of evidence theory by random sets. Fuzzy Systems and Mathematic, 1995, 9(1):1～6(in Chinese)
(张文修. 证据理论的随机集表示. 模糊系统与数学,1995, 9(1):1～6)
37 Goodman I R. Applications of product space algebra of conditional events and one-point random sets representations of fuzzy sets to the development of conditional fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 69:257～278
38 Nguyen H T. Some mathematical structures for computational information. Information Sciences,2000, 128(1):67～89
39 Goodman I R. A new characterization of fuzzy logic operators producing homomorphic-like relations with one-point coverages of random sets. In:Wang P P ed. Advances in Fuzzy Theory & Technology, Vol Ⅱ, Duke University, Durham,NC,1994. 209～242
40 Malher R. Classification when a priori evidence is ambiguous. In: Proceedings of the SPIE on Automatic Object Recognition Ⅳ, Orlando, FL, 1994. 296～304
41 Malher R. Combining ambiguous evidence with respect to ambiguous a priori knowledge, Ⅰ:Boolean logic. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A,1996, 26(1):27～41
42 Malher R. Combining ambiguous evidence with respect to ambiguous a priori knowledge, Ⅱ:Fuzzy logic. International Journal of Fuzzy sets systems, 1995,75(3):319～354
43 Stems P. Construing the pignistic probability function in a context of uncertainty. Uncertainty Artificial Intelligence, 1990, 5(1):29～39
44 Goodman I R, Nguyen H T. Application of conditional and relational event algebra to defining of fuzzy logic concepts. In: Proceedings of SPIE Conference on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition, San Diego, 1999. 25～36
45 Kramer G F, Goodman I R. Application of the possibilistic approach to correlation and tracking. In: Proceedings of SPIE Conference on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition, San Diego,1999. 37～46
46 Qu Yu-Ling, Kelly Patrick, Derin, Haluk, Gong Wei-Bo. Conditional event algebra techniques for iterated image estimation. In:Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing Proceedings, Washington D C,1997. 219～222
47 Kelly Patrick, Derin, Haluk, Gong Wei-Bo. Some applications of conditional events and random sets for image estimation and system modeling. In:Proceedings of SPIE Conference on Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition, San Diego, 1999. 14～24
48 Ji Dong-Yao. Conditional event algebra based on the finite Boolean proposition sets and its application. Computer Science, 1997,24(2): 16～19(in Chinese)
(姬东耀. 基于有限布尔命题集上的条件事件代数及其应用 . 计算机科学,1997,24(2):16～19)

49 Li Bing . Expression of conditional events. Journal of National Defense Technology, 1998, 20(3):110～112(in Chinese)
(李　兵.条件事件代数的表示.国防科技大学学报,1998,20(3):110～112)

50 Li Bing, Luo Xue-Shang, Luo Ai-Ming. Conditional random variables and conditional data fusion. Journal of National Defense Technology, 1999,21(1):109～112(in Chinese)
(李　兵,罗雪山,罗爱民.条件随机变量与条件数据融合.国防科技大学学报,1999,21(1):109～112)

51 Li Bing, Yu Wen-Xian, Hu Wei-Dong. A combination of conditional evidence and conditional believes based on the conditional event algebra system. Fuzzy System and Mathematics, 2001, 15(1):103～107(in Chinese)
(李　兵,郁文贤,胡卫东.基于条件事件代数系统的条件证据组合与条件信任组合.模糊系统与数学,2001, 15(1):103～107)

52 Goodman I R. Similarity measure of events, relational event algebra, and extension to fuzzy logic. In: Proceedings of the 1996 Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society,1996.187～191

53 George M J, Goodman I R. Numerical and implementational studies of conditional and relatonal event event algebra, illustrating use and comparison with other approaches to modeling of information. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Information Fusion,California,1999.273～280

DENG Yong, born in 1975. He is currently a Ph.D. candidate in School of Electronics & Information Technology Shanghai Jiaotong University. His research interests are in conditional event algebra, random sets theory and their application in data fusion systems.

LIU Qi, born in 1977. She is currently a Ph.D. candidate in School of Life Science & Technology Shanghai Jiaotong University. Her research interest is in bioinformatics.

SHI Wen-Kang, born in 1975. He is a professor in School of Electronics & Information Technology Shanghai Jiao Tong University. His research interest is in automatic testing theory.