第35卷 第7期
2012年7月

计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

Vol. 35 No. 7
July 2012

模糊知识的三种否定及其集合基础

潘正华

(江南大学理学院 江苏 无锡 214122)

摘 要 对于模糊知识中“否定”的认知与处理,文中从概念层面上区分模糊知识中的矛盾否定关系与对立否定关系,研究发现了模糊知识中存在一规律:一对对立的概念为模糊概念,则它们之间必然存在“中介”的模糊概念;反之,如果一对对立的概念之间存在中介的模糊概念,则对立的概念必然是模糊概念.因此,作者提出在模糊知识的否定关系中存在三种不同的否定关系,即矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系,并给出它们的形式定义.为了能够刻画这些关系的内在性质与联系,作者提出了一种新的具有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集FSCOM,并讨论了FSCOM的特征、FSCOM的基本运算与性质以及FSCOM与Zadeh模糊集的关系等.在后续文中将表明,FSCOM是一种处理实际中的模糊知识及其各种否定的有效方法.

关键词 模糊知识;模糊集;矛盾否定关系;对立否定关系;中介否定关系

中图法分类号 TP301 **DOI号**:10.3724/SP.J.1016.2012.01421

Three Kinds of Negation of Fuzzy Knowledge and Their Base of Set

PAN Zheng-Hua

(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu* 214122)

Abstract Negative relation in fuzzy knowledge is differentiated as contradictory negative relation and opposite negative relation in this paper, and a character of fuzzy knowledge is discovered: If two opposite concepts are fuzzy concepts then must exist a “medium” fuzzy concept between them, contrarily if there is medium fuzzy concept between the two concepts then two concepts must be fuzzy concepts. We thus propose that negative relations in fuzzy knowledge included contradictory, opposite and medium negative relation. In order to describe intrinsic properties of these relations, we define a new fuzzy set FSCOM with contradictory negation, opposite negation and medium negation, discuss that characteristics of FSCOM, operations and their properties in FSCOM, as well as relationship with Zadeh' fuzzy set and so on. In next paper which will shows that FSCOM is an effective method for handling the various negations of fuzzy information.

Keywords fuzzy knowledge; fuzzy sets; contradictory negative relation; opposite negative relation; medium negative relation

1 引 言

知识的否定在知识处理中、尤其在模糊知识处理中扮演了重要角色.随着知识研究的发展,对于模糊知识中“否定”的认知与研究,近年来一些学者主张知识处理需要不同的否定.Wagner等人认为,从逻辑观点看,在知识推理、自然语言、逻辑程序设计(Prolog)、语义网(Semantic Web)、数据库查询语言SQL以及产生式规则系统(如CLIPS和Jess)等

收稿日期:2010-03-16;最终修改稿收到日期:2011-05-21.本课题得到国家自然科学基金(60973156)和江南大学创新研究团队计划资助.
潘正华,男,1957年生,教授,中国计算机学会(CCF)高级会员,主要研究领域为知识表示与知识推理、经典逻辑与非经典逻辑等.E-mail:pan_zhenghua@163.com.

领域中，否定是一个非清晰的概念，并提出在所有这些计算信息处理系统中要区分强否定（strong negation）和弱否定（weak negation），强否定表示明确的假（explicit falsity），弱否定表示非-真（non-truth）[1-7]．2006 年，Ferré[8]提出一种认识的扩充，区分否定中的外延否定和内涵否定，既将基于模态逻辑 AIK（All I Know）的一种逻辑转化运用于逻辑概念分析 LCA（Logical Concept Analysis）框架中，而且这种认识的扩充不需失去 LCA 的普遍性．2007 年，Kaneiwa 主张在描述逻辑中区分两种否定，提出一个带有经典否定和强否定扩展的描述逻辑 $ALC_{\sim}$，$ALC_{\sim}$ 中用经典否定（如 not happy）和强否定（如 unhappy）描述 contraries，contradictories 以及 subcontraries 等概念，并期望将这些概念形式化后能够提供一个改进的适合解释经典否定与强否定以及各种结合的语义，从而表明这种语义对 $ALC_{\sim}$ 中的概念保持矛盾性（contradictoriness）和反对性（contrariness）[9]．2006 年，潘正华等人从概念层面上提出在知识处理中区分知识的矛盾关系和对立关系，研究指出了清晰性知识和模糊性知识中存在五种矛盾否定关系与对立否定关系，对这五种关系给出一种逻辑描述，并运用在知识表示与知识推理中[10-14]．

对于模糊知识的否定的认知，本文研究并提出模糊知识中存在三种否定关系既“矛盾”否定关系、“对立”否定关系和“中介”否定关系，给出了三种否定关系的形式定义．为了能够刻画这些关系的内在性质与联系，进一步研究了它们的集合基础，定义了一种新的具有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集 FSCOM，讨论了 FSCOM 的特征、FSCOM 的一些基本运算及其性质以及与 Zadeh 模糊集的关系等．

2 模糊概念中的各种否定关系

在知识中，概念是知识构成的基本成分，是一种元知识．在形式逻辑中，概念之间的关系是指概念外延的关系，它区分为相容关系和不相容关系．概念 A 与 B 之间的不相容关系，是指 A 与 B 两个概念的外延（外延用一个矩形框表示）之间没有任何一部分重合的关系（图 1）．例如：“白”与“非白”，“青年”与“老年”，“导体”与“绝缘体”等等．

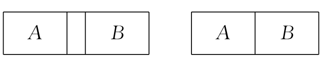

图 1　不相容概念 A 与 B 的外延没有重合部分

自 Aristotle 以来，形式逻辑将概念的不相容关系区分为矛盾关系和对立关系．概念的矛盾关系，是指在同一个属概念下的两个种概念之间的不相容关系，它们的外延互相排斥，外延之和等于属概念的外延；概念的对立关系，是指在同一个属概念之下的两个种概念之间的不相容关系，它们的外延互相排斥，外延之和小于属概念的外延．一个概念与其“否定”之间的关系就是一种不相容关系，因而，一个概念与其否定概念之间的关系包括了矛盾否定关系和对立否定关系．

概念的模糊性，即是概念在外延上的不分明性．对于一个模糊概念与其否定的关系，我们认为存在下列三种情形．

2.1 模糊概念中的三种否定关系

（1）模糊概念中的矛盾否定关系 CFC（Contradictory negative relation in Fuzzy Concepts）

关系特征：“外延界限不分明，非此即彼”．

例如：属概念“人”下的种概念“青年人”与“非青年人”的关系，属概念“速度”下的种概念“快”与“不快”的关系等（图 2）．

图 2　模糊概念“青年”与其矛盾否定“非青年”的外延关系

（2）模糊概念中的对立否定关系 OFC（Opposite negative relation in Fuzzy Concepts）

关系特征：“外延界限不分明，不非此即彼”．

例如：属概念“人”下的种概念“青年人”与“老年人”的关系，属概念“速度”下的种概念“快”与“慢”的关系等（图 3）．

图 3　模糊概念“青年”与其对立否定“老年”的外延关系

在现实世界的各种知识中，许多对立的概念之间存在具有“中介”特征的概念．所谓对立概念之间的中介概念，即指在同一个属概念下，两个对立的种概念之间呈现出“过渡状态”的另一个种概念．对于对立的模糊概念，通过对大量的客观实例进行研究后我们发现，对立的模糊概念中存在如下规律：

“如果一对对立概念为模糊概念，则对立概念之间必然存在中介的模糊概念；反之，如果一对对立概念之间存在中介的模糊概念，则对立概念一定是模糊概念．换言之，对立概念之间存在中介的模糊概念，当且仅当对立概念为模糊概念”．

这种存在于对立的模糊概念之间的中介模糊概念，从它的内涵和外延可知，它与对立的模糊概念的关系是一种否定关系. 对此我们称为“中介”否定关系.

(3) 模糊概念中的中介否定关系 MFC(Medium negative relation in Fuzzy Concepts)

关系特征：“外延界限不分明，彼与此的中介”.

例如：“中年人”是对立概念“青年人”与“老年人”之间的中介概念，中年人与青年人(或老年人)之间的关系是中介否定关系；“黄昏”或“黎明”是对立概念“白昼”与“黑夜”之间的中介概念，黄昏(或黎明)与白昼(或黑夜)之间的关系是中介否定关系；“半导体”是“导体”与“绝缘体”之间的中介概念，半导体与导体(或绝缘体)之间的关系是中介否定关系等(图 4).

图 4　对立的模糊概念“青年”和“老年”与其中介否定“中年”的外延关系

因而我们提出，在模糊概念中存在三种不同的否定关系，即矛盾否定关系 CFC、对立否定关系 OFC 和中介否定关系 MFC.

2.2　模糊概念中的三种否定关系的形式定义

既然外延为概念所反映的对象范围、概念之间的关系为概念外延的关系，因而从概念的外延角度，可给出 CFC、OFC 和 MFC 的形式定义.

定义 1.　设 $U(\neq\varnothing)$ 为论域(对象域)，$X(X\subseteq U)$ 为关于 U 中对象的一个概念. 对于任何 X，若存在一个划分 $\xi:\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$X_i\subseteq X$，$X_i\neq\varnothing$，$\bigcup_{i=1}^{n}X_i=X$，则称 X 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的属概念，$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 X 的种概念；其中，若 $X_i\cap X_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称种概念 X_i，X_j 为清晰概念，若 $X_i\cap X_j\neq\varnothing$，则称种概念 X_i，X_j 为模糊概念.

由于任何一对具有矛盾否定关系的概念和一对具有对立否定关系的概念，都是同一个属概念下的一对种概念，所以，CFC 和 OFC 分别是同一个属概念下的两个种概念之间的关系. 由上述定义可知，它们应分别是 $X\times X$ 上的二元关系，即 $X\times X$ 的不同子集. 因此，对于 CFC 和 OFC 的形式表达，可定义如下.

定义 2.　设一个属概念为 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，其中 A_i 为 A 的种概念. 对于一个 $A_i(i\in\{1,2,\cdots,n\})$，若存在 A 的种概念 A_j 和 $A_k(A_j\neq A_k\neq A_i)$，A_i、A_j 和 A_k 是模糊概念，并且 A_i 与 A_j 具有矛盾否定关系，A_i 与 A_k 具有对立否定关系，则

$$\mathrm{CFC}=\{(A_i,A_j)\mid A_i\neq A_j,A_i\cap A_j\neq\varnothing,\ A_i\cup A_j=A\}\subset A\times A;$$

$$\mathrm{OFC}=\{(A_i,A_k)\mid A_i\neq A_k,A_i\neq A_j,A_k\neq A_j,\ A_i\cap A_k\neq\varnothing,A_i\cup A_k\subseteq A\}\subset A\times A.$$

我们已知，当对立否定概念是模糊概念时，它们之间存在中介(否定)概念. 因此，一对对立否定的模糊概念与其中介否定的关系 MFC 应是 $(X\times X)\times X$ 的一个子集.

定义 3.　设一个属概念 $B=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，B_i 是 B 的种概念. 若 $B_i,B_j\subseteq B(i\neq j)$ 是具有对立否定关系的模糊概念，则存在 $B_m\subseteq B(m\neq i,m\neq j)$，有

$$\mathrm{MFC}=\{((B_i,B_j),B_m)\mid B_i\neq B_j,B_i\cap B_m\neq\varnothing,\ B_j\cap B_m\neq\varnothing,B_i\cup B_j\cup B_m\subseteq B\}\subset (B\times B)\times B.$$

由以上定义，容易证明 CFC、OFC 和 MFC 具有如下性质：

(1) CFC、OFC 和 MFC 互不相同；

(2) CFC、OFC 具有对称性，不具有自反性、传递性；

(3) MFC 不具有对称性、自反性、传递性.

3　模糊知识及其三种否定的一种集合基础

集合及其方法，是从数学角度描述知识及其规律的最基本的抽象概念和手段. 如何对模糊概念及其三种不同否定关系 CFC、OFC 和 MFC 进行刻画，我们提出如下一种新的模糊集.

3.1　区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集 FSCOM

定义 4[15]**.**　设 U 是论域. 映射

$$\Psi_A:U\to[0,1]$$

确定了 U 上的模糊子集 A. 映射 Ψ_A 称为 A 的隶属函数，$\Psi_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属程度(简称隶属度)，记为 $A(x)$.

定义 5.　设 A 是 U 上的模糊子集，$\lambda\in(0,1)$.

(1) 映射

$$\Psi^{\neg}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$$

若满足 $\Psi^{\urcorner}(A(x))=1-A(x)$，则映射 $\Psi^{\urcorner}$ 确定了 U 上的一模糊子集，记作 $A^{\urcorner}$，$A^{\urcorner}(x)=\Psi^{\urcorner}(A(x))$. $A^{\urcorner}$ 称为 A 的对立否定集.

(2) 映射

$$\Psi^{\sim}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$$

若满足

$$\Psi^{\sim}(A(x))=\begin{cases}\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(A(x)-\lambda)+1-\lambda, & \lambda\in[1/2,1)\text{且}A(x)\in(\lambda,1] & (1)\\ \dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}A(x)+1-\lambda, & \lambda\in[1/2,1)\text{且}A(x)\in[0,1-\lambda) & (2)\\ \dfrac{1-2\lambda}{\lambda}A(x)+\lambda, & \lambda\in(0,1/2]\text{且}A(x)\in[0,\lambda) & (3)\\ \dfrac{1-2\lambda}{\lambda}(A(x)+\lambda-1)+\lambda, & \lambda\in(0,1/2]\text{且}A(x)\in(1-\lambda,1] & (4)\\ A(x), & \text{其它} & (5)\end{cases}$$

则映射 $\Psi^{\sim}$ 确定了 U 上的一模糊子集，记作 $A^{\sim}$，$A^{\sim}(x)=\Psi^{\sim}(A(x))$. $A^{\sim}$ 称为 A 的中介否定集.

(3) 映射

$$\Psi^{\neg}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$$

若满足 $\Psi^{\neg}(A(x))=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))$，则 $\Psi^{\neg}$ 确定了 U 上的一模糊子集，记作 $A^{\neg}$，$A^{\neg}(x)=\Psi^{\neg}(A(x))$. $A^{\neg}$ 称为 A 的矛盾否定集.

以上定义的论域 U 上的模糊子集，称为"区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集"，简记为 FSCOM（Fuzzy Sets with Contradictory negation, Opposite negation and Medium negation).

3.2 FSCOM 的特征

由 FSCOM 的定义可看出，在 FSCOM 中，模糊集 A 与 A 的对立否定集 $A^{\urcorner}$、中介否定集 $A^{\sim}$ 以及矛盾否定集 $A^{\neg}$ 具有如下关系及特点：

(1) 对于任意的 $x\in U$，$A(x)$，$A^{\urcorner}(x)$，$A^{\sim}(x)$，$A^{\neg}(x)\in[0,1]$；

(2) 矛盾否定由对立否定和中介否定确定，即 $A^{\neg}(x)=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))$；

(3) 由于 λ 是可变的，所以 λ 的大小以及变化，决定了 x 对 A、$A^{\urcorner}$ 和 $A^{\sim}$ 的隶属度 $A(x)$、$A^{\urcorner}(x)$ 和 $A^{\sim}(x)$ 的取值范围的大小和变化. 其中

当 $\lambda\geq 1/2$ 时，$A(x)\in(\lambda,1]$，或 $A(x)\in[0,1-\lambda)$. 其中，若 $A(x)\in(\lambda,1]$，则有 $A^{\sim}(x)\in[1-\lambda,\lambda]$ 与 $A^{\urcorner}(x)\in[0,1-\lambda)$，若 $A(x)\in[0,1-\lambda)$，则有 $A^{\sim}(x)\in[1-\lambda,\lambda]$ 与 $A^{\urcorner}(x)\in(\lambda,1]$；

当 $\lambda\leq 1/2$ 时，$A(x)\in(1-\lambda,1]$，或 $A(x)\in[0,\lambda)$. 其中，若 $A(x)\in(1-\lambda,1]$，则有 $A^{\sim}(x)[\lambda,1-\lambda]$ 与 $A^{\urcorner}(x)\in[0,\lambda)$，若 $A(x)\in[0,\lambda)$，则有 $A^{\sim}(x)\in[\lambda,1-\lambda]$ 与 $A^{\urcorner}(x)\in(1-\lambda,1]$；

关于 $A(x)$、$A^{\urcorner}(x)$ 和 $A^{\sim}(x)$ 之间的关系，可用图 5、图 6 描述（图中符号"•"与"∘"分别表示一个区间的闭端点和开端点）.

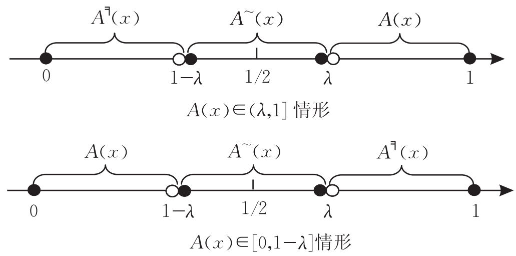

图 5 当 $\lambda\geq 1/2$ 时，$A(x)$，$A^{\urcorner}(x)$，$A^{\sim}(x)$ 在 $[0,1]$ 中的关系

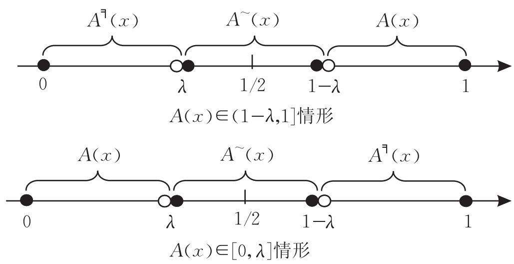

图 6 当 $\lambda\leq 1/2$ 时，$A(x)$，$A^{\urcorner}(x)$，$A^{\sim}(x)$ 在 $[0,1]$ 中的关系

由 FSCOM 的定义，容易验证 FSCOM 具有下列性质.

命题 1. 设 A 是一个 FSCOM 模糊集. 则
$A(x)\geq A^{\sim}(x)\geq A^{\urcorner}(x)$，当且仅当 $A(x)\in(\lambda,1]$，
$A^{\urcorner}(x)\geq A^{\sim}(x)\geq A(x)$，当且仅当 $A(x)\in[0,1-\lambda)$.

由于当 $A(x)\geq A^{\sim}(x)$ 时，$A^{\sim}(x)\geq A^{\urcorner}(x)$；当 $A^{\sim}(x)\geq A(x)$ 时，$A^{\urcorner}(x)\geq A^{\sim}(x)$，所以，有如下命题.

命题 2. 设 A 是一个 FSCOM 模糊集. 则
$A(x)>A^{\sim}(x)>A^{\urcorner}(x)$，或者 $A^{\urcorner}(x)\geq A^{\sim}(x)\geq A(x)$.

在 FSCOM 中，因为 $a\leq b$（$a,b\in[0,1]$）时，$\Psi^{\urcorner}(a)\geq\Psi^{\urcorner}(b)$，$\Psi^{\sim}(a)\leq\Psi^{\sim}(b)$，所以，FSCOM 具有如下性质.

命题 3. 在 FSCOM 中，$\Psi^{\urcorner}$ 是减函数，$\Psi^{\sim}$ 是增函数.

3.3　FScom 与 Zadeh 模糊集的关系比较

在现有的能够刻画事物模糊性的集合论中，有 Zadeh[15] 模糊集 FS 以及随着模糊知识处理技术的发展而出现的 FS 的各种扩展[16]，如直觉模糊集 (Intuitionistic Fuzzy Sets)[17]、区间值模糊集 (Interval valued fuzzy sets)[18]、Vague 集[19] 和粗糙集(Rough Sets)[20]，我们认为这些集合论关于否定的认识思想与传统集合一样，它们都只有一种否定即矛盾否定，只是否定的定义形式不同，没有区分模糊性事物之间的矛盾关系与对立关系. 因此，这些集合理论不具有区分、表达模糊概念中的矛盾否定、对立否定以及中介否定的能力. 对此，我们可作以下归纳比较(表 1).

表 1　关于模糊概念 A 的否定的各种认知思想与表示

认知思想	A 的否定 1	A 的否定 2	A 的其它否定
传统集合	矛盾否定：$\neg A$	×	×
模糊集	矛盾否定：$\bar{A}$	×	×
直觉模糊集	矛盾否定：$-A$	×	×
粗糙集	矛盾否定：$-A$	×	×
Wagner G	弱否定：$-A$	强否定：$\sim A$	×
Ferré S	外延否定：$\neg A$	内涵否定：mal-A	×
Kaneiwa K	经典否定：$\neg A$	强否定：$\sim A$	×
FScom	矛盾否定：$A^{\neg}$	对立否定：$A^{\urcorner}$	A 与 $A^{\urcorner}$ 的中介否定：$A^{\sim}$

在 FScom 中，一个模糊集 A 的否定区分为矛盾否定 $A^{\neg}$、对立否定 $A^{\urcorner}$ 以及中介否定 $A^{\sim}$. 在 Zadeh 模糊集中，A 的(矛盾)否定定义为 $\bar{A}(x)=1-A(x)$. 由 FScom 的定义和 Zadeh 模糊集定义可知，Zadeh 模糊集中 A 的否定在 FScom 中由对立否定和中介否定共同确定：$A^{\neg}(x)=\max(A^{\urcorner}(x), A^{\sim}(x))$. 由 FScom 定义和命题 2 可知，当 $A(x)<1/2$ 时，$A^{\neg}(x)=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))=A^{\urcorner}(x)$，即对立否定与矛盾否定相同；当 $A(x)>1/2$ 时，$A^{\neg}(x)=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))=A^{\sim}(x)$，即中介否定与矛盾否定相同；当 $A(x)=1/2$ 时，$A^{\neg}(x)=A^{\urcorner}(x)=A^{\sim}(x)=1/2$，即矛盾否定、对立否定和中介否定三者相同. 因而，FScom 中的对立否定和中介否定与 Zadeh 模糊集中否定的关系如下.

命题 4.　设 A 是一个模糊集.

当 $A(x)<1/2$ 时，FScom 模糊集 A 的对立否定 $A^{\urcorner}$ 与 Zadeh 模糊集 A 的否定 $A^{\neg}$ 相同；

当 $A(x)>1/2$ 时，FScom 模糊集 A 的中介否定 $A^{\sim}$ 与 Zadeh 模糊集 A 的否定 $A^{\neg}$ 相同；

当 $A(x)=1/2$ 时，FScom 模糊集 A 的对立否定 $A^{\urcorner}$、中介否定 $A^{\sim}$ 与 Zadeh 模糊集 A 的否定 $A^{\neg}$ 三者相同.

3.4　FScom 的运算及其性质

定义 6.　设 A,B 是 FScom 模糊集 $\forall x\in U$

$A\subseteq B$，当且仅当 $A(x)\le B(x)$；

$A=B$，当且仅当 $A(x)=B(x)$.

定义 7.　设 A,B 是 FScom 模糊集. 称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的并集，$A\cap B$ 为 A 与 B 的交集，若

$(A\cup B)(x)=\max(A(x),B(x))$；

$(A\cap B)(x)=\min(A(x),B(x))$.

根据以上定义，易证下列性质.

性质 1.　设 A,B 是 FScom 模糊集. 则

(1) 幂等律. $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(2) 交换律. $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) 吸收律. $A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$；

(5) 分配律. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(6) 0-1 律. $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$U\cup A=U$，$U\cap A=A$.

证明.　只证(5)，其余同理可证.

(5) 因 $(A\cup(B\cap C))(x)=\max(A(x),\min(B(x),C(x)))$，$((A\cup B)\cap(A\cup C))(x)=\min(\max(A(x),B(x)),\max(A(x),C(x)))$，其中

若 $A(x)>\max(B(x),C(x))$，则 $(A\cup(B\cap C))(x)=((A\cup B)\cap(A\cup C))(x)=A(x)$；

若 $A(x)\le\max(B(x),C(x))$，则存在两种情形：① 当 $B(x)>C(x)$ 时，有 $(A\cup(B\cap C))(x)=\max(A(x),C(x))$，$((A\cup B)\cap(A\cup C))(x)=\min(B(x),\max(A(x),C(x)))=\max(A(x),C(x))$；② 当 $B(x)\le C(x)$ 时，有 $(A\cup(B\cap C))(x)=\max(A(x),B(x))$，$((A\cup B)\cap(A\cup C))(x)=\min(\max(A(x),B(x)),C(x))=\max(A(x),B(x))$；即当①和②时，均有 $(A\cup(B\cap C))(x)=((A\cup B)\cap(A\cup C))(x)$.

所以，根据定义 6，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 同理，可证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证毕.

性质 2.　设 A,B 和 C 是 FScom 模糊集. 则

(1) $A^{\urcorner\urcorner}=A$；

(2) $A^{\sim}=A^{\urcorner\sim}$；

(3) $A^{\neg}=A^{\urcorner}\cup A^{\sim}$；

(4) $A^{\sim}=A^{\neg}\cap A^{\urcorner\neg}$；

(5) $A^{\urcorner\neg}=A\cup A^{\sim}$；

(6) $(A\cup B)^{\urcorner}=A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner}$；

(7) $(A\cap B)^{\urcorner}=A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner}$.

证明.

(1) 由 FScom 定义,$A^{\urcorner\urcorner}(x)=1-A^{\urcorner}(x)=1-(1-A(x))=A(x)$,所以,$A^{\urcorner\urcorner}=A$ 得证.

(2) 如果 $A^{\sim}(x)>A^{\urcorner\sim}(x)$,则 $(A^{\urcorner})^{\sim}(x)>(A^{\urcorner})^{\urcorner\sim}(x)=A^{\urcorner\urcorner\sim}(x)$,因 $A^{\urcorner\urcorner}=A$,所以 $A^{\urcorner\sim}(x)>A^{\sim}(x)$;反之,如果 $A^{\sim}(x)<A^{\urcorner\sim}(x)$,则 $(A^{\urcorner})^{\sim}(x)<(A^{\urcorner})^{\urcorner\sim}(x)=A^{\urcorner\urcorner\sim}(x)$,即 $A^{\urcorner\sim}(x)<A^{\sim}(x)$;因此,有 $A^{\sim}(x)=A^{\urcorner\sim}(x)$. 由定义 6,$A^{\urcorner\urcorner}=A$ 得证.

(3) 根据 FScom 定义与定义 7,$A^{\neg}(x)=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))=(A^{\urcorner}\cup A^{\sim})(x)$,由定义 6,$A^{\neg}=A^{\urcorner}\cup A^{\sim}$ 得证.

(4) 由定义 7 和 FScom 定义,$(A^{\neg}\cap A^{\urcorner\neg})(x)=\min(A^{\neg}(x),A^{\urcorner\neg}(x))=\min(\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x)),\max(A^{\urcorner\urcorner}(x),A^{\urcorner\sim}(x)))=\min(\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x)),\max(A(x),A^{\sim}(x)))$. 其中,若 $A(x)>A^{\sim}(x)$,根据命题 2,则有 $A^{\sim}(x)>A^{\urcorner}(x)$,所以,$(A^{\neg}\cap A^{\urcorner\neg})(x)=A^{\sim}(x)$;若 $A(x)\le A^{\sim}(x)$,根据命题 2,则有 $A^{\sim}(x)<A^{\urcorner}(x)$,所以,$(A^{\neg}\cap A^{\urcorner\neg})(x)=A^{\sim}(x)$. 由定义 6,$A^{\sim}=A^{\neg}\cap A^{\urcorner\neg}$ 得证.

(5) 由(3),$A^{\neg}=A^{\urcorner}\cup A^{\sim}$,有 $A^{\urcorner\neg}=A^{\urcorner\urcorner}\cup A^{\urcorner\sim}$;再由(1)和(2),得 $A^{\urcorner\neg}=A\cup A^{\sim}$.

(6) 根据 FScom 定义,$(A\cup B)^{\urcorner}(x)=1-(A\cup B)(x)=1-\max(A(x),B(x))$,$(A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner})(x)=\min(1-A(x),1-B(x))$. 其中,若 $A(x)\ge B(x)$,则有 $(A\cup B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner})(x)=1-A(x)$;若 $A(x)<B(x)$,则有 $(A\cup B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner})(x)=1-B(x)$;所以,$(A\cup B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner})(x)$. 由定义 6,$(A\cup B)^{\urcorner}=A^{\urcorner}\cap B^{\urcorner}$ 得证.

(7) 根据 FScom 定义,$(A\cap B)^{\urcorner}(x)=1-(A\cap B)(x)=1-\min(A(x),B(x))$,$(A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner})(x)=\max(1-A(x),1-B(x))$. 其中,若 $A(x)\ge B(x)$,则有 $(A\cap B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner})(x)=1-B(x)$;若 $A(x)<B(x)$,则有 $(A\cap B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner})(x)=1-A(x)$;所以,$(A\cap B)^{\urcorner}(x)=(A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner})(x)$. 由定义 6,$(A\cap B)^{\urcorner}=A^{\urcorner}\cup B^{\urcorner}$ 得证. 证毕.

性质 3. 设 A,B 是 FScom 模糊集. 则

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow B^{\urcorner}\subseteq A^{\urcorner}$;

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A^{\sim}\subseteq B^{\sim}$;

(3) $A^{\sim}\subseteq B^{\sim}\Leftrightarrow A^{\sim\sim}\subseteq B^{\sim\sim}$;

(4) $A\subseteq B^{\urcorner}\Leftrightarrow B\subseteq A^{\urcorner}$;

(5) $A^{\urcorner}\subseteq B\Leftrightarrow B^{\urcorner}\subseteq A$.

证明.

(1) 若 $A\subseteq B$,由定义 6,有 $A(x)\le B(x)$,即 $1-B(x)\le 1-A(x)$. 据定义 5,则有 $B^{\urcorner}(x)\le A^{\urcorner}(x)$,即 $B^{\urcorner}\subseteq A^{\urcorner}$. 反之,同理可证.

(2) 若 $A\subseteq B$,由定义 6,有 $A(x)\le B(x)$. 据命题 3,$\Psi^{\sim}$ 是增函数,故 $\Psi^{\sim}(A(x))\le\Psi^{\sim}(B(x))$,即 $A^{\sim}(x)\le B^{\sim}(x)$(据定义 5),由定义 6,则 $A^{\sim}\subseteq B^{\sim}$. 反之,同理可证.

(3) 若 $A^{\sim}\subseteq B^{\sim}$,由定义 6,$\Psi^{\sim}(A(x))\le\Psi^{\sim}(B(x))$. 因 $\Psi^{\sim}$ 有正序性(据命题 3),故 $\Psi^{\sim}(\Psi^{\sim}(A(x)))\le\Psi^{\sim}(\Psi^{\sim}(B(x)))$,即 $A^{\sim\sim}\subseteq B^{\sim\sim}$.

(4) 若 $A\subseteq B^{\urcorner}$,由定义 6,有 $A(x)\le B^{\urcorner}(x)$,即 $A(x)\le 1-B(x)$. 故 $B(x)\le 1-A(x)$,即 $B(x)\le A^{\urcorner}(x)$. 由定义 6,有 $B\subseteq A^{\urcorner}$. 反之,同理可证.

(5) 同(4)证可得. 证毕.

由定义 7,易证 FScom 具有下列结论.

性质 4. 设 A 是一个 FScom 模糊集,$\Delta,\nabla\in\{\urcorner,\sim,\neg\}$. 则

$$A\cup A^{\Delta}=U,\ A\cup A^{\nabla}=U,\ A^{\Delta}\cup A^{\nabla}=U,$$
$$A\cap A^{\Delta}=\varnothing,\ A\cap A^{\nabla}=\varnothing,\ A^{\Delta}\cap A^{\nabla}=\varnothing$$

都不成立.

性质 4 表明,在 FScom 中,排中律和矛盾律都不成立.

4 应 用

为了表明 FScom 处理客观实际问题的适用性,我们研究了 FScom 在模糊决策、模式识别中的应用[21-23]. 在文献[21-22]中,针对长江三角洲区域收入高(低)和存款多(少)者(人、家庭)的投资决策实例,运用 FScom 研究投资决策中的模糊知识及其不同否定的表达、推理与实现,并比较了 FScom 与 Zadeh 模糊集和直觉模糊集在该实例中的应用效果. 文献[23]中提出了 FScom 的模糊度,贴近度,距离贴近度和格贴近度定义,并讨论了在模式识别实例中的应用.

5 结 论

(1) 对于模糊知识中"否定"的认知与研究,本文提出区分模糊知识中的矛盾否定关系与对立否定关系的思想. 由此发现了对立的模糊知识中存在一规律:如果一对对立的概念为模糊概念,则它们之间必然存在中介的模糊概念,反之,如果一对对立的概念之间存在中介的模糊概念,则对立的概念必然是

模糊概念.

(2)基于以上认识,从概念层面上确立了模糊知识中存在的3种不同的否定关系,即矛盾否定关系CFC、对立否定关系OFC以及中介否定关系MFC,并给出了它们的形式定义.

(3)为了对模糊知识与其3种不同否定关系的内在性质和联系予以描述,定义了一种新的能够完全刻画模糊知识与其矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集FScom,并研究了它具有的特征、运算和性质以及与Zadeh模糊集的关系等.

参 考 文 献

[1] Wagner G. A database needs two kinds of negation//Lecture Notes in Computer Science 495. Springer, 1991: 357-371

[2] Wagner G. Web rules need two kinds of negation//Lecture Notes in Computer Science 2901. Springer, 2003: 33-50

[3] Analyti A, Antoniou G, Damasio C V, Wagner G. Negation and negative information in the W3C resource description framework. Annals of Mathematics, Computing & Teleinformatics, 2004, 1(2): 25-34

[4] Minker J, Ruiz C. Semantics for disjunctive logic programs with explicit and default negation. Fundamenta Informaticae, 1994, 20(3/4): 145-192

[5] Dung P M, Mancarella P. Production systems need negation as failure. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2002, 14(2): 336-353

[6] Beeson M, Veroff R, Wos L. Double-negation elimination in some propositional logics. Studia Logica, 2005, 80(2/3): 195-234

[7] Vakarelov D. Nelson's negation on the base of weaker versions of intuitionistic negation. Studia Logica, 2005, 80(2/3): 393-430

[8] Ferré S. Negation, opposition, and possibility in logical concept analysis//Lecture Notes in Artificial Intelligence 3874. Springer, 2006: 130-145

[9] Kaneiwa K. Description logic with contraries, contradictories, and subcontraries. New Generation Computing, 2007, 25(4): 443-468

[10] Pan Zhenghua, Zhu Wujia. A new cognition and processing on contradictory knowledge//Proceedings of the IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Qingdao, 2006, 3: 1532-1537

[11] Pan Zhenghua, Zhang Shengli. Five kinds of contradictory relations and opposite relations in inconsistent knowledge//Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD'07). Shanghai, 2007, 4: 761-764

[12] Pan Zhenghua, Zhang Shengli. Differentiation and processing on contradictory relation and opposite relation in knowledge//Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Natural Computation (ICNC'07). Shanghai, 2007, 4: 334-338

[13] Pan Zhenghua. A logic description on different negation relation in knowledge. Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5227: 815-823

[14] Wang Cen, Pan Zhenghua. Searching method of fuzzy knowledge reasoning based medium logic//Lecture Notes in Computer Science 5227. Springer, 2008: 401-409

[15] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353

[16] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96

[17] Yager R R. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 39-75

[18] Gau Wen-Lung, Buehrer D J. Vague sets. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614

[19] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356

[20] Lei Ying-Jie, Sun Jin-Ping, Wang Bao-Shu. Some extension of fuzzy knowledge processing and fuzzy sets. Journal of Air Force Engineering University, 2004, 5(3): 40-44 (in Chinese)
(雷英杰，孙金萍，王宝树. 模糊知识处理与模糊集理论的若干拓展. 空军工程大学学报，2004，5(3)：40-44)

[21] Pan Zhenghua, Zhang Lijuan. A new fuzzy set with three kinds of negations and applications to decision making in financial investment. Journal of Human and Ecological Risk Assessment, 2011, 17(4): 795-780

[22] Xu Jiang, Pan Zhenghua. Representation and reasoning of fuzzy knowledge with its different negations in financial investment decision making. Computer Applications and Software, 2011, 28(3): 37-40 (in Chinese)
(徐江，潘正华. 金融投资决策中的模糊知识及其不同否定的表示与推理. 计算机应用与软件，2011，28(3)：37-40)

[23] Yang Lei, Pan Zhenghua. Fuzzy degree, closeness degree and applications of fuzzy set with three kinds of negations. Computer Applications and Software, 2011, 29(1): 51-59 (in Chinese)
(杨磊，潘正华. 具有三种否定的模糊集FSCOM的模糊度与贴近度及其应用. 计算机应用与软件，2011，29(1)：51-59)

PAN Zheng-Hua, born in 1957, professor. His research interests include knowledge representation and knowledge reasoning, classical logic and nonclassical logics, etc.

Background

Negation in knowledge processing is an important notion, especially in fuzzy knowledge processing. The concept of negation plays a special role in nonclassical logics and in knowledge representation formalisms, in which the negative information has been taking into account par with positive information. Some scholars suggested that uncertain information processing needed different negations in various domains[1-14]. Wagner considered that negation is not a clean concept, there are (at least) two kinds of negation in these domains: a weak negation expressing non-truth (in the sense of "she doesn't like snow" or "he doesn't trust you"), and a strong negation expressing explicit falsity (in the sense of "she dislikes snow" or "he distrusts you")[1-3]. Ferré introduced an epistemic extension for the concept of negation in Logical Concept Analysis and Natural Language, the aim is to allow for the distinction between negation, opposition, and possibility in a unique formalism, and proposed that there are extensional negation and intentional negation[8]. Kaneiwa proposed that description logic $ALC_{\sim}$ with classical negation and strong negation, the classical negation $\neg$ represents the negation of a statement, the strong negation $\sim$ may be more suitable for expressing explicit negative information (or negative facts), in other worlds, $\sim$ indicates information that is directly opposite and exclusive to a statement rather than its complementary negation[9]. Since 2006, we introduced an epistemic extension for the concept of negation in knowledge processing, proposed that negative relations in knowledge should differentiate contradictory relation and opposite relation, and described to these relations using the medium logic, as well as application to fuzzy information representation[10-14]. However, for all of FS (Zadeh's Fuzzy Set) and various extensions of FS such as Intuitionistic Fuzzy Set, Vague Sets and Rough Set, their ideas as CS (Classical Set) for negative concepts, in which there is only a negation in theories, only definiens form is difference. Therefore, they can not describe to contradictory negation, opposite negation and medium negation of fuzzy knowledge. This paper aim to investigate base of set which deal with contradictory negation, opposite negation and medium negation of fuzzy knowledge.

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (60973156) and the Program for Innovative Research Team of Jiangnan University.