

超级局部扭立方体互连网络及其性质

王 喜¹⁾ 樊建席¹⁾ 韩月娟¹⁾ 周吴军¹⁾ 张书奎^{1),2)}

¹⁾(苏州大学计算机科学与技术学院 江苏 苏州 215006)

²⁾(计算机软件新技术国家重点实验室(南京大学) 南京 211102)

摘 要 局部扭立方体是近年来提出的超立方体的一个变型,由于它的许多优越性质(如低直径),在并行处理领域越来越受到人们的重视.然而,像超立方体一样,它也有一个缺点,即要使局部扭立方体升级,就必须成倍地增加其顶点个数.为了解决这一问题,文中将顶点个数为 2 的次幂的局部扭立方体推广到具有任意个顶点的互连网络,提出了超级局部扭立方体(SLTC)的定义,并证明它保持了局部扭立方体的最高连通度、对数级的直径和顶点度数、Hamilton 性质等方面的优良性质,从而证明了超级局部扭立方体是既保持了局部扭立方体的多种优越性质又易于升级的互连网络.

关键词 局部扭立方体;超级局部扭立方体;互连网络;升级;连通度;Hamilton 性质;直径

中图法分类号 TP393 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2012.00315

The Super Locally Twisted Cube Interconnection Networks and Their Properties

WANG Xi¹⁾ FAN Jian-Xi¹⁾ HAN Yue-Juan¹⁾ ZHOU Wu-Jun¹⁾ ZHANG Shu-Kui^{1),2)}

¹⁾(School of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006)

²⁾(State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 211102)

Abstract The recently introduced interconnection network, the locally twisted cube, has attracted much attention in the parallel processing area due to its many attractive features, for example: the diameter of the locally twisted cube is approximately half that of the hypercube. However, like the hypercube, it is necessary to double the node number to upgrade the locally twisted cube. In order to solve the problem, this paper generalizes the locally twisted cube with node number of power 2 to the interconnection network with arbitrary node number, and proposes a definition of the super locally twisted cube (SLTC). We prove that, the super locally twisted cube has the greatest connectivity, the logarithm node degree and diameter, and the Hamilton property. Thus, it is proved that the super locally twisted cubes are a kind of interconnection networks which keep the advantageous properties of locally twisted cubes and are easy to be upgraded.

Keywords locally twisted cube; super locally twisted cube; interconnection network; upgrade; connectivity; Hamilton property; diameter

收稿日期:2009-04-15;最终修改稿收到日期:2010-09-07. 本课题得到国家自然科学基金(60873047,61170021,61070169)、江苏省自然科学基金项目(BK2008154)、教育部博士点专项基金(20103201110018)和青蓝工程项目资助. 王 喜,男,1988 年生,硕士,研究方向为并行与分布式系统、算法. E-mail: wangxi0414@163.com. 樊建席(通信作者),男,1965 年生,博士,教授,博士生导师,研究领域为并行与分布式系统、多处理器互连网络、算法、图论. E-mail: jxfan@suda.edu.cn. 韩月娟,女,1982 年生,博士研究生,实验师,研究方向为并行与分布式系统、多处理器互连网络. 周吴军,男,1986 年生,硕士,研究方向为分布式计算、算法. 张书奎,男,1966 年生,博士,教授,研究领域为无线网络、分布式计算.

1 引 言

并行处理系统一直是当今计算机科学中很活跃的研究领域. 多处理器互连网络(简称互连网络), 是指由若干个处理器按一定方式相互连接而构成的网络. 作为并行处理系统的主干, 其性质如何直接决定着整个网络性能的优劣, 所以对互连网络拓扑结构及其性质的研究是并行处理系统的重要课题.

迄今为止, 人们提出了多种互连网络, 其中超立方体是较早提出的一种总体性质较好的互连网络, 以其正则性、高对称性、强层次结构和强容错性等优越性质成为最具吸引力的互连网络之一^[1-2]. 它已被用作多种并行机中处理器连接的拓扑结构(如 CM-2、iP-SC-860、nCUBE 等), 而且据国际最新研究表明超立方体或将成为未来纳米计算机的基本结构^[3]. 但它并不是各方面性质最好的互连网络. 于是人们开展了对超立方体变型及其性质的研究. 局部扭立方体 LTQ_n ^[4] 是 Yang 于 2005 年提出的一类互连网络. 与 n 维超立方体 Q_n 类似, n 维局部扭立方体 LTQ_n 是具有 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边的 n -正则图, 且都具有最高连通度^[4]. 最近, 文献[5-6]分别研究了一类互连网络族——对应连接(BC)图的 t/k 可诊断性以及条件诊断性, 根据这些结果可以得知 LTQ_n 在 t/k 诊断策略以及在条件诊断策略下的可诊断性也不低于超立方体. n 维局部扭立方体 LTQ_n 还具有比超立方体更好的性质: 其直径大约是超立方体的一半^[4]; 它具有容错泛圈性, 而超立方体不具备该性质^[7]; 等等. 局部扭立方体的优越性质吸引了许多研究者的关注, 短短几年, 涌现出了许多关于局部扭立方体的研究成果^[8-11].

尽管局部扭立方体较超立方体相比具有多种优越的性质, 然而, 局部扭立方体同超立方体类似, 也具有一个很大的缺点, 即局部扭立方体的顶点个数都为 2 的次幂, 这就大大限制了对局部扭立方体互连网络中顶点个数的可选范围. 要使一个局部扭立方体的维数(即顶点度数)增加 1(称为升级), 就必须成倍地增加局部扭立方体中的顶点个数. 这为局部扭立方体的升级带来了两方面的问题: 一是成本成倍增加; 二是增加了技术难度. 这在资金和技术条件欠缺的情况下是很困难的.

为了解决这一问题, Sen 在文献[12]中提出了超立方体的变型——超级立方体(super cube). 它含有任意多个顶点, 因此对它的升级可以增加任意

多个顶点. 文献[12]证明, 超级立方体很好地保持了超立方体的低顶点度数、小直径和最高连通度等优良性质. 基于这一思想, Fan 在文献[13-14]中先后提出了交叉立方体(Crossed Cube)和莫比乌斯立方体(Möbius Cube)的变型——超级交叉立方体和超级莫比乌斯立方体, 并证明它们分别保持了交叉立方体和莫比乌斯立方体的多种优越性质. 另外, Wang 等人在文献[15]中延续了 Sen 和 Fan 的研究, 提出了扭立方体(Twisted-Cube)的变型——超级扭立方体, 并且证明了它保持了扭立方体的多种优越性质. 基于局部扭立方体在升级上的缺点, 我们在本文中提出了超级局部扭立方体来弥补这种互连网络在升级方面的不足.

本文根据局部扭立方体的递归定义^[4], 提出了局部扭立方体的一个变型, 它是相应局部扭立方体的超图, 因此我们称之为超级局部扭立方体(Super Locally Twisted Cube, SLTC). SLTC 含有任意多个顶点, 故对它的升级可以增加任意多个顶点. 本文中我们用 W_N 表示一个具有 N 个顶点的超级局部扭立方体, 这里 $N \geq 1$. 本文对 W_N 的顶点度数、边连通度、顶点连通度、Hamilton 连通性和直径进行了研究. 具体研究结果如下:

(1) 证明了 W_N 的最小顶点度数满足 $\lfloor \log_2 N \rfloor \leq \delta(W_N) \leq \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$, 最大顶点度数满足 $\lfloor \log_2 N \rfloor \leq \Delta(W_N) \leq 2 \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$. 表明 W_N 的最大度数与最小度数之间相差不太大.

(2) 证明了 W_N 的顶点连通度、边连通度和最小顶点度数满足 $\kappa(W_N) = \lambda(W_N) = \delta(W_N)$, 即该网络的连通度等于其最小顶点度数. 由于对于任意一个图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, 因此 W_N 具有最高连通度, 这表明 W_N 具有最高容错性.

(3) 证明了 W_N 是一个 Hamilton 图, 这里 $N \geq 3$. 一个图是 Hamilton 图表明在该图中存在至少一条 Hamilton 回路. Hamilton 性质是互连网络中非常重要的性质. 该性质表明了 W_N 对环网络的可模拟性质. 另外, Hamilton 回路还可以用在虫洞多点路由算法中, 以减轻传统基于树的多点传送算法所带来的拥塞和死锁^[16-17].

(4) 给出了 W_N 的直径的范围, 即 $\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor \leq d(W_N) \leq \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor + 1$, 这里 $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$. 这表明 W_N 的直径最多只比 LTQ_n 的直径大 1. 因此证明了 W_N 保持了 LTQ_n 的对数级直径的优良性质. 由于信息

在传递过程中每经过一个中间处理器就有一段时间的延迟,所以,一个直径较小的网络比直径大的网络能节省处理机之间的通信延迟(在最坏情况下)^[18]. 我们模拟计算了不超过 9000 个顶点的 W_N 的直径及其平均距离,并且将结果同 LTQ_n 进行了比较,这里 $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$. 通过对比模拟数据,我们得出:当 n 充分大时, W_N 的直径约等于 LTQ_n 的直径;另外 W_N 的平均距离也保持了 LTQ_n 平均距离的变化规律.

2 预备知识

设 G 是一个图,我们用 $V(G), E(G), d(G), \kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集、直径、顶点连通度、边连通度、顶点的最小度数和顶点的最大度数. 设 $x, y \in V(G)$, 图 G 中顶点 x 的度数表示为 $deg(G, x)$. 图 G 中顶点 x 与 y 之间的最短路径是从 x 到 y 所含边的数目最少的路径. 顶点 x 与 y 之间的距离定义为 x 与 y 之间最短路径的长度,表示为 $dist(G, x, y)$. 设 $P: x = P_0, P_1, \dots, P_l = y$ 是图 G 中顶点 x 与 y 之间的一条路径,则我们用 $len(P)$ 表示路径 P 的长度,并用 $Path(P, P_i, P_j)$ 表示 P 上的子路径 P_i, P_{i+1}, \dots, P_j , 其中 $0 \leq i \leq j-1 \leq l$. 图 G 的直径是该图中任意两个顶点之间距离的最大值. 设 $A \subseteq V(G) \times V(G)$ 是满足下述条件的集合:对于任意的 $x, y \in V(G), x \neq y, \langle x, y \rangle \in A$ 和 $\langle y, x \rangle \notin A$ 有且只有一个成立. 由此我们定义图 G 的平均距离为该图中任意两个顶点之间

距离的平均值^[18-19], 即 $D(G) = \frac{\sum_{\langle x, y \rangle \in A} dist(G, x, y)}{N(N-1)/2}$.

我们用 $G[V']$ 表示图 G 中由顶点子集 V' 导出的子图,用 $G-V'$ 表示图 G 中删去 V' 中的所有顶点及其关联边所构成的图. 定义 $\Gamma(G, V') = \{v \in V(G) | v' \in V', (v, v') \in E(G)\} - V'$ ^[19]. 设 G_1 与 G_2 是两个图,若 G_1 与 G_2 同构,我们记 $G_1 \cong G_2$. 在本文中,我们对同构的图不加区别.

设 $\{0, 1\}^n$ 表示所有长度为 n 的由 0 和 1 构成的二进制串的集合. 对两个二进制串 $x, y \in \{0, 1\}^n$, 设 $x+y$ 表示 x 和 y 的和(模 2 加法),用 $|x+y|$ 表示 x 和 y 的海明距离. 对于 $x = x_1 x_2 \dots x_n \in \{0, 1\}^n$, x_1 称为二进制串 x 的第一位, x_2 是第二位,依次类推, x_n 是第 n 位或最后一位. 二进制串 x 的长度表示为 $len(x)$.

n 维局部扭立方体(locally twisted cube)简称

为 LTQ_n . 与 n 维超立方体 Q_n 类似, LTQ_n 是一个具有 2^n 个顶点的 n -正则图. LTQ_n 中的每个顶点表示为一个 n 位二进制串(地址) $x_1 x_2 \dots x_n$, 其中 $x_i \in \{0, 1\}$. 文献[4]给出了 LTQ_n 的递归定义,本文为了讨论问题的方便也采用该递归定义.

定义 1^[4]. 当 $n \geq 2$ 时, LTQ_n 的递归定义如下:

(1) LTQ_2 由标记为 00、01、10 和 11 的 4 个顶点,以及 4 条边 (00, 01)、(00, 10)、(01, 11) 和 (10, 11) 组成.

(2) 当 $n \geq 3$ 时, LTQ_n 是由两个 $n-1$ 维的局部扭立方体 LTQ_{n-1}^0 和 LTQ_{n-1}^1 相互连接而成的 n -正则图. 其中 $LTQ_{n-1}^0 \cong LTQ_{n-1}^1 \cong LTQ_{n-1}$, 即将 LTQ_{n-1}^0 中的每个顶点 $0x_2 x_3 \dots x_n$ 和 LTQ_{n-1}^1 中对应的顶点 $1(x_2 + x_n)x_3 \dots x_n$ 相连,其中 '+' 表示模 2 加法.

3 维和 4 维的局部扭立方体 LTQ_3, LTQ_4 如图 1 所示.

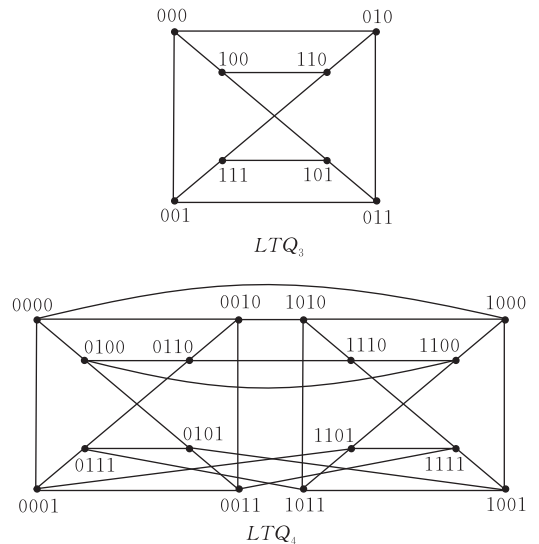


图 1 局部扭立方体 LTQ_3 和 LTQ_4

一个超级局部扭立方体(SLTC)是一个具有 $N = 2^n + h$ 个顶点的图 W_N , 这里 $0 \leq h < 2^n$. W_N 的所有顶点都标有互不相同的长度为 $n+1$ 的二进制串(地址),这些二进制串表示 0 到 $N-1$ 之间的一个整数. 其定义如下.

定义 2. 超级局部扭立方体 W_N 是一个图,其中 $|V(W_N)| = N = 2^n + h, 0 \leq h < 2^n$. 设 $u = b_u u' \in V(W_N), v = b_v v' \in V(W_N)$, 这里 $len(u') = len(v') = n, b_u, b_v \in \{0, 1\}$, 则 $(u, v) \in E(W_N)$ 当且仅当下述条件中至少有一个成立:

(1) $b_u = b_v$ 且 $(u', v') \in E(LTQ_n)$;

(2) $b_u = \bar{b}_v = 0$ 且 $(u, v) \in E(LTQ_{n+1})$;

(3) $b_u = \bar{b}_v = 0$, $b_v u' \notin V(W_N)$ 且 $(u', v') \in E(LTQ_n)$.

具有 11 个顶点的 SLTC W_{11} 如图 2 所示.

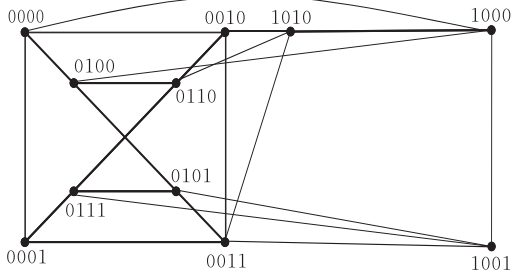


图 2 超级局部扭立方体 W_{11}

在本文中,对任意的正整数 N ,我们总是令 $n = \log_2 N$, $h = N - 2^n$, $V_0 = V(LTQ_n^0)$, 且 $V_1 = V(W_N) - V_0$. 由定义 2 易得,具有 $N = 2^n + h$ 个顶点的 SLTC W_N 包含 LTQ_n^0 作为其子图,有 $V(W_N) = V_0 \cup V_1$ 且 $V_0 \cap V_1 = \emptyset$; 当 $h = 0$ 时,我们有 $W_N = LTQ_n^0$.

在本文中,我们对 LTQ_n 的顶点及其地址可不加区别.

3 SLTC 的性质

本节我们将讨论 SLTC 的一些性质,包括 SLTC 的最小顶点度数、最大顶点度数、连通度、Hamilton 性质和直径等.

3.1 SLTC 的最小顶点度数和最大顶点度数

定理 1. $n \leq \delta(W_N) \leq n + 1$.

证明. 由定义 2,若 $h = 0$,定理显然成立.故只需证若 $0 < h < 2^n$,定理成立即可.对任意的 $x \in V_1$, $y \in V(LTQ_n^1)$, 且 $(x, y) \in E(LTQ_n^1)$, 令 $x = 1x'$, $y = 1y'$, 则 $(x', y') \in E(LTQ_n)$. 对上述顶点 y , 若 $y \in V(W_N)$, 由定义 2(1), 有 $(x, y) \in E(W_N)$; 否则, 若 $y \in V(LTQ_n^1)$ 且 $y \notin V(W_N)$. 由定义 2(3), 有 $(x, 0y') \in E(W_N)$. 另外, 由 $deg(LTQ_n^1, x) = n$, 故满足定义 2 中(1)或(3)且与 x 相关联的边的数目为 n . 又由定义 2(2), 对任意的 $x \in V_1$, 有 $n \leq deg(W_N, x) \leq n + 1$; 另外对任意的 $u \in V_0$, 由定义 2, 有 $deg(W_N, u) \geq deg(LTQ_n, u) = n$. 由这两个不等式,定理成立. 证毕.

定理 2. $n \leq \Delta(W_N) \leq 2n + 1$.

证明. 首先,若 $h = 0$,有 $\Delta(W_N) = n$. 若 $0 < h < 2^n$, 由定义 2, 有 $\Delta(W_N) \geq n$. 故只需证当 $0 < h < 2^n$ 时 $\Delta(W_N) \leq 2n + 1$ 即可. 对任意的 $x \in V_0$, 有

$deg(LTQ_n^0, x) = n$. 由定义 2, x 至多与 V_1 中的 $n + 1$ 个顶点相邻, 故 $deg(W_N, x) \leq deg(LTQ_n^0, x) + (n + 1) \leq 2n + 1$. 令 $x = 0x'$, 可以证明存在 $x \in V_0$,

使得 $deg(W_N, x) = 2n + 1$. 当 $x = 0\underbrace{11 \cdots 1}_n$ 且 $N = 2^{n+1} - 1 (n \geq 2)$ 时, 如图 3 所示, 由定义 2 与定义 1, 易证 x 与 V_0 中的 n 个顶点相邻, x 与 V_1 中的 $n + 1$ 个顶点相邻. 于是, 对任意的 $x \in V_0$, 有 $deg(W_N, x) \leq 2n + 1$. 又由定理 1 中的证明, 对任意的 $y \in V_1$, 有 $n \leq deg(W_N, y) \leq n + 1$. 故有 $n \leq \Delta(W_N) \leq 2n + 1$.

证毕.

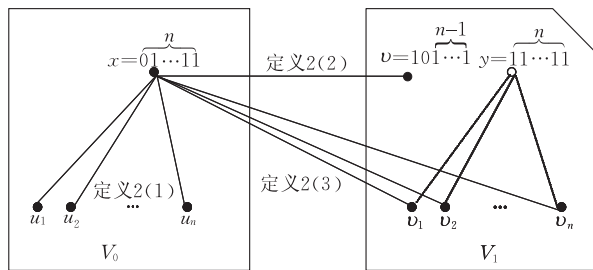


图 3 $\Delta(W_N) = 2n + 1$ 的情况

若 W_N 不为正则图时, $\Delta(W_N)$ 会随着的 N 增大而增大, 从理论上讲, 对于固定的 N , $\Delta(W_N)$ 有可能变得很大. 然而, 定理 2 证明, $\Delta(W_N)$ 最多比 n 正则情况多 $n + 1$. 这说明, 随着 N 的增大, $\Delta(W_N)$ 变化范围区间 $[n, 2n + 1]$ 内, 对 W_N 互连网络的开销影响不大. 对于单个顶点而言, 在最坏情况下, 由于路由器端口的增多而增加的开销至多增加一倍多一点.

3.2 SLTC 的连通度

由定义 2 及连通度的定义可引出下面引理.

引理 1. 若 $|V_1| \geq 1$, 则 $W_N[V_1]$ 是连通的^[18-19].

证明. 由定义 2, $W_N[V_1]$ 中只有一个连通分支, 故 $W_N[V_1]$ 是连通的. 证毕.

文献[20]中提出了对应连接(BC)图这一互连网络族的定义. 根据 BC 图的定义, 局部扭立方体属于 BC 图, 故局部扭立方体满足 BC 图关于可诊断性的性质.

引理 2. 设 $n \geq 2$, 对任意的 $V' \subset V(LTQ_n)$, $|V'| = 2$, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V')| \geq 2n - 2$.

引理 3. 设 $n \geq 4$, 对任意的 $V' \subset V(LTQ_n)$, $|V'| = 2p$, $1 \leq p \leq 2n - 2$, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V')| \geq (2n - 2) - p + 1$.

由引理 3 易证.

推论 1. 设 $n \geq 3$, 对任意的 $V' \subset V(LTQ_n)$, $2 \leq |V'| \leq n - 1$, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V')| \geq (2n - 2) -$

$\lfloor (|V' - 1|)/2 \rfloor$.

引理 4^[4]. 设 $n \geq 1$, 则 $\kappa(LTQ_n) = n$.

定理 3. $\kappa(W_N) = \delta(W_N)$.

证明. 若 $n \leq 2, h \geq 0$, 定理显然成立. 故只需证当 $n \geq 3$ 且 $h \geq 0$ 时, 有 $\kappa(W_N) = \delta(W_N)$ 即可. 对任意的 $U \subset V(W_N)$, $|U| \leq \delta(W_N) - 1$, 令 $U = U_0 \cup U_1$, 其中 $U_1 = U \cap V_1, U_0 = U - U_1$, 则 $U_0 \subseteq V_0$ 且 $U_1 \cap U_0 = \emptyset$. 我们只需证明在以下 3 种情形下, $W_N - U$ 是连通的即可.

(1) $U_1 = U$. 对任意的 $x \in V_1 - U_1$, 存在 $y \in V_0$, 使得 $(x, y) \in E(LTQ_{n+1})$. 由定义 2, 有 $(x, y) \in E(W_N)$, 故 x 与 LTQ_n^0 连通, 因此 $W_N - U$ 是连通的.

(2) $U_0 = U$. 由定理 1, 有 $n \leq \delta(W_N) \leq n + 1$. 分以下①、②两种子情形讨论.

① $\delta(W_N) = n$. 由引理 4, 有 $\kappa(LTQ_n^0) = \kappa(LTQ_n) = n$. 又 $|U| \leq \delta(W_N) - 1 \leq n - 1$, 故 $LTQ_n^0 - U_0$ 是连通的. 由引理 1, $W_N(V_1)$ 也是连通的. 进一步, 我们有以下两种情形.

(i) $|V_1| \geq n$. 令 $A = \{y \in V_0 \mid x \in V_1, (x, y) \in E(LTQ_{n+1})\}$, 则由定义 2, 有 $|A| \geq |V_1| \geq n$. 故 V_1 中至少有一个顶点与 $LTQ_n^0 - U_0$ 中的某个顶点相邻, 因此 $W_N - U$ 是连通的.

(ii) $|V_1| \leq n - 1$. 当 $|V_1| \geq 2$ 时, 若 V_1 为偶数, 由引理 2 和引理 3, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V_1)| \geq (2n - 2) - |V_1|/2 + 1 \geq n$. 否则, 由推论 1, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V_1)| \geq (2n - 2) - \lfloor (|V_1 - 1|)/2 \rfloor \geq n$. 故当 $|V_1| \geq 2$ 时, 有 $|\Gamma(LTQ_n, V_1)| \geq n$, 从而 $|\Gamma(W_N, V_1)| \geq |\Gamma(LTQ_n^1, V_1)| \geq n$. 当 $V_1 = 1$ 时, 有 $V_1 = \{10^n\}$. 由定理 1, $|\Gamma(W_N, V_1)| = \deg(W_N, 10^n) \geq \delta(W_N) \geq n$, 故当 $1 \leq V_1 \leq n - 1$ 时, 有 $|\Gamma(W_N, V_1)| \geq n$. 又显然 $\Gamma(W_N, V_1) \subseteq V_0$, 故 V_1 中至少有一个顶点与 $LTQ_n^0 - U_0$ 连通, 因此 $W_N - U$ 是连通的.

② $\delta(W_N) = n + 1$. 对任意的 $x \in V_0 - U_0$, 由 $\deg(LTQ_n^0, x) = n + 1$, 又 $\deg(W_N, x) \geq \delta(W_N) \geq n + 1$, 故 x 与 $W_N[V_1]$ 连通. 又由引理 1, $W_N[V_1]$ 是连通的, 故 $W_N - U$ 是连通的.

(3) $U_0 \neq U$ 且 $U_1 \neq U$. 由定理 1, 有 $|U_0| \leq |U| - 1 \leq \delta(W_N) - 2 \leq n - 2$. 由引理 4, 有 $LTQ_n^0 - U_0$ 是连通的. 我们用反证法证明 $W_N - U$ 是连通的. 若不然, 设 $W_N[U']$ 是 $W_N - U$ 的一个不包含在 $LTQ_n^0 - U_0$ 中顶点的连通分量, 则 $U' \subset V_1$. 考虑到对任意的 $u \in V(W_N)$, 有 $\deg(W_N, u) \geq \delta(W_N)$, 又 $|U| \leq \delta(W_N) - 1$, 故 $|U'| \geq 2$. 又 U' 不与 $LTQ_n^0 - U_0$

连通, 由定义 1 和定义 2, U' 与 LTQ_n^0 中至少有 $|U'|$ 个顶点相邻. 因此, 我们有 $2 \leq |U'| \leq |U_0| \leq \delta(W_N) - 2 \leq n - 1$. 由推论 1, 有 $|\Gamma(LTQ_n^1, U')| \geq n + 1$. 又由定义 1 和定义 2, 有 $|\Gamma(W_N, U')| \geq |\Gamma(LTQ_n^1, U')| \geq n + 1$, 但 $|U| \leq \delta(W_N) - 1 \leq n$, 故 U' 与 $V(W_N) - U - U'$ 中至少一个顶点相邻, 这与 $W_N[U']$ 是 $W_N - U$ 的一个连通分量相矛盾. 因此, $W_N - U$ 是连通的. 证毕.

引理 5^[18-19]. 对于任何一个图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

推论 2. 对于超级局部扭立方体 W_N , 有 $\kappa(W_N) = \lambda(W_N) = \delta(W_N)$.

证明. 根据定理 3 和引理 5, 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, 故 $\lambda(W_N) = \delta(W_N) = \kappa(W_N)$. 证毕.

3.3 SLTC 的 Hamilton 性质

Hamilton 性质是互连网络中非常重要的性质. 在本节中我们使用 H 代表 Hamilton, 对于给定图 G , 若存在一条路, 经过图中的每个顶点恰好一次, 这条路称作 H-路. 若存在一条回路, 经过图中每个顶点恰好一次, 这条回路称作 H-回路. 具有 H-路的图称作半 H-图, 具有 H-回路的图称作 H-图^[18-19].

引理 6^[7]. 设 $n \geq 1, n \neq 2$, 则 LTQ_n 是 H-连通的.

定理 4. 设 $G = W_N[V_1], |V_1| \geq 2$, 则 G 是一个半 H-图.

证明. 我们对 V_1 用数学归纳法. 令 $m = \lfloor \log_2 |V_1| \rfloor$, 若 $|V_1| \in \{2, 4, 8\}$, 则 $G \cong LTQ_m$, G 是一个半 H-图; 若 $|V_1| \in \{3, 5, 6, 7\}$, 设 G' 是 V' 中的顶点按定义 2 中的条件 (1) 和 (2) 连接构成的图, 则 $G \cong G'$, G 是一个半 H-图. 故当 $2 \leq |V_1| \leq 8$ 时, 定理成立.

假定当 $|V_1| \leq K (K \geq 8)$ 时, 定理成立. 当 $|V_1| = K + 1$ 时, 令 $n = \lfloor \log_2 |K + 1| \rfloor$, 则 $n \geq 3$. 若 $K + 1 = 2^n$, 则 $G \cong LTQ_n$. 由引理 6, G 是一个 H-图; 否则, 可令 $V' = \{x \mid x \in \{0, 1\}^{n+1}, 0 \leq x \leq K\}, V_2 = V(LTQ_n^0)$, 则 $V_2 \subset V'$; 再令 $V_3 = V' - V_2$. 设 G'' 是 V' 中的顶点按定义 2 中的条件 (1) 和 (2) 连接构成的图, 则 $G \cong G''$. 故只需证明 G'' 是半 H-图就可证明该定理成立. 显然, $G''[V_2] = LTQ_n^0$, 即 G'' 包含 LTQ_n^0 作为子图. 我们分 (1)、(2) 两种情形讨论:

(1) 若 $|V_3| = 1$. 设 $|V_3| = \{x\}$, 由定义 1 和定义 2, 存在 $y \in V_2$, 使得 $(x, y) \in E(G'')$. 取 $z \in V_2$, 使得 $z \neq y$. 由引理 6, $G''[V_2]$ 中存在由 y 到 z 的 H-路 P . 于是由边 (x, y) 和路径 P 构成 G'' 中的 H-路, 故 G'' 是半 H-图.

(2) 若 $|V_3| > 1$. 令 $M = 2^n + |V_3|$, $V_4 = V(W_M) - V(LTQ_n^0)$. 由定义 2 易证 $G''[V_3] \cong W_M[V_4]$. 显然 $|V_4| = |V_3| = (K+1) - 2^n \leq K$. 由归纳假设, $W_M[V_4]$ 是一个半 H-图, 于是 $G''[V_3]$ 是一个半 H-图. 设 Q_1 是 $G''[V_3]$ 中由 x 到 y 的一条 H-路, 由定义 2, 存在 $y' \in V_2$, 使得 $(y, y') \in E(G'')$, 因 $|V_2| = |V(LTQ_n^0)| = 2^n \geq 8$, 故可取 $z \in V_2$, 使得 $z \neq y'$. 由引理 6, 可设 Q_2 是 LTQ_n^0 中由 y' 到 z 的一条 H-路, 于是由路径 Q_1 , 边 (y, y') 和路径 Q_2 构成 G'' 中由 x 到 z 的一条 H-路, 故 G'' 是一个半 H-图.

综上所述, 当 $|V_1| = K+1$ 时, 定理也成立.

证毕.

推论 3. 设 $N \geq 3$, 则 W_N 是一个 H-图.

证明. 若 $|V_1| = 1$. 设 $|V_1| = \{\beta\}$, 由定义 2, 存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_0$, 使得 $(\alpha_1, \beta) \in E(W_N)$, $(\alpha_2, \beta) \in E(W_N)$. 可令 P 是 LTQ_n^0 中由 α_1 到 α_2 的一条 H-路. 于是由路径 P , 边 (α_1, β) 和边 (β, α_2) 构成 W_N 中的一条 H-回路, 如图 4(a) 所示.

若 $|V_1| > 1$. 设 $G' = W_N[V_1]$, 由定理 4, 存在 $\beta_1, \beta_2 \in V_1$, 使得 G' 中存在由 β_1 到 β_2 的一条 H-路, 记为 Q . 由定义 2, 存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V_0$, 使得 $(\alpha_1, \beta_1) \in E(W_N)$, $(\alpha_2, \beta_2) \in E(W_N)$. 由引理 6, 设 P 是 LTQ_n^0 中由 α_1 到 α_2 的一条 H-路. 于是由边 (α_1, β_1) 、路径 Q 、边 (β_2, α_2) 和路径 P 构成 W_N 中的一条 H-回路, 如图 4(b) 所示.

故设 $N \geq 3$, 则 W_N 是一个 H-图. 证毕.

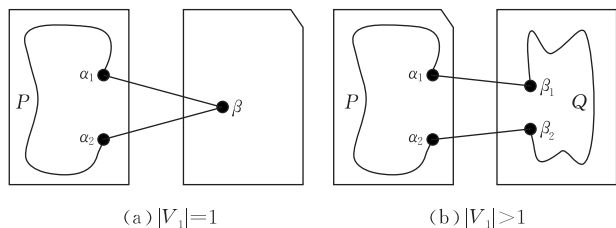


图 4 W_N 的 Hamilton 性质

3.4 SLTC 的直径

为了讨论 W_N 的直径, 我们引入下述表示: 对于任意的 $2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1$, W_N 的直径的下确界表示为 $glb(\{d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\})$.

引理 7^[4]. $d(LTQ_3) = 2$; $d(LTQ_4) = 3$; 当 $n \geq 5$ 时, 则 $d(LTQ_n) = \lceil (n+3)/2 \rceil$.

引理 8. 设 $x, y \in V_0$, x 与 y 的最后一位为 0, 且 $P: x = P_0, P_1, \dots, P_l = y$ 是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 其中 $P_i = 0u \in V_0$, $P_{i+j} = 1\alpha_j \in V_1$, $P_{i+t+1} = 0\theta \in V_1$, $0 \leq i \leq l-2$, $1 \leq j \leq t$, $1 \leq t \leq l-$

$i-1$, 且 $l \geq 1$, 则在 W_N 中存在 x 与 y 之间的一条最短路径 $Q: x = P_0, P_1, \dots, P_i, P'_{i+1}, P'_{i+2}, \dots, P'_{i+t}, P_{i+t+1}, P_{i+t+2}, \dots, P_l = y$ 使得 $P'_{i+k} \in V_0$, $k = 1, 2, \dots, t$.

证明. 易知 $len(P) = dist(W_N, x, y) = l$. 有以下两种情形:

情形 1. P_i 的最后一位为 0. 有下述 3 种情形:

情形 1.1. $(P_i, P_{i+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(3) 且 $t=1$. 则 $u = \alpha_t$ 且 $(\alpha_t, \theta) \in E(LTQ_n)$. 故 $(u, \theta) \in E(LTQ_n)$, 从而 $dist(W_N, P_i, P_{i+2}) = 1$. 于是 $Q: x = P_0, P_1, \dots, P_i, P_{i+2}, P_{i+3}, \dots, P_l = y$ 是 W_N 中 x 与 y 之间的一条路径, 但 $len(Q) = len(P) - 1 = dist(W_N, x, y) - 1$. 故 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

情形 1.2. $(P_i, P_{i+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2). 则 $u = \alpha_1$ 且 $(\alpha_m, \alpha_{m+1}) \in E(LTQ_n)$, $1 \leq m \leq t-1$. 可分下述 3 种情形:

情形 1.2.1. $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(3). 则 $(\alpha_t, \theta) \in E(LTQ_n)$, 于是 $Q: x = P_0, P_1, \dots, P_i, 0\alpha_{i+2}, \dots, 0\alpha_t, 0\theta = P_{i+t+1}, P_{i+t+2}, \dots, P_l = y$ 是 W_N 中 x 与 y 之间的一条路径, 但是 $len(Q) = len(P) - 1 = dist(W_N, x, y) - 1$. 故 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

情形 1.2.2. $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2) 且 P_{i+t} 的最后一位为 0. 类似于情形 1.2.1, 可证 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

情形 1.2.3. $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2) 且 P_{i+t} 的最后一位为 1. 则 $|u + \theta| \leq |\alpha_1 + \alpha_t| + 1$. 由文献[4]中定理 5.1, 有 $dist(LTQ_n^0, P_i, P_{i+t+1}) \leq (t-1) + 1 < t+1 = len(path(P, P_{i+1}, P_{i+t})) + 2$. 故 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

情形 1.3. $(P_i, P_{i+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(3) 且 $l > 1$. 可分下述两种情形:

情形 1.3.1. $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(3) 或者 $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2) 且 P_{i+t} 的最后一位为 0. 类似于情形 1.2.2 与情形 1.2.3, 可证 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

情形 1.3.2. $(P_{i+t}, P_{i+t+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2) 且 P_{i+t} 的最后一位为 1. 则 $|u + \theta| \leq 1 + |\alpha_1 + \alpha_t| + 1$. 由文献[4]中定理 5.1, 有 $dist(LTQ_n^0, P_i, P_{i+t+1}) \leq 1 + (t-1) + 1 = t+1 = len(path(P, P_i, P_{i+t+1})) = dist(W_N, P_i, P_{i+t+1})$. 故 $dist(LTQ_n^0,$

$P_i, P_{i+t+1}) = \text{dist}(W_N, P_i, P_{i+t+1})$. 于是 $\text{dist}(W_N, x, y) = \text{len}(\text{path}(P, x, P_i)) + \text{dist}(LTQ_n^0, P_i, P_{i+t+1}) + \text{len}(\text{path}(P, x_{i+t+1}, y))$. 从而在 W_N 中存在 x 与 y 之间的一条最短路径 $Q: x = P_0, P_1, \dots, P_i, P'_{i+1}, P'_{i+2}, \dots, P'_{i+t}, P_{i+t+1}, P_{i+t+2}, \dots, P_l = y$ 使得 $P'_{i+k} \in V_0, k=1, 2, \dots, t$.

情形 2. P_i 的最后一位为 1. 若 P_{i+t+1} 的最后一位为 0. 证明类似于情形 1. 否则可分下述两种情形:

情形 2.1. $(P_i, P_{i+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(2). 由文献[4]中定理 4.2 与定理 5.1, 有 $\text{dist}(LTQ_n^0, P_i, P_{i+t+1}) \leq 1 + (t-1) + 1 = t+1 = \text{len}(\text{path}(P, P_i, P_{i+t+1}))$. 类似于情形 1. 3.2, 引理成立.

情形 2.2. $(P_i, P_{i+1}) \in E(W_N)$ 满足定义 2(3). 由文献[4]中定理 4.2 与定理 5.1, 有 $\text{dist}(LTQ_n^0, P_i, P_{i+t+1}) \leq (t-1) + 1 < t+1 = \text{len}(\text{path}(P, P_{i+1}, P_{i+t})) + 2$. 故 P 不是 W_N 中 x 与 y 之间的一条最短路径, 矛盾.

综上所述, 引理成立.

证毕.

由引理 8, 易证下述推论.

推论 4. 设 $x, y \in V_0$, 且 x 与 y 的最后一位均为 0, 则 W_N 中存在 x 与 y 之间其顶点均在 V_0 中的一条最短路径.

定理 5. $\lceil (n+3)/2 \rceil \leq d(W_N) \leq \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$ 且 $\text{glb}(\{d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\}) = \lceil (n+3)/2 \rceil$.

证明. 我们首先讨论 $d(W_N)$ 的上界, 对任意的 $x, y \in V(W_N)$, 我们分以下 3 种情形进行讨论:

情形 1. $x, y \in V_0$. 此时, $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_n^0, x, y) \leq d(LTQ_n)$.

情形 2. $x \in V_0$ 且 $y \in V_1$. 设 $(\tau, y) \in E(LTQ_{n+1})$, 且 $\tau \in V_0$. 由定义 2, 有 $(\tau, y) \in E(W_N)$, 于是有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_n^0, x, \tau) + 1 \leq d(LTQ_n) + 1$.

情形 3. $x, y \in V_1$. 令 $m = \lfloor \log_2 |V_1| \rfloor$, 则 $n \geq m+1$. 由引理 7, 易得 $d(LTQ_m) \leq d(LTQ_n)$. 令 $V_2 = \{u \in \{0, 1\}^{n+1} \mid 2^n \leq u \leq 2^n + 2^m - 1\}$ 且 $V_3 = V(V_1) - V_2$. 此时, 考虑以下 3 种子情形:

(1) $x, y \in V_2$. 此时, $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_m^0, x, y) \leq d(LTQ_m) \leq d(LTQ_n)$.

(2) $x \in V_2$ 且 $y \in V_3$. 设 $(v, y) \in E(W_N[V_1])$, 且 $v \in V_2$. 由定义 2, 有 $(v, y) \in E(W_N)$. 于是有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_m^0, x, v) + 1 \leq d(LTQ_m) + 1 \leq d(LTQ_n) + 1$.

(3) $x, y \in V_3$. 令 $m_1 = \lfloor \log_2 |V_3| \rfloor$, 易得 $n \geq m+1 \geq m_1+2$. 由引理 7, 有 $d(LTQ_{m_1}) + 1 \leq d(LTQ_n)$. 令 $V_5 = \{u \mid u \in \{0, 1\}^{n+1}, 2^n + 2^m \leq u \leq 2^n + 2^m + 2^{m_1} - 1\}$

且 $V_4 = V(V_3) - V_5$. 进一步, 我们有以下 3 种情形:

① $x, y \in V_5$. 有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_{m_1}^0, x, v) \leq d(LTQ_{m_1}) \leq d(LTQ_n) - 1$.

② $x \in V_5$ 且 $y \in V_4$. 设 $(v, y) \in E(W_N[V_3])$ 且 $v \in V_5$. 由定义 2, 有 $(v, y) \in E(W_N)$, 于是有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_{m_1}^0, x, v) + 1 \leq d(LTQ_{m_1}) + 1 \leq d(LTQ_n)$.

③ $x, y \in V_4$. 令 $(x_1, x) \in E(W_N[V_3]), (y_1, y) \in E(W_N[V_3])$, 且 $x_1, y_1 \in V_5$. 由定义 2, 有 $(x_1, x) \in E(W_N), (y_1, y) \in E(W_N)$. 于是, $\text{dist}(W_N, x, y) \leq \text{dist}(LTQ_{m_1}^0, x_1, y_1) + 2 \leq d(LTQ_{m_1}) + 2 \leq d(LTQ_n) + 1$.

故当 $x, y \in V_1$ 时, 有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq d(LTQ_n) + 1$.

综上所述, 对任意的 $x, y \in V(W_N)$, 有 $\text{dist}(W_N, x, y) \leq d(LTQ_n) + 1 = \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$. 由引理 7, 有 $d(W_N) = \max\{\text{dist}(W_N, x, y) \mid x, y \in V(W_N)\} \leq d(LTQ_n) + 1 = \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$.

接着我们讨论 $d(W_N)$ 的下界:

对于 $N = 2^n + h, 0 \leq h < 2^n$, 若 $h = 0$, 则由引理 7, 该引理成立. 取 $x = 00^n \in V_1, y = 01^{n-1}0 \in V_0$. 由推论 4, 易知 $\text{dist}(W_N, x, y) = \text{dist}(LTQ_n, 0^n, 1^{n-1}0) = \lceil (n+3)/2 \rceil$. 故 $d(W_N) \geq \text{dist}(W_N, x, y) = \lceil (n+3)/2 \rceil$.

若 $\text{glb}\{|d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\}| \geq \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$, 由引理的第一部分, 有 $\text{glb}(\{d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\}) \leq \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$. 故 $\text{glb}(\{d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\}) = \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$. 从而对于任意的 $2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1, d(W_N) = \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$. 但由引理 7, 当 $N = 2^n$ 时, 有 $d(W_N) = \lceil (n+3)/2 \rceil$, 矛盾.

证毕.

我们在文献[12-15]研究成果的基础上, 证明了 W_N 直径的下确界与上界, 即 W_N 直径的下确界与 LTQ_n 的直径相等, W_N 的直径最多只比 LTQ_n 的直径大 1, 因此证明了 W_N 保持了 LTQ_n 的对数级直径的优良性质.

4 SLTC 通信开销的评估

我们基于 Java 平台, 通过编写程序模拟了 SLTC 互连网络的结构. 本节我们对 SLTC 互连网络的通信开销进行了评估, 并与局部扭立方体的数据进行比较.

通信开销是衡量互连网络性能的重要评价指标, 而通信开销可以用互连网络的直径和平均距离来衡量^[18-19]. 令 $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$, 超级局部扭立方体与

局部扭立方体的直径的模拟数据如图 5 所示.

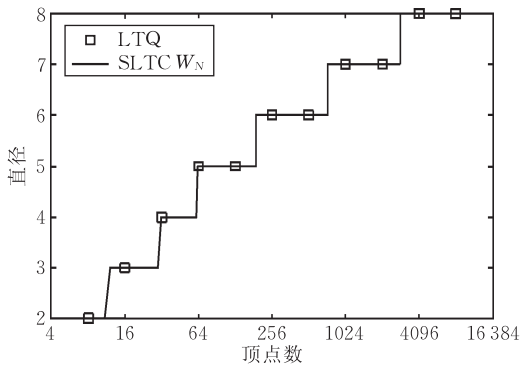


图 5 W_N 与 LTQ_n 的直径

超级局部扭立方体与局部扭立方体的平均距离的模拟数据如图 6 所示.

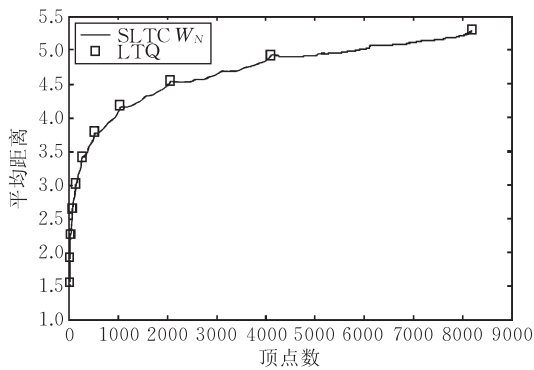


图 6 W_N 与 LTQ_n 的平均距离

通过以上数据,我们有如下结论:超级局部扭立方体在直径方面与局部扭立方体非常接近,且当 n 充分大时, W_N 的直径约等于 LTQ_n 的直径;另外超级局部扭立方体在平均距离方面也保持了局部扭立方体的特性.

5 W_N 与 LTQ_n 的性能比较

综上所述,SLTC W_N 与 LTQ_n 和 Q_n 相比较有如下特点:

(1) W_N 是具有任意个顶点的互连网络,相比较 LTQ_n 的顶点个数均是 2 的次幂. W_N 克服了 LTQ_n 不易升级的缺点.

(2) W_N 的顶点的最大度数满足 $n \leq \Delta(W_N) \leq 2n+1$. 这表明,一方面, W_N 的度数是对数级的,总体保持了 LTQ_n 低顶点度数的优点;另一方面,由于一个顶点上的路由器端口数等于该顶点的度数,因此,顶点度数的增多会增加网络构成的开销,但单个顶点增加的开销在最坏情况下不会大于 LTQ_n 中顶点的 2 倍多 1.

(3) W_N 的连通度满足 $\kappa(W_N) = \lambda(W_N) = \delta(W_N)$,保持了 LTQ_n 高连通度的优点.

(4) W_N 是一个 Hamilton 图,保持了 LTQ_n 是一个 Hamilton 图的优点,相比较 Q_n 不具备该性质.

(5) W_N 的直径 $d(W_N)$ 满足 $\lceil (n+3)/2 \rceil \leq d(W_N) \leq \lceil (n+3)/2 \rceil + 1$ ($n = \lfloor \log_2 N \rfloor$) 且 $glb(\{d(W_N) \mid 2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1\}) = \lceil (n+3)/2 \rceil$. 这说明, W_N 的直径或者与 LTQ_n 的相同,或者比 LTQ_n 的直径大 1;又 $d(Q_n) = n^{[1]}$,故当 n 充分大时, W_N 的直径大约是 Q_n 的直径的 $\frac{1}{2}$ ($2^n \leq N \leq 2^{n+1} - 1$).

6 结 论

本文提出了局部立方体的一个超图——超级局部扭立方体(SLTC).通过证明和模拟分析,得出以下结论:SLTC 很好地保持了局部扭立方体低顶点度数、最高连通度、Hamilton 性质和小直径等优点.更进一步,由于 SLTC 具有任意多个顶点,因此对其升级可以增加任意多个顶点,这说明超级局部扭立方体在结构上比局部扭立方体更容易扩展,具有更大的灵活性,它克服了局部扭立方体的升级必须成倍增加其顶点个数的不易扩展的缺点.

参 考 文 献

- [1] Bhuyan L N, Agrawal D P. Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network. IEEE Transactions on Computers, 1984, 33(4): 323-333
- [2] Leighton F T. Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes. Morgan Kaufman Publishers, 1992
- [3] Lee S C, Hook L R. Logic and computer design in nano-space. IEEE Transactions on Computers, 2008, 57(7): 156-406
- [4] Yang X F, Evans D J, Megson G M. The locally twisted cubes. International Journal of Computer Mathematics, 2005, 82(4): 401-413
- [5] Fan J X, Lin X L. The t/k -diagnosability of the BC graphs. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 176-184
- [6] Zhu Q. On conditional diagnosability and reliability of the BC networks. Journal of Supercomputer, 2008, 45(2): 173-184
- [7] Ma M J, Xu J M. Panconnectivity of locally twisted cubes. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(7): 673-677
- [8] Chang Qing-Yan, Ma Mei-Jie, Xu Jun-Ming. Fault-tolerant pancyclicity of locally twisted cubes. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(6): 607-610(in Chinese)

(常青彦, 马美杰, 徐俊明. 局部扭立方体网络的容错泛圈性. 中国科学技术大学学报, 2006, 36(6): 607-610)

- [9] Yang X F, Megson G M, Evans D J. Locally twisted cubes are 4-pancyclic. *Applied Mathematics Letters*, 2004, 17(8): 919-925
- [10] Hsieh S Y, Tu C J. Constructing edge-disjoint spanning trees in locally twisted cubes. *Theoretical Computer Science*, 2009, 410(8-10): 926-932
- [11] Han Y J, Fan J X, Zhang S K, Yang J W, Qian P D. Embedding meshes into locally twisted cubes. *Information Sciences*, 2010, 180(19): 3794-3805
- [12] Sen A. Supercube: An optimally fault tolerant network architecture. *Acta Informatica*, 1989, 26(9): 741-748
- [13] Fan Jian-Xi. The super crossed cube interconnection networks and their topological properties. *Chinese Journal of Computers*, 1999, 22(2): 222-224(in Chinese)
(樊建席. 超级交叉立方体互连网络及其拓扑性质. 计算机学报, 1999, 22(2): 222-224)
- [14] Fan Jian-Xi, Guan Dian-Zhu. The super Möbius cubes——A kind of optimally fault-tolerant interconnection networks with little diameters. *Journal of Computer Research and Development*, 1999, 36(3): 315-319(in Chinese)
(樊建席, 管殿柱. 超级 Möbius 立方体——一类最优容错的小直径互连网络. 计算机研究与发展, 1999, 36(3): 1033-1036)
- [15] Wang Xi, Fan Jian-Xi. The super twisted cubes interconnection networks and their properties. *Computer Applications and Software*, 2011, 28(10): 17-19(in Chinese)
(王喜, 樊建席. 超级扭立方体互连网络及其性质. 计算机应用与软件, 2011, 28(10): 17-19)
- [16] Lin X L, Ni L M. Deadlock-free multicast wormhole routing in multicomputer networks//Proceedings of the 18th Annual International Symposium on Computer Architecture. 1991: 116-125
- [17] Lin X L, McKinley P K, Ni L M. Deadlock-free multicast wormhole routing in 2-D mesh multicomputer. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1994, 5(8): 793-804
- [18] Bondy J A, Murty U S A. *Graph theory with applications*. London/New York: MacMillan/Elsevier, 1976
- [19] Xu Jun-Ming. *Graph Theory with Applications*. The second edition. Hefei: University of Science and Technology of China of Press, 2004(in Chinese)
(徐俊明. 图论及其应用. 第2版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2004)
- [20] Fan Jian-Xi, He Li-Qin. BC interconnection networks and their properties. *Chinese Journal of Computers*, 2003, 26(1): 84-90(in Chinese)
(樊建席, 何力勤. BC 互连网络及其性质. 计算机学报, 2003, 26(1): 84-90)



WANG Xi, born in 1988, M. S. .

His research interests include interconnection network, algorithms, etc.

FAN Jian-Xi, born in 1965, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include parallel and distributed systems, multiprocessor interconnection networks,

algorithms, graph theory.

HAN Yue-Juan, born in 1982, Ph. D. . Her research interests include parallel and distributed systems, multiprocessor interconnection networks.

ZHOU Wu-Jun, born in 1986, M. S. . His research interests include distributed computing.

ZHANG Shu-Kui, born in 1966, Ph. D. , professor. His research interests include wireless networking, network and security, distributed computing.

Background

Interconnection networks take important roles in parallel computing systems because they determine the performance of the systems at a large scale. So far, many interconnection networks have been proposed in the literature. The hypercube has been proved to be one of the most popular interconnection networks for its superior properties such as regularity, symmetry, strong hierarch, and strong fault tolerance and so on. But the hypercube is not an interconnection network whose all properties are optimal, for example: the diameter of the hypercube is not the smallest; the hypercube is

not a Hamiltonian connected network; it is necessary to double the node number to upgrade the hypercube and so on.

So people studied on the hypercube variants and their properties. In ensuring the hypercube vertices, edges and connectivity, by changing the hypercube in some links between the vertices, a number of hypercube variants such as crossed cubes, möbius cubes and locally twisted cubes have been proposed in the literature so far. These hypercube variants have attracted much attention due to its many attractive features, for example: the diameter of these hypercube vari-

ants is approximately half that of the hypercube; they own fault-tolerant pancyclic but hypercube not have the feature.

For the dimension (i. e. vertex degrees) increased by 1 (known as upgrade), it is necessary to increase exponentially the number of vertices, this upgrade for the hypercube has brought two issues: First, the cost doubled; second, it increases the technical difficulty, this case is very difficult under the financial lack and technical conditions. To solve this problem, Sen put forward a variant of hypercube, super cube, which contains any number of vertices. This work makes the super cube upgrades with greater flexibility. Based on this idea, Fan have proposed variants of the crossed cubes and möbius cubes, super crossed cubes and super möbius

cubes, and prove that they were kept most advantageous properties of the crossed cubes and möbius cubes.

As the local twisted cube also contains the problem of upgrade, based on this, we proposed in this paper super locally twisted cubes (SLTC). We obtained five major results as follows: The minimum degree of SLTC; The maximum degree of SLTC; The vertex connectivity, edge connectivity and minimum vertex degree of SLTC; SLTC is a Hamiltonian graph; The diameter of SLTC. Thus, it is proved that the super locally twisted cubes are a kind of interconnection networks which keep the advantageous properties of locally twisted cubes and are easy to be upgraded.