第36卷 第9期 计 算 机 学 报 Vol. 36 No. 9
2013年9月 CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS Sept. 2013

完全 p-支配集的参数算法

骆伟忠[1),2)] 冯启龙[1)] 王建新[1)] 陈建二[1)]

[1)](中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)

[2)](惠州学院计算机科学系 广东 惠州 516007)

摘 要 完全 p-支配集是一个著名的NP-难问题,在无线传感网络中被用于构建无线传感节点的自我保护网络.该文主要研究完全 p-支配集在DG(Disk Graph)模型及其特殊模型上的参数复杂性及参数算法设计.首先证明完全 p-支配集在顶点度受限的UDG(Unit Disk Graph)上仍是NP-难的.为了深入理解完全 p-支配集在UDG模型上的难解性根源,利用参数化规约进一步研究了完全 p-支配集在UDG上的参数复杂性.基于难解性根源的分析,最后利用树分解技术和动态规划技术,针对平面图(一种特殊DG模型)上的完全 p-支配集,设计了一个时间为 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ 的精确算法,其中 n 为给定实例中的顶点个数,k 为问题解的大小.

关键词 完全 p-支配集;DG模型;固定参数可解;树分解;动态规划

中图法分类号 TP301 **DOI号** 10.3724/SP.J.1016.2013.01868

Parameterized Algorithms for Total p-Dominating Set

LUO Wei-Zhong[1),2)] FENG Qi-Long[1)] WANG Jian-Xin[1)] CHEN Jian-Er[1)]

[1)](*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha* 410083)

[2)](*Department of Computer Science, Huizhou University, Huizhou, Guangdong* 516007)

Abstract Total p-Dominating Set is a famous NP-hard problem, and has important applications in wireless networks. In wireless networks, Total p-Dominating Set is usually used to construct the self-protection network for wireless nodes. In this paper, we mainly study the Total p-Dominating Set problem in disk graphs and some more restricted classes of disk graphs from the viewpoint of parameterized complexity and parameterized algorithms. We first prove that Total p-Dominating Set is still NP-hard in unit disk graphs with bounded vertex degree. To gain insight into the source of complexity of Total p-Dominating Set in unit disk graphs, based on parameterized reduction, we further study the parameterized complexity of the considered problem in unit disk graphs. By the method of tree decomposition and dynamic programming, we finally design an exact algorithm with running time $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ for Total p-Dominating Set in planar graphs (a restricted class of disk graphs), where n denotes the number of vertices in the given instance, and k is the size of problem solution.

Keywords total p-dominating set; disk graphs; fixed parameter tractable; tree decomposition; dynamic programming

---

收稿日期:2012-11-17;最终修改稿收到日期:2013-04-07.本课题得到国家自然科学基金(61232001,61103033,61173051)及中南大学博士后基金资助.**骆伟忠**,男,1978年生,博士,主要研究方向为参数计算、计算机理论.**冯启龙**(通信作者),男,1982年生,博士,主要研究方向为参数计算、计算机理论.E-mail:csufeng@mail.csu.edu.cn.**王建新**,男,1969年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机算法、网络优化理论、生物信息学.**陈建二**,男,1954年生,博士,海外高层次人才引进计划入选者,长江学者特聘教授,主要研究领域为生物信息学、计算机理论、计算复杂性及优化.

1 引　言

支配集是经典的 NP-难问题，在无线网络、测量及地理信息系统、编码理论、图像处理、数值分析、VLSI 设计、信息检索、生物学等众多领域都有应用[1]. 近来，人们从参数复杂性及参数算法的角度对支配集问题进行了深入的研究. 支配集在一般图上是 $W[2]$-完全的，这表示除非 $W[2]$ 类问题都是固定参数可解的，否则该问题不存在时间复杂度为 $O(f(k)n^c)$ 的算法，其中 n 为问题规模，c 是一个常量，k 为问题解的大小，$f(k)$ 是一个可计算函数[2]. 因此，人们主要研究了特殊图上支配集的参数算法设计. Alber 等人提出了区域分解技术，并利用该技术证明了平面图上支配集具有 $335k$ 的线性核上界[3]. 随后 Chen 等人将平面图上支配集的核上界改进到 $67k$[4]. Dorn 利用分支分解和快速矩阵相乘技术针对平面图上支配集设计了一个时间复杂度为 $O^*(2^{11.98\sqrt{k}})$ 的参数亚指数算法[5]. 最近，人们对支配集的参数算法研究扩展到比平面图更一般的图，如无 H-图子式的图(H-minor free graph)、无 $K_{i,j}$ 图($K_{i,j}$-free graph)和 d-退化图(d-degenerated graph)等[6-7].

完全 p-支配集是与支配集相关的一个重要问题. 完全 p-支配集在无线网络中具有重要应用. 在无线传感网络中，完全 p-支配集被用于构建自我保护网络，使传感节点能够抵抗外部的攻击，从而传感节点能更好地进行监控工作[8-9]. 完全 p-支配集的严格定义如下.

完全 p-支配集

输入：无向图 $G=(V, E)$，非负整数 p, k.

任务：判断是否存在一个大小不超过 k 的点集 $T\subseteq V$，使得对于 V 中的每个点 v，v 至少与 T 中的 p 个顶点相邻.

如果 $p=1$，则称之为完全支配集. 自完全支配集和完全 p-支配集被提出以来[10-11]，人们主要从两方面对其进行了研究. 一方面，人们从算法和复杂性角度对其进行研究. 完全支配集是 NP-完全的[12]，甚至在顶点的最大度为 3 的平面图上仍是 NP-难的[13]. 文献[8]证明完全支配集的近似度的上界为 $\log n$，其中 n 为图中顶点的个数. 文献[14]给出了一个近似度为 $\ln(\delta-0.5)+1.5$ 的近似算法，其中 δ 为输入图中的顶点最大度. 文献[15]证明了对任意常数 p，完全 p-支配集是 NP-难的，给出了一个近似度为 $\ln n$ 的多项式时间近似算法，并证明了近似度的下界为 $(1/p)\ln n$. 文献[16]指出完全支配集存在时间为 $O^*(6^l)$ 的精确算法，其中 l 为输入图的树宽. 另一方面，人们从图理论角度对完全支配集和完全 p-支配集进行研究. 文献[10]给出了顶点个数至少为 3 的连通图上最优完全支配集大小的上界为 $2n/3$. 文献[17]进一步证明了在顶点度至少为 3 的图上最优完全支配集大小的上界为 $n/2$. 文献[18]证明了在顶点度至少为 p 的图上，其最小完全 p-支配集大小的下界为 pn/Δ，其中 Δ 为图中顶点的最大度.

DG 模型和 UDG 模型在无线网络中具有重要应用[19]. 人们对 DG 模型和 UDG 模型上 NP-难问题进行了深入研究. 从 NP 复杂性角度出发，文献[20]研究了斯坦纳树等经典难解问题在 UDG 模型上的难解性. 从参数算法角度出发，文献[21]研究了红-蓝支配集和连通点覆盖在 DG 模型上的核心化算法设计. 近来完全 p-支配集在无线网络中得到成功应用，因此人们开始关注 DG 模型和 UDG 模型上完全 p-支配集的研究. 文献[9]研究了 UDG 上完全支配集，并证明了完全支配集在 UDG 上的近似率上界为 10.

本文主要从参数复杂性和参数算法角度对 DG 模型及其特殊模型上完全 p-支配集问题进行系统的研究. 首先证明了完全 p-支配集在顶点的最大度为 3 的 UDG 上仍是 NP-难的. 基于参数化规约，进一步证明了完全 p-支配集在 UDG 上是 $W[1]$-难解的，即完全 p-支配集在 UDG 上以问题解的大小 k 作为参数是固定参数不可解的. 但如果限制 DG 模型中相交圆之间的距离，则完全 p-支配集在 DG 上以 k 作为参数是固定参数可解的. 最后研究完全 p-支配集在一种特殊 DG 模型-平面图上的参数算法设计，利用树分解技术和动态规划技术，提出了一个时间为 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ 的参数化精确算法，其中 n 为输入实例中的顶点个数. 从而证明了完全 p-支配集在平面图上以 p 和 k 为参数是固定参数可解的.

2 相关术语

设 z, z' 为欧式平面上的任意两个点，用 $d(z,z')=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ 表示 z, z' 间的欧式距离，其中 (x, y), (x', y') 分别为 z, z' 在欧式平面上的坐标值. 在欧式平面上，将一个圆 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 表示为

$(r,x,y)\in\mathbb{R}^3$，其中 x，y 分别为圆 D 的圆心横坐标值和纵坐标值，而 r 为圆 D 的半径. 设 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_n\}(D_i\subseteq\mathbb{R}^2)$ 为欧式平面上 n 个圆的集合，用 $G_{\mathcal{D}}=(V_{\mathcal{D}},E_{\mathcal{D}})$ 表示 $\mathcal{D}$ 的相交图，即 $V_{\mathcal{D}}=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$E_{\mathcal{D}}=\{(v_i,v_j)\mid D_i\cap D_j\neq\varnothing\}$. 设 $G(V,E)$ 为一个无向图，其中 V 是 G 的顶点集，E 是 G 的边集. 如果存在一个欧式平面上的圆集合 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_n\}(D_i\subseteq\mathbb{R}^2)$，使得 $G=G_{\mathcal{D}}$，则称 G 为 DG(Disk Graph). 如果对 $\mathcal{D}$ 中任意两个圆 D_i，D_j，满足 $r_i=r_j$，即半径相等，则称 G 为 UDG(Unit Disk Graph). 特别地，如果对 $\mathcal{D}$ 中任意两个圆 D_i，D_j，满足 $d(v_i,v_j)\geq r_i+r_j$（v_i，v_j 分别表示圆 D_i 和 D_j 的圆心），则称图 G 为硬币图(coin graph). 称 $\mathcal{D}=\{D_1,\cdots,D_n\}$ 为图 G 的圆盘模型. 用 $\mu(\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{D}$ 中所有圆所占的欧式平面上的面积大小. 设 $S\subseteq\mathbb{R}^2$ 为欧式平面上的点集合，用 $\mathcal{D}[S]=\{D\in\mathcal{D}\mid D\cap S\neq\varnothing\}$ 表示 S 在 $\mathcal{D}$ 中的导出圆集合.

设 $G(V,E)$ 为一个无向图，如果能将图 G 嵌入到二维平面上，使得 G 中任意两条边除端点外不相交，则称 G 为平面图. 平面图和硬币图是等价的[22].

定义 1[23]. 设 $G(V,E)$ 为一给定的无向图. 图 G 的树分解是一个二元对 $\langle\{X_i\mid i\in I\},T\rangle$，其中 X_i 是顶点 V 的一个子集（称为包），树 T 的每个节点 $i\in I$ 都对应 V 的一个子集 X_i，且满足以下条件：

(1) $\bigcup_{i\in I}X_i=V$，即覆盖原图 G 的所有顶点；

(2) 对于图 G 上的每一条边 $(u,v)\in E$，存在一个 $i\in I$ 使得 $\{u,v\}\in X_i$，即覆盖所有的边；

(3) 对于任意的 $i,j,k\in I$，如果在树 T 中，j 是 i 到 k 路径上的节点，则 $X_i\cap X_k\subseteq X_j$，即保证与原图的一致性.

树分解 $\langle\{X_i\mid i\in I\},T\rangle$ 的宽度定义为 $\max\{|X_i|\mid i\in I\}-1$. 图 G 的树宽 $tw(G)$ 是 G 的所有可能树分解树中的最小宽度值.

在得到给定图的树分解后，通常将给定的树分解转化为一种具有简单结构的树分解——完美树分解.

定义 2[23]. 如果树分解 $\langle\{X_i\mid i\in I\},T\rangle$ 满足以下条件：

(1) 树 T 的任意节点最多包含两个子节点；

(2) 如果节点 i 包含两个子节点 j、k，则 $X_i=X_j=X_k$（称 i 为连接节点）；

(3) 如果节点 i 只包含一个子节点 j，则满足以下两个条件中的一个：

(a) $|X_i|=|X_j|+1$ 且 $X_j\subset X_i$（称 i 为引入节点）；

(b) $|X_i|=|X_j|-1$ 且 $X_i\subset X_j$（称 i 为遗忘节点）.

则称 $\langle\{X_i\mid i\in I\},T\rangle$ 为完美树分解.

可在多项式时间内将任意给定的树分解转换成完美树分解，具体如以下引理所示.

引理 1[23]. 给定图 $G=(V,E)$ 和图 G 的一个宽度为 k，节点个数为 N 的树分解，可在线性时间内($O(N)$)将该树分解转化成一个宽度为 k、节点个数为 $O(N)$ 的完美树分解.

3 UDG 上的 NP 复杂性

完全 p-支配集在一般图上是 NP-难的，本节进一步证明完全 p-支配集在顶点度受限的 UDG 上仍是 NP-难的.

首先给出以下重要引理.

引理 2[24]. 顶点最大度为 4 的平面图 $G(V,E)$ 可按以下方式嵌入到面积不超过 $O(|V|)$ 的二维平面上：每个顶点具有整数的坐标；任一条边均由一些平行于 y 轴或 x 轴，形式为 $x=i$ 或 $y=j$ 的线段组成(i、j 为整数).

基于引理 2，可得出：

定理 1. 完全 p-支配集在顶点的最大度为 3 的 UDG 上是 NP-难的.

证明. 要证明定理的正确性，只需证明完全支配集($p=1$)在顶点的最大度为 3 的 UDG 上是 NP-难的. 完全支配集在顶点的最大度为 3 的平面图上是 NP-难的[13]. 证明从顶点最大度为 3 的平面图上的完全支配集规约到顶点最大度为 3 的 UDG 上的完全支配集. 设图 G 为顶点最大度为 3 的平面图. 基于 G，构造一个顶点最大度为 3 的 UDG 图 G'，使得图 G 上存在一个大小不超过 k 的完全支配集当且仅当图 G' 上存在一个大小不超过 k' 的完全支配集(k 和 k' 为非负整数).

利用引理 2，将图 G 嵌入到二维平面上，使得任一个顶点均具有整数坐标，任一条边均由一些形式为 $x=i$ 或 $y=j$ 的线段组成(i、j 为整数). 调整坐标刻度，使得任意两个顶点间的边由一些长度为整数的线段组成（任意两个点间的最短距离为 1). 在该嵌入下，对于 G 中的任一点 v，用一个圆心为 v 点所在的坐标位置、半径为 1/8 的圆代替. 对于 G 中的任一条边 (u,v)，用 $4k_{uv}$ 个半径为 1/8 的圆代替($k_{uv}\geq 0$)，且以以下方式组织这 $4k_{uv}$ 个圆的相交模式：除了以 u、v 为圆心的圆，这 $4k_{uv}$ 个圆不与其它圆相交，且这 $4k_{uv}$ 个圆及以 u、v 为圆心的圆的相交图是条长度为 $4k_{uv}+2$ 的简单路径（路径长度等于该

路径上的顶点个数). 图 G' 即为按以上方式构造出的圆的相交图. 因此,图 G' 上的点由两部分组成:从 G 上的顶点转换过来的点集 V 以及从图 G 上的边转换过来的点集 V_E. 显然,图 G' 上的顶点最大度为 3.

下面证明:图 G 上存在一个大小不超过 k 的完全支配集当且仅当图 G' 存在一个大小不超过 $k'=k+\sum_{uv\in E}2k_{uv}$ 的完全支配集.

$\Rightarrow$:假设图 G 上存在一个大小不超过 k 的完全支配集 D. 基于 D,构造图 G' 上的一个完全支配集 D'. 注意到 G' 中的顶点由两部分组成:V 和 V_E. 首先将 $V\cap D$ 中的所有点加入 D'. 下面说明将 V_E 中的哪些点放入 D' 中. 分 3 种情况讨论. 设 u, v 为图 G 上两个相邻的点. 由 G' 的构造过程可知,在图 G' 中,u,v 间的路径 $p(u,v)$ 上有 $4k_{uv}$ 个内部点($k_{uv}\geq 0$),且这些内部点均来自点集 V_E. 不失一般性,假设 $k_{uv}\geq 1$. 为了描述的方便,假设路径 $p(u,v)$ 上的 $4k_{uv}$ 个内部点从与 u 相邻的第一个内部点依次编号到与 v 相邻的最后一个内部点. (1) $u,v\in D$. 将路径 $p(u,v)$ 上的第 1 个、最后一个及第 $4i$ 个和第 $4i+1$ 个($1\leq i\leq k_{uv}-1$)内部点放入 D' 中. (2) $u\notin D, v\in D$. 将路径 $p(u,v)$ 上的第 $4i+1$ 和第 $4i+2$ 个($0\leq i\leq k_{uv}-1$)内部点放入 D' 中. (3) $u,v\notin D$. 将路径 $p(u,v)$ 上的第 $4i+2$ 和第 $4i+3$ 个($0\leq i\leq k_{uv}-1$)内部点放入 D' 中. 容易验证,D' 是图 G' 上的完全支配集,且 $|D'|=|D|+\sum_{uv\in E}2k_{uv}$.

$\Leftarrow$:假设图 G' 上存在一个大小为 $k'=k+\sum_{uv\in E}2k_{uv}$ 的完全支配集 D'. 设 $u\in V$, $N_G(u)$ 为点 u 在图 G 上的邻居节点集合. 下面证明,图 G' 上存在一个大小不超过 $|D'|$ 的完全支配集 D'',满足 $N_G(u)\cap D''\neq\varnothing$. 假设 $N_G(u)\cap D'=\varnothing$. 设 $N_{G'}(u)$ 为点 u 在图 G' 上的邻居节点集合. 因点 u 需被支配,所以 $D'\cap N_{G'}(u)\neq\varnothing$. 设 $a\in D'\cap N_{G'}(u)$. 设 $v\in N_G(u)$ 且 a 在路径 $p(u,v)$ 上. 根据假设,$v\notin D'$. 注意到路径 $p(u,v)$ 上有 $4k_{uv}$ 个内部点. 设 P 为路径 $p(u,v)$ 上包含在解 D' 中的内部节点集合. 容易验证,为了完全支配路径 $p(u,v)$ 上的 u 点及所有内部点,$|P|\geq 2k_{uv}+1$. 如果 $u\notin D'$,则设 S 为路径 $p(u,v)$ 上第 $4i+1$ 和第 $4i+2$ 个($0\leq i\leq k_{uv}-1$)内部点组成的点集,否则设 S 为路径 $p(u,v)$ 上的第 1 个、最后一个及第 $4i$ 个和第 $4i+1$ 个 ($1\leq i\leq k_{uv}-1$)内部点组成的点集. 设 $D''=(D'\setminus P)\cup S\cup\{v\}$. 显然,$D''$ 是图 G' 上的完全支配集. 注意到 $|S|=2k_{uv}$. 因此,$|D''|=|D'|$.

设 D'' 为图 G' 上的完全支配集,且满足:对任意点 $u\in V$, $N_G(u)\cap D''\neq\varnothing$. 设 $D=D''\setminus V_E$. 显然,D 是图 G 上的完全支配集. 下面证明 D 是图 G 上一个大小不超过 k 的完全支配集. 设 $u,v\in V$. 由 G' 的构造过程可知,路径 $p(u,v)$ 上有 $4k_{uv}+2$ 个点($k_{uv}\geq 0$),且其中 $4k_{uv}$ 个内部点均来自点集 V_E. 容易验证,为了完全支配路径 $p(u,v)$ 上的 $4k_{uv}$ 个内部点,这 $4k_{uv}$ 个内部点中至少需 $2k_{uv}$ 个包含在解 D'' 中. 因此,$|D|=|D''\setminus V_E|\leq k$.　　证毕.

4　UDG 上的参数复杂性

因完全 p-支配集在 UDG 上是 NP-难的,一个自然的问题是完全 p-支配集在 UDG 上是否是固定参数可解的. 本节研究完全 p-支配集以目标解的大小作为参数的参数复杂性.

定理 2.　完全 p-支配集在 UDG 上是 $W[1]$-难解的.

证明.　要证明定理的正确性,只需证明完全支配集($p=1$)在 UDG 上是 $W[1]$-难解的. 从 k-团问题参数化规约到 UDG 上的完全支配集. 给定一个无向图 $G(V,E)$ 和一个非负整数 k,k-团问题的任务是回答图 G 中是否存在一个顶点子集 $K\subseteq V$,使得 $|K|\geq k$,且 K 中顶点在图 G 中的导出子图是一个完全图. k-团问题是 $W[1]$-难解的[25]. 设(G,k)为 k-团问题的一个实例. 基于(G,k),构造出完全支配集的一个实例(G',k'),其中 G' 为 UDG 图,满足:$k'=f(k)$(f 为一可计算函数),且(G,k)是 k-团问题的真实例当且仅当(G',k')是完全支配集的真实例.

首先说明(G',k')的总体构造思路. 将图 G 看成是一个有向图:对 G 中的任一条边(u,v),用有向边$[u,v]$和$[v,u]$代替(u,v);对任一个点 u,假设存在从 u 到 u 的自我有向边. 在 G 中找一个大小为 k 的团,其本质是在 G 中找 k^2 条边,使得这 k^2 条边构成了一个 k-团. 为了模拟找这 k^2 条边的过程,在图 G' 中构造 k^2 个相同的部件(gadget),每个部件用来模拟找一条边. 这 k^2 个部件按 k 行和 k 列的方式排列,用 $G_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列的部件. 同一行相邻的部件用行连接器进行连接,同一列相邻的部件用列连接器进行连接. 行连接器的作用是保证针对同一行部件找出的 k 条有向边的起始顶点是相同的;而列连接器的作用是保证针对同一列部件找出的 k 条有向边的终止顶点是相同的.

为了表述方便，对 $G(V,E)$ 中的点和边进行编号. 对 G 中的顶点从 1 到 n 进行编号（$n=|V|$），用 $c(v)$ 表示顶点 $v\in V$ 的编号；对 G 中的任一条有向边 $e=[u, v]$，则 e 的编号 $c(e)=(c(u)-1)\times n+c(v)$. 显然，$G$ 上任一条边的编号在 1 到 n^2 之间. 对于 G 上的某条有向边 e 的编号 s（$1\le s\le n^2$），用 $x(s)$ 表示边 e 的起始顶点编号，用 $y(s)$ 表示边 e 的终止顶点编号.

接下来描述部件、行连接器和列连接器的具体构造.

部件 $G_{i,j}$ 的构造. $G_{i,j}$ 由 17 个模块组成：$X_1,\cdots,X_8,Y_1,\cdots,Y_8,Z$，每个模块包含了多个圆，具体的构造见图 1. 每个 X 类型的模块 X_i 包含了 n^2 圆，每个 Y 类型的模块 Y_i 包含了 n^2+1 个圆，而模块 Z 包含了 8 个圆. X 和 Y 类型模块中的每个圆 C 的圆心坐标的形式为 $(x_1+a\varepsilon, y_1+b\varepsilon)$，其中 x_1，y_1 为整数，表示圆心的基准坐标，$\varepsilon=1/8n^2$，$-n\le a,b\le n$，称 a 为圆 C 的横偏移量，b 为圆 C 的竖偏移量. 同一个模块（X 和 Y 类型）中的圆的基准坐标相同，即 x_1 和 y_1 值相同. 为了表示的方便，设 $Offxy(C)=(a,b)$，表示圆 C 的圆心偏移量. 对于 $G_{i,j}$，如果 $i\ne j$，则对于图 G 中的每条编号为 s 的非自我有向边，每个模块 X_l（或 Y_l）中均有一个编号为 s 的圆 $X_{l,s}$（或 $Y_{l,s}$）与之对应；如果 $i=j$，则对于图 G 中的每条编号为 s 的自我有向边，每个模块 X_l（或 Y_l）中均有一个编号为 s 的圆 $X_{l,s}$（或 $Y_{l,s}$）与之对应. 对于类型为 Y 的每个模块 Y_l，还包含一个编号为 0 的圆 $Y_{l,0}$. 每个模块中编号为 s 的圆的圆心偏移量如下所示：

$Offxy(X_{1,s})=(s,-y(s))$；

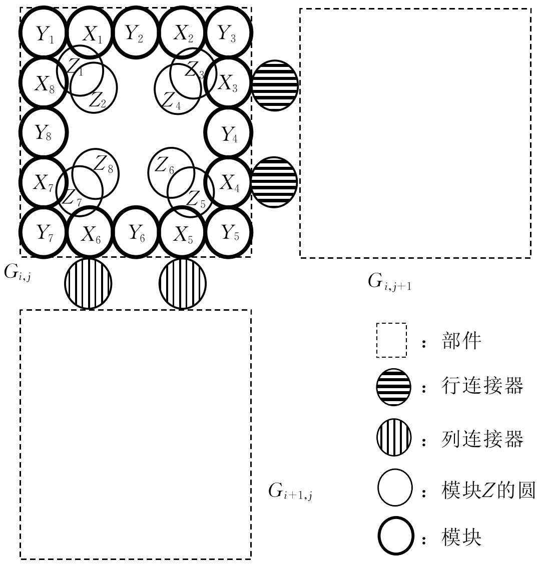

图 1 部件及连接器

$Offxy(X_{2,s})=(s, y(s))$；

$Offxy(X_{3,s})=(-x(s),-s)$；

$Offxy(X_{4,s})=(x(s),-s)$；

$Offxy(X_{5,s})=(-s, y(s))$；

$Offxy(X_{6,s})=(-s,-y(s))$；

$Offxy(X_{7,s})=(x(s), s)$；

$Offxy(X_{8,s})=(-x(s), s)$；

$Offxy(Y_{1,s})=(s+0.5, s+0.5)$；

$Offxy(Y_{2,s})=(s+0.5, -n)$；

$Offxy(Y_{3,s})=(s+0.5, -s-0.5)$；

$Offxy(Y_{4,s})=(-n, -s-0.5)$；

$Offxy(Y_{5,s})=(-s-0.5, -s-0.5)$；

$Offxy(Y_{6,s})=(-s-0.5, n)$；

$Offxy(Y_{7,s})=(-s-0.5, s+0.5)$；

$Offxy(Y_{8,s})=(n, s+0.5)$.

由以上构造可知，对于 X 和 Y 类型的任两个圆 C_1 和 C_2，只有当 C_1，C_2 在同一个模块，或它们所在的模块相邻时，C_1，C_2 才可能相交.

模块 Z 由 8 个圆组成. 其中圆 $Z_1(Z_3,Z_5,Z_7)$ 与模块 $X_8(X_2,X_4,X_6)$ 和 $X_1(X_3,X_5,X_7)$ 中的每个圆均相交，且与圆 $Z_2(Z_4,Z_6,Z_8)$ 相交，但与其它任何圆均不相交. 圆 $Z_2(Z_4,Z_6,Z_8)$ 只与圆 $Z_1(Z_3,Z_5,Z_7)$ 相交.

行连接器 $H_{i,j}$ 的构造. $H_{i,j}$ 连接部件 $G_{i,j}$ 和部件 $G_{i,j+1}$. $H_{i,j}$ 中的圆分为两模块 H_1 和 H_2，每个模块均包含 $n+1$ 个圆. 模块 H_1 连接 $G_{i,j}$ 中的模块 X_3 和 $G_{i,j+1}$ 中的模块 X_8，模块 H_2 连接 $G_{i,j}$ 中的模块 X_4 和 $G_{i,j+1}$ 中的模块 X_7. 模块 H_1 中编号为 s 的圆 $H_{1,s}$ 的圆心偏移量为 $Offxy(H_{1,s})=(-s-0.5, -n^2-1)$，而模块 H_2 中编号为 s 的圆 $H_{2,s}$ 的圆心偏移量为 $Offxy(H_{2,s})=(s+0.5, n^2+1)$. H_1 和 H_2 中的圆不会与任何 Y 类型模块中的圆相交.

列连接器 $V_{i,j}$ 的构造. $V_{i,j}$ 连接部件 $G_{i,j}$ 和部件 $G_{i+1,j}$. $V_{i,j}$ 中的圆分为两模块 V_1 和 V_2，每个模块均包含了 $n+1$ 个圆. 模块 V_1 连接 $G_{i,j}$ 中的模块 X_6 和 $G_{i+1,j}$ 中的模块 X_1，模块 V_2 连接 $G_{i,j}$ 中的模块 X_5 和 $G_{i+1,j}$ 中的模块 X_2. 模块 V_1 中编号为 s 的圆 $V_{1,s}$ 的圆心偏移量为 $Offxy(V_{1,s})=(n^2+1,-y(s))$，而模块 V_2 中编号为 s 的圆 $V_{2,s}$ 的圆心偏移量为 $Offxy(V_{2,s})=(-n^2-1, y(s))$. V_1 和 V_2 中的圆不会与任何 Y 类型模块中的圆相交.

设 $k'=12k^2$. 显然，(G',k') 的构造可以在多项式时间内完成.

接下来证明 (G, k) 是 k-团问题的真实例当且仅

当(G',k')是完全支配集的真实例.

⇒假设(G,k)为一个真实例，并设 K 为图 G 上一个大小为 k 的团. 图 G'上一个大小为 $12k^2$ 的完全支配集 T 构造如下. 设 K 中的 k 个点为 $v_1,\cdots,v_k$，并假设 $c(v_1)<c(v_2)<\cdots<c(v_k)$. 对 K 上的每一条有向边 $e=[v_i,v_j]\in E(K)$，将 G'中的部件 $G_{i,j}$上的以下 12 个圆加入 T 中：Z_1，Z_3，Z_5，Z_7，$X_{1,c(e)}$，$X_{2,c(e)}$，$X_{3,c(e)}$，$X_{4,c(e)}$，$X_{5,c(e)}$，$X_{6,c(e)}$，$X_{7,c(e)}$，$X_{8,c(e)}$. 由 G'的构造过程可知，T 是图 G'上的完全支配集.

⇐假设(G',k')是一个真实例，并设 T 为图 G'上一个大小为 $12k^2$ 的完全支配集. 首先证明以下命题.

命题 1. 每个部件 $G_{i,j}$上有 12 个圆包含在 T 中.

证明. 因为 Z_2只能被 Z_1支配，易推出 T 一定包含 Z_1. 如果 T 包含 Z_2，则用 $X_1\cup X_8$中的任意一个圆代替 Z_2，可得另一个解. 因此，可以假设 T 不包含 Z_2. 因为 Z_1需要被支配，所以 T 至少包含 X_1或 X_8中的一个圆，不失一般性，假设 T 包含 X_1中的一个圆. 因为 $X_1\cup X_8$中的任意一个圆均不能支配 Y_1中所有圆，所以 T 至少包含 $Y_1\cup X_8$中的一个圆. 综上所述，T 至少包含 $X_1\cup X_8\cup Y_1$中的两个圆. 同理，可推出 T 一定包含 Z_3,Z_5,Z_7，不包含 Z_4,Z_6,Z_8，至少包含 $X_2\cup X_3\cup Y_3$中的两个圆，至少包含 $X_4\cup X_5\cup Y_5$中的两个圆，至少包含 $X_6\cup X_7\cup Y_7$中的两个圆. 另一方面，注意到 T 为一个大小为 $12k^2$ 的完全支配集. 因此每个部件 $G_{i,j}$上刚好有 12 个圆包含在 T 中. 从而命题得证. 证毕.

因为共有 k^2个部件，每个部件包含 12 个圆，所以连接器上的圆没有一个包含在 T 中.

接下来证明以下命题.

命题 2. 对于每个部件 $G_{i,j}$，存在一个 G'的完全支配集 T'，T'包含 $G_{i,j}$上的以下 12 个圆：$Z_1,Z_3,Z_5,Z_7,X_{1,s},X_{2,s},X_{3,s},X_{4,s},X_{5,s},X_{6,s},X_{7,s},X_{8,s}$，其中 $1\le s\le n^2$.

证明. 设 $T'\cap(X_1\cup\cdots\cup X_8)$的值在所有解中是极大的. 由命题 1 可知，$T'$包含 Z_1,Z_3,Z_5,Z_7. 下面证明，对每一个模块 X_i，T'至少包含一个 X_i中的圆. 假设 T'不包含 X_i中的任意一个圆. 由命题 1 可知，T'至少包含 4 个 X 类型的圆. 因此，存在两个模块 X_a,X_b，使得 $T'\cap X_a\neq\varnothing$，$T'\cap X_b\neq\varnothing$，但对任意 $a<i<b$，满足 $T'\cap X_i=\varnothing$. 从而对任意 $a<i\le b$，满足 $T'\cap Y_i\neq\varnothing$. 假设 $X_{a,j}\in T'\cap X_a$，令 $T''=T'\backslash(Y_{a+1}\cup\cdots\cup Y_b)\cup(X_{a+1,j}\cup\cdots\cup X_{b,j})$，显然，$T''$是 G'上的一个大小不超过$|T'|$的完全支配集. 这与 $T'\cap(X_1\cup\cdots\cup X_8)$的值在所有解中是极大的前提矛盾. 另一方面，容易得知，对每一个模块 X_i，T'至多包含一个 X_i中的圆，否则$|T'|>12k^2$. 设 T'包含圆 $X_{1,j_1},\cdots,X_{8,j_8}$. 下面证明 $j_1=\cdots=j_8$. 由部件 $G_{i,j}$的构造过程可知，对于任两个圆 X_{i,j_i}和 $X_{i,j_{i+1}}$，只有当 $j_i\ge j_{i+1}$时，X_{i,j_i}和 $X_{i,j_{i+1}}$才能支配 Y_{i+1}中的所有圆. 因此，$j_1\ge j_2\ge\cdots\ge j_8\ge j_1$，即 $j_1=j_2=\cdots=j_8$.

证毕.

因此，假设 T 满足命题 2 的性质.

接下来证明以下命题.

命题 3. 对于同一行的两个相邻的部件 $G_{i,j}$和 $G_{i,j+1}$，假设 $G_{i,j}$上每个 X 类型模块中编号为 s 的圆（即圆 $X_{1,s},X_{2,s},X_{3,s},X_{4,s},X_{5,s},X_{6,s},X_{7,s},X_{8,s}$）包含在 T 中，而 $G_{i,j+1}$上每个 X 类型模块中编号为 s'的圆包含在 T 中，则 s 和 s'满足以下性质 $x(s)=x(s')$.

证明. 假设 $x(s)>x(s')$. 容易观察到，此时第 1 个部件 $G_{i,j}$的包含在 T 中的圆 $X_{3,s}$支配了 H_1中的以下圆：$H_{1,x(s)},\cdots,H_{1,n}$. 而第 2 个部件 $G_{i,j+1}$的包含在 T 中的 $X_{8,s'}$支配了 H_1中的以下圆：$H_{1,0},\cdots,H_{1,x(s')-1}$. 因此，$T$ 没有支配 $H_{1,x(s')}$. 这与 T 是一个 G'上的一个解的前提矛盾. 类似地，如果 $x(s)<x(s')$，则可推出 H_2中的 $H_{2,x(s)}$没有被 T 支配.

证毕.

由命题 3 容易得出：对于同一行的任两个部件 $G_{i,j}$和 $G_{i,j'}$，假设 $G_{i,j}$上每个 X 类型模块中编号为 s 的圆包含在 T 中，而 $G_{i,j'}$上每个 X 类型模块中编号为 s'的圆包含在 T 中. 则 $x(s)=x(s')$.

命题 4. 对于同一行的部件 $G_{i,j}$和 $G_{i,j'}$（$j\neq j'$），假设 $G_{i,j}$上每个 X 类型模块中编号为 s 的圆包含在 T 中，而 $G_{i,j'}$上每个 X 类型模块中编号为 s'的圆包含在 T 中. 则 $s\neq s'$.

证明. 假设 $s=s'$，即 $x(s)=x(s')$且 $y(s)=y(s')$. 假设部件 $G_{j,j}$上 X 类型的在 T 中的圆的编号为 s''，$G_{j',j'}$上 X 类型的在 T 中的圆的编号为 s'''. 因为 $y(s)=y(s'')=x(s'')$，$y(s')=y(s''')=x(s''')$，所以 $s''=s'''$. 假设 $G_{j,j'}$上 X 类型的在 T 中的圆的编号为 s''''. 因为 $x(s'')=x(s'''')$，$y(s''')=y(s'''')$，$x(s'')=y(s'')=y(s''')$，所以 $x(s''')=y(s''')$. 但由 $G_{j,j'}$的构造过程可知，对于 $G_{j,j'}$中 X 类型的任意一个圆 C，假设圆 C 的编号为 l，则 $x(l)\neq y(l)$. 矛盾. 证毕.

使用类似于命题 3 和 4 的证明方法可得：对于同一列的部件 $G_{i,j}$和 $G_{i',j}$（$i\neq i'$），假设 $G_{i,j}$上每个 X 类型模块中编号为 s 的圆包含在 T 中，而 $G_{i',j}$上每

个 X 类型模块中编号为 s' 的圆包含在 T 中. 则 $y(s)=y(s')$ 且 $s\neq s'$.

基于 T,图 G 上的一个大小为 k 的团 K 的构造如下. 对于每个部件 $G_{i,j}$,假设 $G_{i,j}$ 上每个 X 类型模块中编号为 s 的圆包含在 T 中,则将图 G 上编号为 s 的边加入图 H 中. 由以上讨论可知,图 H 中的 k^2 条有向边中没有重复边,即没有两条起始点和终止点均相同的边,且图 H 中刚好有 k 个不同的顶点. 因此,图 H 是图 G 的一个有向完全子图. 将 $V(H)$ 加入 K 中,则 K 是图 G 一个大小为 k 的团. 证毕.

从完全 p-支配集在 UDG 上固定参数不可解性证明的过程可知,问题的难解性依赖于以下假设: UDG 圆盘模型中相交圆间的距离可以无限接近. 如果限制相交圆之间的距离,则问题的难度会发生根本性的改变. 这是因为,如果相交圆间的距离大于某个常量 c,则图中顶点的最大度是受限的,利用文献[26]的"几何"核心化技术容易得出所研究的问题是固定参数可解的,具体如以下定理所示.

定理 3. 给定一个 DG 图 $G(V,E)$,假设 $\mathcal{D}$ 为 G 的圆盘模型. 如果 $\mathcal{D}$ 中任何两个圆的圆心之间的距离大于某个常量 c,且 $\mathcal{D}$ 中圆的半径是有限常量,则完全 p-支配集在实例 (G,k) 上是固定参数可解的.

证明. 假设 $\mathcal{D}$ 的相交图 $G_{\mathcal{D}}(V_{\mathcal{D}},E_{\mathcal{D}})$ 中的顶点按如下方式嵌入到欧式平面上: 顶点 $v_i\in V_{\mathcal{D}}$ 位于圆 $D_i\in\mathcal{D}$ 的圆心位置. 假设 $\mathcal{D}$ 中圆的最大半径和最小半径分别为常量 $r_{\max}$ 和 $r_{\min}$. 注意到对任意点 $v\in V_{\mathcal{D}}$,因为 $\mathcal{D}$ 中圆的最大半径为 $r_{\max}$,所以有 $\mu(\mathcal{D}[N[v]])\leq\pi(3r_{\max})^2=9\pi r_{\max}^2$ ($N[v]$ 表示 v 及其邻接点的集合). 因此,如果 $\mu(\mathcal{D})>9k\pi r_{\max}^2$,则 (G,k) 是一个假实例. 假设 $\mu(\mathcal{D})\leq 9k\pi r_{\max}^2$. 另外一方面,因为 $\mathcal{D}$ 中圆的最小半径为 $r_{\min}$,且任何两个圆的圆心之间的距离大于某个常量 c,所以 $\mu(\mathcal{D})\geq\pi(c\sqrt{n}/2+r_{\min})^2\geq(\pi/4)c^2n$(将所有圆的圆心放入某个圆中),其中 $n=|V|$. 从而 $(\pi/4)c^2n\leq\mu(\mathcal{D})\leq 9k\pi r_{\max}^2\Rightarrow n\leq(36r_{\max}^2/c^2)\cdot k$. 因此,完全 p-支配集具有大小为 $(36r_{\max}^2/c^2)\cdot k$ 的核. 因为一个参数化问题是可核心化的当且仅当该问题是固定参数可解的[2],所以完全 p-支配集在实例 (G,k) 上是固定参数可解的. 证毕.

5 平面图上的参数算法设计

平面图是一种相交圆之间的距离最大化的特殊 DG 模型: 任何两个相交圆均以相切的方式进行相交. 由上一节的分析可知,完全 p-支配集在平面图上是固定参数可解的. 本节进一步证明平面图上完全 p-支配集存在参数亚指数算法. 设 (G,k) 为完全 p-支配集的一个实例(k 为问题解的大小),该算法基于树分解技术和动态规划技术,主要由两部分组成:

(1) 找到图 G 上的一个最优树分解 (X,T),且证明该树分解的树宽是受限的,即树宽是关于 k 的一个函数: $tw(G)\leq f(k)$;

(2) 利用动态规划技术,在树分解树上设计一个时间复杂性为 $2^{\alpha\cdot tw(G)}n^{O(1)}$ 的算法,其中 α 为一常量,n 为问题规模.

5.1 树分解

首先给出关于平面支配集问题的一个重要结论.

引理 3[27]. 设图 G 为一平面图. 如果 G 上存在一个大小不超过 k 的支配集,则图 G 的树宽 $tw(G)\leq 9.546\sqrt{k}$.

基于以上引理,可得新的引理.

引理 4. 设图 G 为一平面图. 如果 G 上存在一个大小不超过 k 的完全 p-支配集,则图 G 的树宽 $tw(G)\leq 9.546\sqrt{k}$.

证明. 设平面图 G 上存在一个大小不超过 k 的完全 p-支配集 D. 显然,D 也是图 G 上的一个支配集. 由引理 3 可得 $tw(G)\leq 9.546\sqrt{|D|}$. 因此, $tw(G)\leq 9.546\sqrt{|D|}\leq 9.546\sqrt{k}$. 证毕.

5.2 动态规划

针对完全 p-支配集实例 (G,k) 的一个树宽受限的完美树分解 $\langle\{X_i\mid i\in I\},T\rangle$,基于动态规划技术设计完全 p-支配集的参数亚指数算法. 为了表述方便,先介绍相关概念.

对于分解树 T 上的每个节点 $i\in I$,用 G_i 表示节点 i 及其子孙节点中所有顶点在图 G 中的导出子图,即 $G_i=(V_i,E_i)$,其中 V_i 表示节点 i 及其子孙节点所对应的包的所有顶点集合,$E_i=E\cap(V_i\times V_i)$.

对于每一个包 X_i,假设 X_i 中的顶点是按顺序编号的,即对任意 $i\in I$,$X_i=\{x_i^1,\cdots,x_i^{n_i}\}$,其中 n_i 表示 X_i 中顶点的个数. 对于任意包 X_i,使用 $2(p+1)$ 种颜色对其中的顶点进行着色:

$\hat{j}$: 该点在解中且已经被 j 个点支配($0\leq j\leq p$);

j: 该点不在解中且已经被 j 个点支配($0\leq j\leq p$).

设 $c=(c_1,\cdots,c_{n_i})\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$. 则称 c 为针对包 X_i 中顶点的一种着色方案,且用 c_t 表示 X_i 中的第 t 个顶点 x_i^t 在 c 中被着的颜色. 假设在某着色方案 c 下某顶点 x_i^t 的着色为 c_t,用 $b(c_t)$ 表示在着色

方案 c 下顶点 x_i^t 被支配的次数，即如果 $c_t=\hat{i}(0\le i\le p)$，则 $b(c_t)=i$，如果 $c_t=i(0\le i\le p)$，则 $b(c_t)=i$.

针对一个大小为 n_i 的包 X_i，定义函数 m_i：$\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}\rightarrow\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. 对于 X_i 中顶点的一种着色方案 $c=(c_1,\cdots,c_{n_i})\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$，$m_i(c)$ 表示 X_i 中顶点在着色方案 c 限制下，图 G_i 中的最小完全 p-支配集的大小. 对于包 X_i 中顶点的一种着色方案 $c=(c_1,\cdots,c_{n_i})\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$，如果以下条件满足：

$(\exists t\in\{1,\cdots,n_i\}:b(c_t)\ge 1)\wedge(|N_\wedge(x_i^t)|<b(c_t))$，其中 $N_\wedge(x_i^t)$ 表示图 $G[X_i]$ 中顶点 x_i^t 的邻居且着色属于 $\{\hat{0},\cdots,\hat{p}\}$ 的点集，

则称 c 为无效着色方案.

对于给定着色方案 $c=(c_1,\cdots,c_{n_i})\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$，定义 $\#_\wedge(c)=|\{t|t\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p}\}\}|$.

动态规划算法为每个树分解树中的节点 $i\in I$ 建立一张动态规划表 A_i，如表 1 所示. 表 A_i 共有 n_i+2 列，有 $(2p+2)^{n_i}$ 行. 每一行代表包 X_i 中顶点的一种着色方案 c，以及该着色方案的函数值 $m_i(c)$ 和前驱指针 $p_i(c)$. $p_i(c)$ 用于最后构造最优解，指向获得 $m_i(c)$ 值的包 X_i 孩子节点的某着色方案. 算法首先计算树分解树中叶节点的动态规划表，然后自底向上计算中间节点的动态规划表，也就是说，对于每个节点 $i\in I$，只有计算完节点 i 的所有子孙的动态规划表，才根据节点 i 的孩子节点的动态规划表更新节点 i 的动态规划表. 显然，所求解的完全 p-支配集的最优解大小包含在根节点的动态规划表中.

表 1 动态规划表 A_i

x_i^1	x_i^2	$\cdots$	$x_i^{n_i-1}$	$x_i^{n_i}$	$m_i()$	$p_i()$
$\hat{0}$	$\hat{0}$		$\hat{0}$	$\hat{0}$		
		$\vdots$				
p	p		p	p		

步骤 1：初始化.

算法的第 1 步是计算树分解树中叶节点的动态规划表. 对每一个叶节点包 X_i 的所有着色方案 $c\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$，按如下公式求解函数 $m_i(i)$ 值：

$$m_i(c)=\begin{cases}\#_\wedge(c), & c\text{ 是有效着色方案}\\ +\infty, & c\text{ 是无效着色方案}\end{cases}.$$

步骤 2：后序遍历树分解树 T，执行动态规划的过程.

假设当前遍历到的节点为 $i\in I$. 如果 i 为叶节点，则不执行任何操作. 下面假设 i 为中间节点. 下面分情况讨论节点 i 的动态规划表的计算.

(1) 遗忘节点. 假设节点 i 为遗忘节点，并设其孩子的编号为 j. 注意到此时图 G_i 和图 G_j 是相同的，而 X_j 包含了 X_i 中所有顶点且只比 X_i 多一个顶点. 不失一般性，假设 $X_i=\{x_i^1,\cdots,x_i^{n_i}\}$，$X_j=\{x_i^1,\cdots,x_i^{n_i},x\}$.

引理 5. 对遗忘节点 X_i 的每一种着色方案 c：$m_i(c)=\min_{d\in\{\hat{p},p\}}\{m_j(c\times\{d\})\}$.

证明. 根据树分解的定义，顶点 x 不会再出现在后续要处理的树分解树中的任何一个中间节点中. 因此，后续要处理的包不会改变顶点 x 被支配的次数. 对包 X_j 的任意着色方案 $c\times\{d\}$，如果 $d\notin\{p,\hat{p}\}$，则在该着色方案的限制下，顶点 x 在图 G 中被支配的次数少于 p 次，也即着色方案 $c\times\{d\}$ 不会导出一个图 G 上的完全 p-支配集. 因此，只需考虑 x 的着色为 p 或 $\hat{p}$ 的着色方案. 证毕.

按引理 5 的公式对遗忘节点 X_i 的动态规划表进行计算，并将指针 $p_i(c)$ 指向获得 $m_i(c)$ 值的包 x_j 中的着色方案 $c\times\{d\}$(即 $m_i(c)=m_j(c\times\{d\})$).

(2) 引入节点. 假设节点 i 为引入节点，其孩子节点的编号为 $j\in I$. 此时，图 G_i 包含图 G_j 中的所有点且比 G_j 多一个顶点 x，该顶点 x 在图 G_i 中只与包 X_j 中的某些顶点相邻，而与 $V_j\backslash X_j$ 中的任何点均不相邻. 不失一般性，假设 $X_j=\{x_j^1,\cdots,x_j^{n_j}\}$，$X_i=\{x_j^1,\cdots,x_j^{n_j},x\}$. 设顶点 x 在包 X_i 中的邻居为 $N(x)\cap X_i=\{x_j^{l_1},\cdots,x_j^{l_p}\}$，其中 $1\le l_1\le\cdots\le l_p\le n_j$. 为了表述的方便，定义一个针对包 X_j 中顶点着色的一个转换函数 ϕ：$\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_j}\rightarrow\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_j}$. 对于包 X_j 上的一个着色方案 $c=(c_1,\cdots,c_{n_j})$，定义函数 $\phi(c)=\{c_1',\cdots,c_{n_j}'\}$ 使得

$$c_t'=\begin{cases}\hat{j}(j=i-1), & \text{如果 } c_t=\hat{i}\text{ 且 }t\in\{l_1,\cdots,l_p\},i\ge 1\\ i-1, & \text{如果 } c_t=i\text{ 且 }t\in\{l_1,\cdots,l_p\},i\ge 1\\ c_t, & \text{其它情况}.\end{cases}$$

引理 6. 对引入节点 X_i 的孩子 X_j 的每一种着色方案 c，任意 $0\le l\le p$，有

(1) $m_i(c\times\{l\})=$

$$\begin{cases}m_j(c), & \text{在图 } G[X_i]\text{ 中}，x\text{ 存在 } l\text{ 个邻居 } x_j^q\in X_i\text{ 满足 } c_q\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p}\}\\ +\infty, & \text{其它情况；}\end{cases}$$

(2) $m_i(c\times\{\hat{l}\})=$

$$\begin{cases} m_j(c')+1, & \text{在图 } G[X_i] \text{中}, x \text{ 存在 } l \text{ 个邻居} \\ & x_j^q\in X_i \text{满足 } c'_q\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p}\}, \\ & \text{其中 } c'=\phi(c) \\ +\infty, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

证明. 首先考虑(1)的正确性. 此时顶点 x 被分配的着色为 l. 为了保证包 X_i 的着色方案 $c\times l$ 的有效性，需保证顶点 x 至少被 l 个顶点支配，即 x 的邻居点中至少有 l 个是在解中. 注意到在图 G_i 中，顶点 x 只能被包 X_i 中顶点支配. 因此在图 G_i 和图 $G[X_i]$ 中，顶点 x 的邻居点集是相同的.

下面证明(2)的正确性. 顶点 x 的着色 $\hat{l}$ 表明 x 已被放入解中，因此相比于着色方案 c，x 在包 X_i 中的所有邻接点 $\{x_j^{l_1},\cdots,x_j^{l_p}\}$ 在着色方案 $c\times\{\hat{l}\}$ 下被支配的次数均增加了一次. 假设在着色方案 c 下，x 的某邻接点 $x_j^q\in\{x_j^{l_1},\cdots,x_j^{l_p}\}$ 被支配的次数为 i 次. 因 x 的着色 $\hat{l}$ 会给 x_j^q 的支配次数增加一次，同时注意到 $m_j(c')\le m_j(c)$ (x_j^q 在着色 c' 下被支配的次数为 $i-1$ 次)，所以 $m_i(c\times\{\hat{l}\})$ 的值为 $m_j(c')+1$. 证毕.

按引理 6 的公式对引入节点 X_i 的动态规划表进行计算，对于有效着色方案 $c\times\{l\}$，$c\times\{\hat{l}\}$，将指针 $p_i(c\times\{l\})$ 指向包 x_j 中的着色方案 c，而指针 $p_i(c\times\{\hat{l}\})$ 指向 c'.

(3) 连接节点. 假设节点 i 为连接节点，其两个孩子的编号分别为 j 和 k. 设 $X_i=X_j=X_k=\{x_i^1,\cdots,x_i^{n_i}\}$. 此时图 G_j 和图 G_k 的顶点交集为 X_i，而图 $G_i=G_j\cup G_k$.

为了表述方便，引入以下概念. 设 $c=\{c_1,\cdots,c_{n_i}\}\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$ 为 X_i 上的一个着色方案. 对于任两个着色方案 $c'=\{c'_1,\cdots,c'_{n_i}\}\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$ 和 $c''=\{c''_1,\cdots,c''_{n_i}\}\in\{\hat{0},\cdots,\hat{p},0,\cdots,p\}^{n_i}$，如果以下条件满足：

(1) $c_t=\hat{i}\Rightarrow b(c'_t)+b(c''_t)-l\ge i$，其中 $i\ge 0$，$l=|N_\wedge(x_i^t)|$ (图 $G[X_i]$ 中，顶点 x_i^t 的邻居且在解中的点的个数)；

(2) $c_t=i\Rightarrow b(c'_t)+b(c''_t)-l\ge i$. 其中 $i\ge 0$，$l=N_\wedge(x_i^t)$，

则称 c' 和 c'' 划分了 c.

引理 7. 对于连接节点 X_i 中的着色方案 c：$m_i(c)=\min\{m_j(c')+m_k(c'')-\#_\wedge(c)\,|\,c',c''\text{ 划分了}c\}$.

证明. 首先证明 $m_i(c)\le\min\{m_j(c')+m_k(c'')-\#_\wedge(c)\,|\,c',c''$ 划分了 $c\}$. 对于任一对划分了 c 的着色方案 c'，c''，设 D'，D'' 分别为在 c'，c'' 限制下，图 G_j 和 G_k 中大小为 $m_j(c')$ 和 $m_k(c'')$ 的完全 p-支配集. 设 $D=D'\cup D''$. 容易得知，D 是在 c 限制下，图 G_i 的一个完全 p-支配集. 因此，$m_i(c)\le|D|=m_j(c')+m_k(c'')-\#_\wedge(c)$.

下面证明 $m_i(c)\ge\min\{m_j(c')+m_k(c'')-\#_\wedge(c)\,|\,c',c''$ 划分了 $c\}$. 假设 D 为在着色方案 c 的限制下，图 G_i 中大小为 $m_i(c)$ 的完全 p-支配集. 设 $D'=D\cap V(G_j)$，$D''=D\cap V(G_k)$. 按以下方法构造包 $X_j(X_k)$ 的一个着色方案 $c^1(c^2)$：对包 $X_j(X_k)$ 中任一顶点 $x_j^t(x_k^t)$，设 i 为点 $x_j^t(x_k^t)$ 在图 $G_j(G_k)$ 上包含在 $D'(D'')$ 中的邻居个数，即 $i=|N(x_j^t)\cap D'|$ $(|N(x_k^t)\cap D''|)$，如果点 $x_j^t(x_k^t)$ 在 $D'(D'')$ 中，则 $x_j^t(x_k^t)$ 的着色 $c_t^1(c_t^2)=\hat{i}$，否则 $c_t^1(c_t^2)=i$. 根据 $m_j()$ 和 $m_k()$ 的定义可知，$|D'|\ge m_j(c^1)$，$|D''|\ge m_k(c^2)$. 容易得知，c^1，c^2 划分了 c. 综上所述，可得

$$m_i(c)=|D|=|D'|+|D''|-|D'\cap D''|\ge m_j(c^1)+m_k(c^2)-\#_\wedge(c)\ge\min\{m_j(c')+m_k(c'')-\#_\wedge(c)\,|\,c',c''\text{划分了 }c\}.$$

证毕.

按引理 7 的公式对连接节点 X_i 的动态规划表进行计算，并将指针 $p_i(c)$ 指向获得 $m_i(c)$ 值的 c' 和 c''.

步骤 3：构造最优解.

假设 r 为树分解树 T 的根. 当 r 以外的所有节点的动态规划表计算完毕，最后才计算 r 的动态规划表. 根据 r 的动态规划表，可以得到最小完全 p-支配集的大小.

引理 8. 设 r 为树分解树 T 的根，则最小完全 p-支配集的大小为 $\min\{m_r(c)\,|\,c\in\{\hat{p},p\}^{n_r}\}$.

证明. 注意到 $G_r=(V,E)=G$. 根据 $m_r()$ 的定义可得引理 8 的正确性. 证毕.

根据最优解大小 $m_r(c)$ 及各个动态规划表中设立的指针，利用回溯法即可得到最优解.

定理 4. 给定图 G 的一个树宽为 $tw(G)$ 的完美树分解 $\langle\{X_i\,|\,i\in I\},T\rangle$，则可以在 $O((2p+2)^{2\cdot tw(G)}tw(G)^3N)$ 时间内求解图 G 的最优完全 p-支配集，其中 N 为 T 中的节点个数.

证明. 树分解定义的第 1 个条件保证了原图中所有顶点均被处理. 在进行初始化及在动态规划的过程中，在给当前处理包 X_i 中某个顶点 x 分配着色 $\hat{i}$ (或 i) 时，保证了在图 G_i 中至少有 i 个顶点支配了顶点 x，即顶点 x 的着色是有效的. 根据树分解定

义的第 2 个条件，原图中任两个相邻的顶点至少出现在一个包中，从而保证了原图中任意点的着色有效性. 树分解定义的第 3 个条件保证了动态规划过程的一致性. 如果一个顶点 x 出现在两个不同的包 X_i 和 X_j 中，根据该定义，X_i 到 X_j 的路径上的所有包均包含顶点 x，由于动态规划的过程保证了两个相邻包的公共顶点的着色相容性，所以最终计算出的最优解中顶点 x 在各个包中的着色是相容的.

下面分析算法的时间复杂性. 首先考虑第 1 步的初始化. 对于任一叶节点 $i\in I$，其动态规划表 A_i 最多包含的着色方案个数是 $(2p+2)^{n_i}$（n_i 为包 X_i 的大小）. 对于每一着色方案 c，为了计算 $m_i(c)$，需要检验 c 是否有效，这需要时间 $O(n_i^3)$. 因此计算一个叶节点的动态规划表的时间为 $O((2p+2)^{n_i}n_i^3)$. 下面分析步骤 2 的时间. 设节点 $i\in I$ 为树分解树中的中间节点.（1）遗忘节点 i 动态规划表的计算时间. 显然，计算节点 i 的动态规划表的时间为 $O((2p+2)^{n_i})$.（2）引入节点 i 动态规划表的计算时间. 容易得出，计算节点 i 的动态规划表的时间为 $O((2p+2)^{n_i}n_i^3)$.（3）连接节点 i 动态规划表的计算时间. 其时间由划分了动态规划表 A_i 中着色方案 c 的着色方案对 c'，c'' 的个数决定，即 $\sum\limits_{c\in\{0,\cdots,p,\hat{0},\cdots,\hat{p}\}^{n_i}}|\{(c',c'')|c'\text{和}c''\text{划分了}c\}|$. 显然，其个数的上界为 $(2p+2)^{n_j}(2p+2)^{n_k}\le(2p+2)^{2\cdot tw(G)}$（$n_j$，$n_k$ 为 i 的两个孩子节点的包大小）. 因此，计算一个中间节点 i 的时间复杂度为 $O((2p+2)^{2\cdot tw(G)}tw(G)^3)$. 因为分解树的中间节点个数最多有 N 个，所以步骤 2 的时间复杂性为 $O((2p+2)^{2\cdot tw(G)}tw(G)^3N)$. 最后考虑步骤 3 的计算时间. 显然，步骤 3 中决定最小完全 p-支配集的大小 $m_r(c)$ 的时间复杂性为 $O((2p+2)^{n_i})$. 根据 c 及每个动态规划表中设立的指针，通过回溯法在时间 $O((2p+2)^{tw(G)}N)$ 内得到最优解. 综上所述，构造一个最优完全 p-支配集的时间为 $O((2p+2)^{2\cdot tw(G)}tw(G)^3N)$.　　证毕.

由引理 4 和定理 4 可得如下定理.

定理 5.　给定平面图上完全 p-支配集的一个实例 (G,k)，可在时间 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ 内解决完全 p-支配集问题，其中 n 为图 G 中的顶点个数，k 为问题解的大小.

证明.　算法主要由两步组成：

（1）针对平面图 G，计算一个最优的完美树分解 $\langle\{X_i|i\in I\},T\rangle$（$T$ 的节点个数 $N=O(n)$）. 如果该树分解的树宽 $tw(G)>9.546\sqrt{k}$，则图 G 上不存在大小不超过 k 的完全 p-支配集，返回“否”. 如果 $tw(G)\le9.546\sqrt{k}$，则进行下一步；

（2）基于完美树分解 $\langle\{X_i|i\in I\},T\rangle$，运用动态规划技术求解图 G 上的最优完全 p-支配集 D，如果 $|D|\le k$ 则返回 D，否则返回“否”.

以上算法的正确性可由引理 4 和定理 4 得出. 下面分析算法的时间复杂性. 计算平面图 G 的最优树分解的时间为 $O(n^3)$[27-28]. 根据引理 1，从树分解到完美树分解的转换需时间 $O(n)$. 因此步骤 1 的时间为 $O(n^3)$. 由定理 4 及 $tw(G)\le9.546\sqrt{k}$，可得步骤 2 的时间为 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n)$. 综上所述，整个算法的时间复杂度为 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$.

证毕.

6　结　论

本文主要研究了完全 p-支配集在 DG 模型及其特殊模型上的难解性根源及参数算法设计. 证明了完全 p-支配集在顶点的最大度为 3 的 UDG 上仍是 NP-难的，并进一步证明了完全 p-支配集在 UDG 上是 $W[1]$-难解的. 通过 $W[1]$-难解性的证明发现，UDG（圆盘）模型中相交圆间的距离对完全 p-支配集在 UDG 上难解性有根本性的影响：如果相交圆的圆心之间的距离大于某个常量，则完全 p-支配集在 DG 上是固定参数可解的. 基于完全 p-支配集难解性根源分析，利用树分解和动态规划技术，最后针对平面图上完全 p-支配集设计了一个时间复杂度为 $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ 的参数亚指数算法，其中 n 为给定实例中的顶点个数，k 为问题解的大小.

参 考 文 献

[1] Lu G, Zhou M, Tang Y, Wu Z, Qiu G, Yuan L. A survey of exact algorithms for dominating set related problems in arbitrary graphs. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(6): 1073-1087(in Chinese)
（路纲，周明天，唐勇，吴振强，裘国永，袁柳. 任意图支配集精确算法回顾. 计算机学报，2010，33(6)：1073-1087）

[2] Downey R G, Fellows M R. Parameterized Complexity. Springer, 1998

[3] Alber J, Fellows M R, Niedermeier R. Polynomial time data reduction for dominating set. Journal of the ACM, 2004, 51(3): 363-384

[4] Chen J, Fernau H, Kanj I A, Xia G. Parametric duality and kernelization: Lower bounds and upper bounds on kernel size. SIAM Journal on Computing, 2007, 37(4): 1077-1106

[5] Dorn F. Dynamic programming and fast matrix multiplication//Proceedings of the 14th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'06). Zurich, Switzerland, 2006: 280-291

[6] Philip G, Raman V, Sikdar S. Solving dominating set in larger classes of graphs: FPT algorithms and polynomial kernels//Proceedings of the 17th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'09). Copenhagen, Denmark, 2009: 694-705

[7] Fomin F V, Lokshtanov D, Saurabh S, Thilikos D M. Linear kernels for (connected) dominating set on H-minor-free graphs//Proceedings of the 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2012). Kyoto, Japan, 2012: 82-93

[8] Wang D, Zhang Q, Liu J. The self-protection problem in wireless sensor networks. ACM Transactions on Sensor Networks (TOSN), 2007, 3(4): 20

[9] Wang Y, Li X Y, Zhang Q. Efficient algorithms for p-self-protection problem in static wireless sensor networks. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2008, 19(10): 1426-1438

[10] Kulli V R. On n-total domination number in graphs//Proceedings of the 2nd China-USA Internal Conference in Graph Theory, Combin. Algorithm and Applications. San Francisco, USA, 1991: 319-324

[11] Cockayne E J, Dawes R M, Hedetniemi S T. Total domination in graphs. Networks, 1981, 10(3): 211-219

[12] Pfaff J, Laskar R C, Hedetniemi S T. NP-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs. Department of Mathmatics Sciences, Clemson University, South Carolina, USA: Technical Report 428, 1983

[13] Henning M A. A survey of selected recent results on total domination in graphs. Discrete mathematics, 2009, 309(1): 32-63

[14] Zhu J. Approximation for minimum total dominating set// Proceedings of the 2nd international conference on interaction sciences: information technology, culture and human. Seoul, Korea, 2009: 119-124

[15] He J, Liang H. Complexity of total $\{k\}$-domination and related problems//Proceedings of Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management (FAW-AAIM). Jinhua, China, 2011: 147-155

[16] Alber J, Niedermeier R. Improved tree decomposition based algorithms for domination-like problems//Proceedings of the 5th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'02). Cancun, Mexico, 2002: 613-628

[17] Archdeacon D, Ellis-Monaghan J, Fischer D, et al. Some remarks on domination. Journal of Graph Theory, 2004, 46 (3): 207-210

[18] Zhao W, Wang H, Xu G. Total k-domination number in graphs. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2007, 35(2): 235-242

[19] Balasundaram B, Butenko S. Optimization problems in unit-disk graphs//Floudas C A, Pardalos P M Eds. Encyclopedia of Optimization, New York: Springer, 2009: 2832-2844

[20] Clark B N, Colbourn C J, Johnson D S. Unit disk graphs. Discrete mathematics, 1990, 86(1): 165-177

[21] Jansen B. Polynomial kernels for hard problems on disk graphs//Proceedings of the 12nd Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT'10). Bergen, Norway, 2010: 310-321

[22] Koebe P. Kontaktprobleme der konformen Abbildung. Ber. Verh. Saechs. Akad. Leipzing, 1936, 88: 141-164

[23] Kloks T. Treewidth: Computations and Approximations. Germany: Springer-Verlag LNCS 842, 1994

[24] Valiant L G. Universality considerations in VLSI circuits. IEEE Transactions on Computers, 1981, 30(2): 135-140

[25] Marx D. Parameterized complexity of independence and domination on geometric graphs//Proceedings of the 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation. Zürich, Switzerland, 2006: 154-165

[26] Alber J, Fiala J. Geometric separation and exact solutions for the parameterized independent set problem on disk graphs. Journal of Algorithms, 2004, 52(2): 134-151

[27] Fomin F V, Thilikos D M. Dominating sets in planar graphs: branch-width and exponential speed-up//Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'03). Baltimore, USA, 2003: 168-177

[28] Gu Q, Tamaki H. Optimal branch-decomposition of planar graphs in $O(n^3)$ time. ACM Transactions on Algorithms, 2008, 4(3): 30: 1-13

LUO Wei-Zhong, born in 1978, Ph. D.. His research interests include parameterized computation, computer theory.

FENG Qi-Long, born in 1982, Ph. D.. His research interests include parameterized computation, computer theory.

WANG Jian-Xin, born in 1969, Ph. D., professor. His research interests include computer algorithm, network optimization, bioinformatics.

CHEN Jian-Er, born in 1954, Ph. D., professor. His research interests include computational biology, computer theory, computational complexity and optimization.

Background

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China under Grants (61232001, 61103033, 61173051) which focus on the development of parameterized algorithms, Kernelization for NP-hard problems in practice, and the design of parameterized algorithms for graph modification problems, and the Postdoc Foundation of Central South University. Under these projects, we mainly study the parameterized complexity and parameterized algorithms for NP-hard problems in wireless networks. Until now, we have developed parameterized algorithms for several classical NP-hard problems in wireless sensor networks, such as Min-power Multicast, Connected Dominating Set, and Max-lifetime Target Coverage.

Parameterized complexity is an important branch of computational complexity theory and is aimed at practically solving a large number of computational problems that are theoretically intractable. Total p-Dominating Set is a famous NP-hard problem, which has important applications in wireless networks. The problem has been extensively studied from the viewpoint of approximation, heuristic, etc. By way of contrast, the study of exact algorithms for it is much less developed. On the other hand, disk graphs and unit disk graphs have important applications in wireless communication. In this work, the authors investigate the parameterized complexity and parameterized exact algorithms for Total p-Dominating Set in disk graphs and unit disk graphs. The authors show that Total p-Dominating Set remains NP-hard in unit disk graphs with vertex degree bounded by three. They further prove that Total p-Dominating Set is fixed parameter intractable in unit disk graphs, but is fixed parameter tractable in the more restricted class of disk graphs where the centers of the disks are at mutual distance at least some constant c. Finally, a subexponential parameterized algorithm running in time $O((2p+2)^{19.1\cdot\sqrt{k}}k^3n+n^3)$ is given for Total p-Dominating Set in planar graphs (a restricted class of disk graphs), where n denotes the number of vertices in the given instance, and k is the size of problem solution. To the best of our knowledge, this is the first parameterized algorithm for Total p-Dominating Set.