

# 高斯混合概率假设密度滤波器在多目标跟踪中的应用

吕学斌 周群彪 陈正茂 熊运余 蔡 葵

(四川大学计算机学院 视觉合成图形图像技术国防重点学科实验室 成都 610064)

**摘 要** 实现了基于随机集和点过程理论在目标数未知或随时间变化的多目标跟踪滤波算法. 研究成果包括: (1) 分析了基于随机有限集的多目标跟踪模型; (2) 分析推导了基于随机集和点过程理论的概率假设密度滤波递推表达式; (3) 实现了在线性高斯条件下的概率假设密度滤波的一种解析滤波算法; (4) 仿真实验验证了算法的性能, 比较了在杂波强度和检测概率变化的情况下和联合概率数据互联算法相关性能; (5) 指出了算法的一些不足以及改进的研究方向.

**关键词** 高斯混合概率假设密度 (PHD) 滤波器; 概率假设密度滤波器; 随机集; 多目标跟踪; 联合概率数据互联  
**中图法分类号** TP391 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2012.00397

## The Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter and Its Application to Multi-Target Tracking

LV Xue-Bin ZHOU Qun-Biao CHEN Zheng-Mao XIONG Yun-Yu CAI Kui

(College of Computer, Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense, Sichuan University, Chengdu 610064)

**Abstract** A algorithm based on random sets and point process theory is proposed for jointly estimate the time-varying number of targets and their states. The main contributions include: (1) Analyze multi-target tracking model based on random finite sets; (2) The Probability Hypothesis Density recursive formulas are deduced based on random sets and point process theory; (3) A analytic implementation of the Probability Hypothesis Density Filter is proposed under the linear Gaussian assumptions; (4) Two simulation results validate GMPHD performance and then compare GMPHD and JPDA performance under clutter and detection probability change; (5) Point out some the algorithm's lack and research direction.

**Keywords** GMPHD; probability hypothesis density filter; random sets; multi-target tracking; JPDA

## 1 引 言

多目标跟踪技术无论在军事领域还是在民用领域均有广泛的应用. 它可以用于超视距多目标探测、跟踪与攻击、空中交通管制、空中导弹防御、海洋监视、港口监视、卫星监控系统和机器视觉等. 跟踪单

个目标与跟踪已知  $n$  个目标的差别是, 后者涉及数据互联问题, 当目标数未知或随时间变化时, 在多目标跟踪环境中, 量测数据和目标之间存在着不确定的关系, 因此对于目标数未知或随时间变化的多目标跟踪存在着两个基本的问题: (1) 当前时刻有多少个目标存在; (2) 应该如何保持对目标的正确跟踪.

收稿日期: 2007-08-27; 最终修改稿收到日期: 2012-01-09. 本课题得到国家“八六三”高技术研究发展计划项目基金(2006AA12A104)、国家自然科学基金(60705005)资助. 吕学斌, 男, 1976 年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为目标跟踪、数据融合. E-mail: lvxb@scu.edu.cn. 周群彪(通信作者), 男, 1966 年生, 副教授, 主要研究方向为图像处理、数据融合. 陈正茂, 男, 1973 年生, 讲师, 主要研究方向为图像处理、图像融合. 熊运余, 男, 1979 年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为多目标跟踪、数据融合. 蔡 葵, 男, 1962 年生, 讲师, 主要研究方向为图像处理.

对于后一个问题,传统的多目标跟踪技术采用“量测—航迹”的关联技术.传统的多目标跟踪过程的关键问题是如何进行有效的数据关联.联合概率数据关联算法(JPDA)和多假设方法(MHT)是多目标跟踪中最为有效的两种关联算法,但当多目标和回波数目增加时,JPDA 会遭遇到数据关联组合计算量巨大的问题,计算复杂性呈指数增加,而 MHT 由于大量的“迭代”过程浪费许多时间.

为了解决数据关联的计算量大和避免航迹关联错误,需改变研究问题的思路.最近几年提出了使用随机有限集理论来研究多目标跟踪的思路,基于随机有限集的方法把目标的状态和所有的量测看作是一个随机单一的目标状态集合和一个单一的传感器量测集合,这样基于随机集的方法就把多目标跟踪的问题简化为在集合意义上单目标的跟踪问题,避免了直接的从量测到航迹的关联.

本文首先分析了基于随机有限集的多目标跟踪模型,在此基础上从理论上分析推导了基于随机集的概率假设密度滤波递推表达式,实现了在线性高斯情况下的概率假设密度滤波的一种解析滤波算法——高斯混合概率假设密度滤波算法(Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter).实验结果表明该算法在密集杂波环境下能够很好地估计出目标的状态和数目,具有较好的跟踪性能.最后进一步分析指出了算法的一些不足和改进的研究方向.

## 2 基于随机有限集的多目标跟踪模型

### 2.1 随机集滤波

近几年由 Mahler<sup>[1]</sup>提出的有限集合统计学(Finite Sets Statistics)理论——随机集理论的特例,从概率论的角度统一表述了多目标跟踪中的检测、分类和跟踪问题.在多目标跟踪问题中,多目标的状态模型和观测模型可以表示为随机有限集(Random Finite Set)形式.

为了描述方便,假设在  $k$  时刻的多目标状态集为  $X_k = \{x_{k,1}, \dots, x_{k,M(k)}\} \in F(X)$ ,多目标观测集为  $Z_k = \{z_{k,1}, \dots, z_{k,N(k)}\} \in F(Z)$ ,其中,  $M(k)$  及  $N(k)$  分别表示  $k$  时刻目标数及量测数,  $F(X)$ 、 $F(Z)$  分别表示有限集  $X$  和  $Z$  的幂集,  $N(k) \geq M(k)$ ,部分量测值可能源于杂波.状态集和量测集可以分别用状态空间的随机有限集  $X_k$  和量测空间的随机有限集  $Z_k$  表示.那么根据随机有限集  $k$  时刻的目标状态集可描述为

$$X_k = \left( \bigcup_{x \in X_{k-1}} S_{k|k-1}(x) \right) \cup \left( \bigcup_{x \in X_{k-1}} B_{k|k-1}(x) \right) \cup \Gamma_k,$$

其中  $X_{k-1}$  表示  $k-1$  时刻的目标状态集,  $S_{k|k-1}$  表示在  $k-1$  时刻的目标在  $k$  时刻仍然存在的目标随机集,  $B_{k|k-1}$  表示由  $X_{k-1}$  衍生的目标随机集,  $\Gamma_k$  表示  $k$  时刻瞬间出现的新的目标随机集.在  $k$  时刻的多目标的量测根据有限集可描述为  $Z_k = K_k \cup \left( \bigcup_{x \in X_k} \Theta_k(x) \right)$ ,其中  $\Theta_k(X_k)$  对多目标状态  $X_k$  的量测随机集,  $K_k$  表示由杂波或者误差引起的量测随机集.

根据贝叶斯估计理论,基于有限集的贝叶斯估计可描述为

$$p_{k|k-1}(X_k | Z_{k-1}) = \int f_{k|k-1}(X_k | X) p_{k-1}(X | Z_k) \mu_s(dX) \quad (1)$$

$$p_k(X_k | Z_k) = \frac{g_k(Z_k | X_k) p_{k|k-1}(X_k | Z_{k-1})}{\int g_k(Z_k | X) p_{k|k-1}(X | Z_{k-1}) \mu_s(dX)} \quad (2)$$

优化的递推的贝叶斯估计表达式(1)、(2)需在空间  $F(X)$  进行积分运算,且多目标联合似然函数  $g_k(Z_k | X_k)$  的计算随着目标数的增加而成指数增长,使得直接运用优化的贝叶斯估计来进行目标数和目标状态的估计变得难以实现.为了简化计算, Mahler 进一步提出了使用多目标后验概率分布的一阶统计量来近似代替多目标的后验概率分布,以此递推地近似计算目标数和目标状态,并提出了概率假设密度滤波<sup>[1]</sup>(Probability Hypothesis Density Filter).

### 2.2 概率假设密度滤波

假设  $v$  为有限集  $X \in F(x)$  的一阶统计量( $v$  也被称作概率假设密度或者强度函数),对于任意的  $S \subseteq F(X)$  有  $E[|X \cap S|] = \int_S v(x) dx$ .其中  $|X|$  代表有限集  $X$  的元素个数.因此对于给定一个  $x$ ,对应的强度函数  $v(x)$  为单位体积  $x$  上的目标个数期望值的密度函数<sup>[4]</sup>.下面给出泊松有限集定义.

**定义 1.** 在满足下列条件的情况下,多目标的有限集  $X$  为服从泊松分布有限集.

(1) 随机有限集  $X$  的势的分布  $Pr(|X| = n)$  服从期望为  $\hat{N}$  的泊松分布.

(2)  $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$  满足  $E[x_1 x_2] = E[x_1] \cdot E[x_2]$ ,且具有相同的分布.

**定理 1.** 若  $v_k$  和  $v_{k-1}$  分别表示多目标有限集的后验概率密度函数  $p_k$  和预测概率密度函数  $p_{k|k-1}$

的强度函数,且满足下列 3 个条件:

条件 1. 每个目标的状态更新相互独立,传感器对目标的量测间相互独立.

条件 2. 杂波量测均相互独立,杂波和目标量测间相互独立.

条件 3. 多目标的预测概率  $p_{k|k-1}$  服从泊松分布.

根据有限集统计理论和贝叶斯估计有 PHD 滤波递推表达式为<sup>[1]</sup>

$$v_{k|k-1}(x) = \int p_{s,k}(\zeta) f_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta) d\zeta + \int \beta_{k|k-1}(x|\zeta) v_{k-1}(\zeta) d\zeta + \gamma_k(x) \quad (3)$$

$$v_k(x) = [1 - p_{D,k}(x)] v_{k|k-1}(x) + \sum_{z \in Z_k} \frac{p_{D,k}(x) g_k(z|x) v_{k|k-1}(x)}{\kappa_k(z) + \int p_{D,k}(\xi) g_k(z|\xi) v_{k|k-1}(\xi) d\xi} \quad (4)$$

其中公式中的相关符号的定义为  $\gamma_t(\cdot)$  为在时刻  $t$  瞬间出现的新的目标的有限集  $\Gamma_t$  的强度函数.  $\beta_{t|t-1}(\cdot|\zeta)$  为由  $t-1$  衍生的目标有限集  $B_{t|t-1}(\zeta)$  的强度函数.  $p_{s,t}(\zeta)$  为在前一时刻状态为  $\zeta$  在  $t$  时刻仍然存活的概率.  $p_{D,t}(x)$  为在  $t$  时刻的检测概率,  $\kappa_t(\cdot)$  为  $t$  时刻杂波有限集  $K_t$  的强度函数.

从式(3)~(4)可知 PHD 滤波器避免了传统跟踪方法中的“量测—航迹”的数据关联过程,提高了计算的实时性,而且 PHD 滤波器具有跟踪目标数未知或随时间变化的多目标跟踪的能力,能够同时递推地估计出目标数和目标状态.但 PHD 递推在一般意义上不存在解析解,数值积分的运算也存在着维数灾(curse of dimensionality)的计算问题.基于此本文推导给出在目标运动状态模型和传感器量测均为线性高斯条件下的 PHD 滤波器的解析解.

### 3 高斯混合概率假设密度滤波算法

#### 3.1 算法递推表达式

本节分析了在线性高斯情况下的多目标跟踪模型下的 PHD 滤波器的解析式,归纳给出高斯混合概率假设密度滤波算法(GMPHD).首先给出相关的前提条件和引理.

条件 4. 每个目标的状态模型,传感器量测均为线性高斯模型.即

$$f_{k|k-1}(x|\zeta) = N(x; \mathbf{F}_{k-1}\zeta, \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (5)$$

$$g_k(z|x) = N(z; \mathbf{H}_k x, \mathbf{R}_k) \quad (6)$$

其中  $N(\cdot; m, p)$  表示均值为  $m$  协方差为  $p$  的正态分布,  $\mathbf{F}_{k-1}$  为目标状态转移矩阵,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  为处理噪声的协方差,  $\mathbf{H}_k$  为量测矩阵,  $\mathbf{R}_k$  为量测噪声协方差.

条件 5. 目标的存活概率和目标的检测概率状态相互独立.即

$$p_{s,k}(x) = p_{s,k} \quad (7)$$

$$p_{D,k}(x) = p_{D,k} \quad (8)$$

条件 6. 新出现的目标和衍生的目标的强度函数可描述为若干高斯混合加权的形式,即

$$\gamma_k(x) = \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} \omega_{\gamma,k}^{(i)} N(x; m_{\gamma,k}^{(i)}, p_{\gamma,k}^{(i)}) \quad (9)$$

$$\beta_{k|k-1}(x|\zeta) = \sum_{j=1}^{J_{\beta,K}} \omega_{\beta,k}^{(j)} N(x; \mathbf{F}_{\beta,k-1}^{(j)}\zeta + d_{\beta,k-1}^{(j)}, \mathbf{Q}_{\beta,k-1}^{(j)}) \quad (10)$$

**引理 1.** 给定适当维数的  $\mathbf{F}, d, \mathbf{Q}, m, \mathbf{P}$  且  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  正定则有(证明略):

$$\int N(x; \mathbf{F}\zeta + d, \mathbf{Q}) N(\zeta; m, \mathbf{P}) d\zeta = N(x; \mathbf{F}m + d, \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T) \quad (11)$$

**引理 2.** 给定适当维数的  $\mathbf{H}, \mathbf{R}, m, \mathbf{P}$  且  $\mathbf{R}, \mathbf{P}$  正定则有(证明略):

$$N(z; \mathbf{H}x, \mathbf{R}) N(x; m, \mathbf{P}) = q(z) N(x; \tilde{m}, \tilde{\mathbf{P}}) \quad (12)$$

其中

$$q(z) = N(z; \mathbf{H}m, \mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T); \tilde{m} = m + \mathbf{K}(z - \mathbf{H}m), \tilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}; \mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}.$$

根据条件 4~6 以及引理 1 和引理 2,可以得出下面两个结论.

**推论 1.** 在满足条件 4~6 且假设多目标在  $k-1$  时刻的后验强度函数可表述为高斯混合的形式,即

$$v_{k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}} \omega_{k-1}^{(i)} N(x; m_{k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(i)}) \quad (13)$$

则在  $k$  时刻的多目标的预测强度函数也可表述为高斯混合的形式,即

$$v_{k|k-1}(x) = v_{S,k|k-1}(x) + v_{\beta,k|k-1}(x) + \gamma_k(x) \quad (14)$$

其中  $\gamma_k(x)$  由式(9)给出

$$v_{S,k|k-1}(x) = P_{S,k} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \omega_{k-1}^{(j)} N(x; m_{S,k|k-1}^{(j)}, \mathbf{P}_{S,k|k-1}^{(j)}),$$

$$m_{S,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{F}_{k-1} m_{k-1}^{(j)}; \mathbf{P}_{S,k|k-1}^{(j)} = \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^{(j)} \mathbf{F}_{k-1}^T,$$

$$v_{\beta,k|k-1}(x) = \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \sum_{l=1}^{J_{\beta,k}} \omega_{k-1}^{(j)} \omega_{\beta,k}^{(l)} N(x; m_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}, \mathbf{P}_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}),$$

$$m_{\beta,k|k-1}^{(j,l)} = \mathbf{F}_{\beta,k-1}^{(l)} m_{k-1}^{(j)} + d_{\beta,k-1}^{(l)},$$

$$\mathbf{P}_{\beta,k|k-1}^{(j,l)} = \mathbf{Q}_{\beta,k-1}^{(l)} + \mathbf{F}_{\beta,k-1}^{(l)} \mathbf{P}_{k-1}^{(j)} (\mathbf{F}_{\beta,k-1}^{(l)})^T.$$

**推论 2.** 在满足条件 4~6 且假设多目标在  $k$

的预测强度函数可表述为混合加权的高斯和的形式,即

$$v_{k|k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} \omega_{k|k-1}^{(i)} N(x; \mathbf{m}_{k|k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) \quad (15)$$

则在  $k$  时刻的多目标的后验强度函数也可表述为混合加权的高斯和的形式,即

$$v_k(x) = (1 - P_{D,k}) v_{k|k-1}(x) + \sum_{z \in Z_k} v_{D,k}(x; z) \quad (16)$$

其中

$$v_{D,k}(x; z) = \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} \omega_{k|k-1}^{(j)}(z) N(x; \mathbf{m}_{k|k}^{(j)}(z), \mathbf{P}_{k|k}^{(j)}),$$

$$\omega_{k|k}^{(j)}(z) = \frac{P_{D,k} \omega_{k|k-1}^{(j)} q_k^{(j)}(z)}{\kappa_k(z) + P_{D,k} \sum_{l=1}^{J_{k|k-1}} \omega_{k|k-1}^{(l)} q_k^{(l)}(z)},$$

$$q_k^{(j)}(z) = N(z; \mathbf{H}_k \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)}, \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{H}_k^T),$$

$$\mathbf{m}_{k|k}^{(j)}(z) = \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)} + \mathbf{K}_k^{(j)}(z - \mathbf{H}_k \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)}),$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{(j)} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{(j)} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)};$$

$$\mathbf{K}_k^{(j)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}.$$

由推论 1 把式(5)、(7)、(9)~(11)代入到式(3)中,用引理 1 中的结论知,可用某高斯分布来替代式(3)中的积分运算,同时由推论 2 和引理 1、2 的结论,把式(6)、(8)、(15)代入到式(4)中可取消(4)中的积分运算和两个高斯分布的乘积运算.由推论 1、2 可知若初始化的强度函数  $v_0$  可表述成混合加权的高斯和的形式,那么后续的预测和后验强度函数均可表述成该形式.

另外,根据推论 1 和推论 2 可得出当前时刻预测目标数和更新目标数的期望  $\hat{N}_{k|k-1}$  和  $\hat{N}_k$  计算,结论如下.

**推论 3.** 在推论 1 成立的情况下,  $k$  时刻目标数的预测的期望  $\hat{N}_{k|k-1}$  为

$$\hat{N}_{k|k-1} = \hat{N}_{k-1} (P_{S,k} + \sum_{j=1}^{J_{\beta,k}} \omega_{\beta,k}^{(j)}) + \sum_{j=1}^{J_{\gamma,k}} \omega_{\gamma,k}^{(j)} \quad (17)$$

**推论 4.** 在推论 2 成立的情况下,  $k$  时刻目标数的更新估计的期望  $\hat{N}_k$  为

$$\hat{N}_k = \hat{N}_{k|k-1} (1 - P_{D,k}) + \sum_{z \in Z_k} \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} \omega_k^{(j)}(z) \quad (18)$$

### 3.2 混合加权的高斯和部件的剪枝和合并

从推论 2 知在  $k$  时刻的后验强度函数需要的高斯分布的个数  $J_k = (J_{k-1} (1 + J_{\beta,k}) + J_{\gamma,k}) (1 + |Z_k|) = o(J_{k-1} |Z_k|)$ , 知  $J_k$  会随着时间没有边界的不断增长,因此在算法中需要对描述后验强度函数的高斯部件进行相应的处理,本文采用了两个步骤进行.

1. 对于权重小于阈值的高斯部件进行剪枝操作,直接除去该部件.

2. 对于分布性非常接近的高斯分布采取直接合并为一个高斯分布.

### 3.3 GMPHD 算法

下面给出 GMPHD 算法的完整描述.其中步 1 为初始化,步 2~6 为循环过程.

#### 算法 1. GMPHD 算法.

1. 根据目标可能的初始的起始位置,计算多目标的初

始概率假设密度  $v_0(x) = \sum_{i=1}^{J_0} \omega_0^{(i)} N(x; m_0^{(i)}, P_0^{(i)})$ ,  $k=0$ .

2. 根据  $k-1$  采样时刻假设密度预测  $k$  时刻的概率假设密度

For  $j=1, \dots, J_{\gamma,k}$ , 预测  $k$  时刻的可能新目标集的概率

假设密度  $\gamma_k(x) = \sum_{i=1}^{J_{\gamma,k}} \omega_{\gamma,k}^{(i)} N(x; m_{\gamma,k}^{(i)}, P_{\gamma,k}^{(i)});$

For  $j=1, \dots, J_{\beta,k}$ ,  $l=1, \dots, J_{k-1}$ , 预测衍生目标集的  $k$  时刻的概率假设密度

$$v_{\beta,k|k-1}(x) = \sum_{j=1}^{J_{\beta,k}} \sum_{l=1}^{J_{k-1}} \omega_{\beta,k}^{(j,l)} \omega_{\beta,k}^{(l)} N(x; m_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}, P_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}),$$

其中  $m_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}, P_{\beta,k|k-1}^{(j,l)}$  的计算见推论 1;

For  $j=1, \dots, J_{k-1}$ , 预测幸存目标  $k$  时刻的目标集的概率假设密度

$$v_{S,k|k-1}(x) = P_{S,k} \sum_{j=1}^{J_{k-1}} \omega_{S,k}^{(j)} N(x; m_{S,k|k-1}^{(j)}, P_{S,k|k-1}^{(j)}),$$

其中  $m_{S,k|k-1}^{(j)}, P_{S,k|k-1}^{(j)}$  的计算见推论 1;

预测概率假设密度的高斯分布的个数  $J_{k|k-1} = J_{\gamma} + J_{\beta} + J_{k-1|k-1}$ , 预测的概率假设密度

$$v_{k|k-1}(x) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} \omega_{k|k-1}^{(i)} N(x; m_{k|k-1}^{(i)}, P_{k|k-1}^{(i)}),$$

3. 根据步 2 中的预测与  $k$  时刻传感器的观测值更新  $k$  时刻的概率假设密度

For  $j=1, \dots, J_{k|k-1}$ , 计算预测概率假设密度中的  $J_{k|k-1}$  个高斯分布的增益和新息协方差等

$$\boldsymbol{\eta}_{k|k-1}^{(j)} = \mathbf{H}_k \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)} - \mathbf{S}_k^{(j)} = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{H}_k^T;$$

$$\mathbf{K}_k^{(j)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{S}_k^{(j)}]^{-1}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{(j)} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)};$$

For  $j=1, \dots, J_{k|k-1}$ , 根据传感器检测概率,考虑目标漏检时的更新

$$\omega_k^{(j)} = (1 - P_{D,k}) \omega_{k|k-1}^{(j)}; \mathbf{m}_k^{(j)} = \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)}; \mathbf{P}_k^{(j)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)};$$

For  $l=1, \dots, |Z_k|$ , 根据  $k$  时刻传感器的每个观测值与预测概率假设密度中的每个高斯分布进行更新计算

For  $j=1, \dots, J_{k|k-1}$

$$\omega_k^{(l|j|k-1+j)} = P_{D,k} \omega_{k|k-1}^{(j)} N(z; \boldsymbol{\eta}_{k|k-1}^{(j)}, \mathbf{S}_k^{(j)});$$

$$\mathbf{m}_k^{(l|j|k-1+j)} = \mathbf{m}_{k|k-1}^{(j)} + \mathbf{K}_k^{(j)}(z - \boldsymbol{\eta}_{k|k-1}^{(j)});$$

$$\mathbf{P}_k^{(l|j|k-1+j)} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{(j)};$$

For  $j=1, \dots, J_{k|k-1}$

$$\omega_k^{(l|j|k-1+j)} = \frac{\omega_{k|k-1}^{(j|k-1+j)}}{\kappa_k(z) + \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} \omega_k^{(l|j|k-1+i)}};$$

$$J_k = l J_{k|k-1} + J_{k|k-1}; \% \text{ Output } \{\omega_k^{(i)}, \mathbf{m}_k^{(i)}, \mathbf{P}_k^{(i)}\}_{i=1}^{J_k};$$

4. 概率假设密度中的高斯分布的剪枝和合并运算

$\% \tau$  为剪枝阈值,  $U$  为合并门限,  $J_{\max}$  为允许的最大的高斯分布的个数.

对更新得到的  $J_k$  个高斯分布, 进行剪枝, 对小于剪枝阈值的高斯分布直接删除

$$I = \{i=1, \dots, J_k \mid \omega_k^{(i)} > \tau\}; l=0;$$

高斯分布的合并: 对于分布非常接近的若干高斯分布进行合并, 用一个新的分布代替

While 集合  $I$  非空

$l := l+1; j = \arg \max_{i \in I} \omega_k^{(i)}$ , 从集合  $I$  中查找和元素  $j$  满足合并条件的所有元素, 即集合

$$L = \{i \in I \mid (\mathbf{m}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^{(j)}) (\mathbf{P}_k^{(i)})^{-1} (\mathbf{m}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^{(j)})^T \leq U\}$$

计算新的合并后的高斯分布即  $\tilde{\omega}_k^{(l)} = \frac{1}{\tilde{\omega}_k^{(l)}} \sum_{i \in L} \omega_k^{(i)} x_k^{(i)}$ ;

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^{(l)} = \frac{1}{\tilde{\omega}_k^{(l)}} \sum_{i \in L} \omega_k^{(i)} (\mathbf{P}_k^{(i)} + (\tilde{\mathbf{m}}_k^{(l)} - \mathbf{m}_k^{(i)}) (\tilde{\mathbf{m}}_k^{(l)} - \mathbf{m}_k^{(i)})^T);$$

从集合  $I$  中删除集合  $L$  中的元素  $I := I \setminus L$ ;

if  $l > J_{\max}$ , 则取权重最大的  $J_{\max}$  的高斯分布输出

Output  $\{\tilde{\omega}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{P}}_k^{(i)}\}_{i=1}^l$ .

5. 目标的数目与状态估计

根据  $\{\tilde{\omega}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{P}}_k^{(i)}\}_{i=1}^l$ ; Set  $\hat{X}_k = \emptyset$  得到目标的状态和数目

For  $i=1, \dots, J_k$ , 如果  $\omega_k^{(i)} > 0.5$ , 则

For  $j=1, \dots, \text{round}(\omega_k^{(i)})$

Update  $\hat{X}_k := [\hat{X}_k, \mathbf{m}_k^{(i)}]$ .

6. 输出目标估计集合  $\hat{X}$ , 集合  $\hat{X}$  元素的个数即为当前估计得到的目标个数.

## 4 实验仿真

为了验证算法的性能, 下面给出两组实验, 实验 1 验证 GMPHD 滤波算法在线性高斯模型下的目标跟踪, 实验 2 比较了在不同杂波强度和不同的检测概率的情况下 GMPHD 和 JPDA 滤波器的性能比较.

### 4.1 实验 1

实验环境构建在一个二维平面监控区域  $[-1000, 1000] \times [-1000, 1000]$  内, 在监控区域内目标的个数未知并且随着时间变化. 传感器位于平面内点  $(0, 0)$ , 并且存在着强的杂波和传感器漏检情况.

目标的状态为  $[x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T$ , 其中  $(x, y)$  表示目标的位置,  $(\dot{x}, \dot{y})$  为目标的速度. 目标在  $k$  时刻的存活概率  $P_{s,k} = 0.99$ , 目标的运动满足线性高斯模型(5)即

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_k = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} T^4/4 & T^3/2 & 0 & 0 \\ T^3/2 & T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^4/4 & T^3/2 \\ 0 & 0 & T^3/2 & T^2 \end{bmatrix},$$

其中  $\sigma_w = 0.2 \text{ (m/s}^2\text{)}$  为处理噪声的标准差. 新产生的目标的泊松有限集  $\Gamma_k(x)$  的强度函数  $\gamma_k(x) = 0.1N(x; \mathbf{m}_\gamma^{(1)}, \mathbf{P}_\gamma) + 0.1N(x; \mathbf{m}_\gamma^{(2)}, \mathbf{P}_\gamma) + 0.1N(x; \mathbf{m}_\gamma^{(3)}, \mathbf{P}_\gamma)$ , 其中

$$\mathbf{m}_\gamma^{(1)} = [50, 0, 50, 0]^T, \mathbf{m}_\gamma^{(2)} = [-150, 0, -150, 0]^T,$$

$$\mathbf{m}_\gamma^{(3)} = [150, 0, 150, 0]^T, \mathbf{P}_\gamma = \text{diag}([100, 25, 100, 25]^T).$$

从其它目标衍生的目标的泊松有限集  $B_{k|k-1}(\zeta)$  的强度函数  $\beta_{k|k-1}(x|\zeta) = 0.05N(x; \zeta, \mathbf{Q}_\beta)$ , 其中  $\mathbf{Q}_\beta = \text{diag}([100, 400, 100, 400]^T)$ .

传感器的检测概率为  $P_{D,k} = 0.98$  量测方程

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_k = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } \sigma_w = 10\text{m}$$

为量测噪声的标准差, 杂波的泊松有限集  $K_k$  的强度函数  $\kappa_k(z) = \lambda u(z)$ , 其中杂波强度  $\lambda = 50$ ,  $u(z)$  为在监控区域的一致分布. 且剪枝阈值  $\tau = 10^{-5}$ , 合并门限  $U = 4$ , 允许最大的高斯分布个数  $J_{\max} = 200$ .

图 1 为目标在监控区域运动真实的轨迹图, 其中“□”表示目标的起始点, “○”表示目标的终结点. 其中目标 4 为在  $k=11$  时刻从目标 2 衍生而来. 图 2 和图 4 分别描绘了在整个观测时间内量测数据和目标真实值. 图 3 和图 5 分别给出了 GMPHD 的滤波估计值和真实值的位置比较. 同时从图 3 和图 5 中可以看出在某一些时刻 GMPHD 产生了几个假目标的估计, 但这些假的目标很快消失. 图 6 给出了整个观测时间内 GMPHD 的目标数的估计值与实际目标数的对比, 从图中可知估计目标数基本与实际数目吻合, 只是有些时刻出现了一些假的目标估计, 但该假目标很快消失, 由实验结果知 GMPHD 在强的杂波环境具有很好的估计性能.

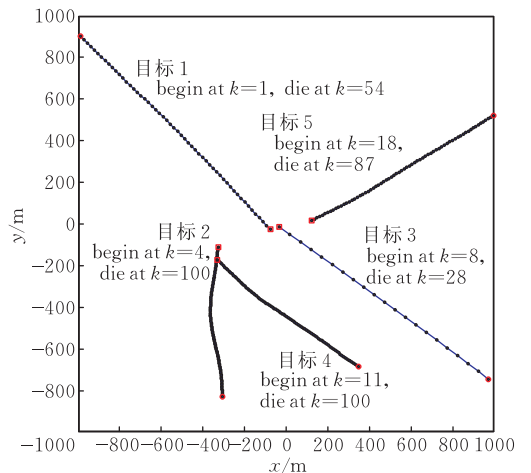


图 1 目标运动真实轨迹图

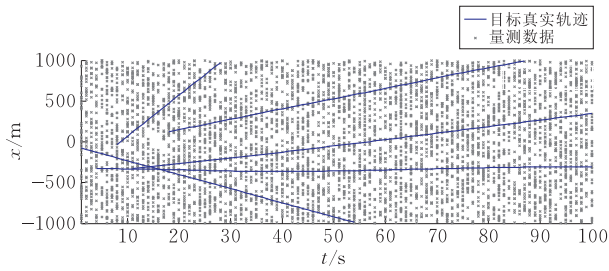


图 2 X 方向的量测和目标真实位置

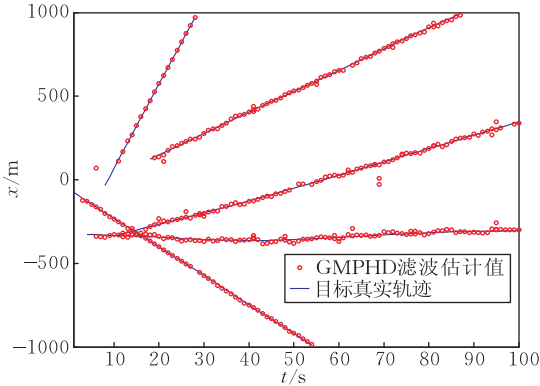


图 3 X 方向的滤波估计和目标真实位置

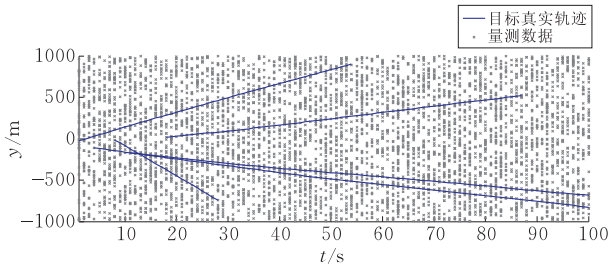


图 4 Y 方向的量测和目标真实位置

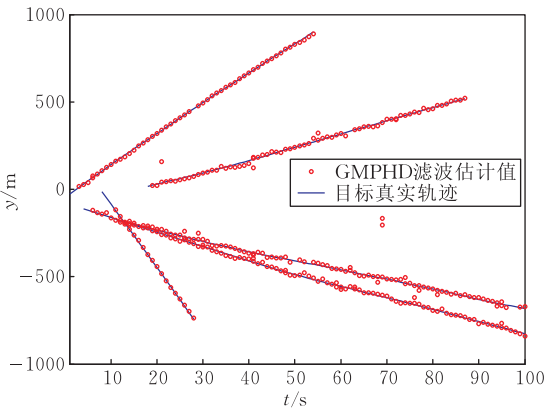


图 5 Y 方向的滤波估计和目标真实位置

## 4.2 实验 2

为了进一步验证 GMPHD 算法在杂波强度和检测概率变化情况下的滤波性能,实验 2 选取了传统跟踪方法中,对杂波环境下多目标数据关联的一种良好的算法——联合概率数据互联算法(JPDA),对在杂波强度和检测概率变化的情况下两者的性能比较。

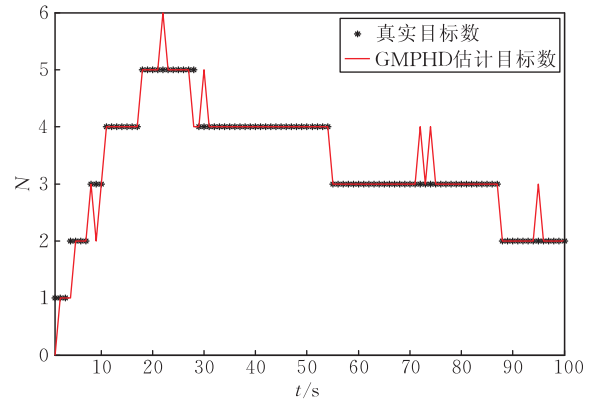


图 6 目标数估计和真实目标数比较

为了比较两者,对于 JPDA 使用 Kalman 滤波器结合的跟踪方法即 JPDA 滤波器.同时由于 JPDA 滤波器只能对目标已知且数目确定的多目标进行跟踪,所以实验 2 仿真了一种目标确定的多目标运动场景,为了比较分析性能.本文选用 CPEP(Circular Position Error Probability)来定义航迹丢失的平均

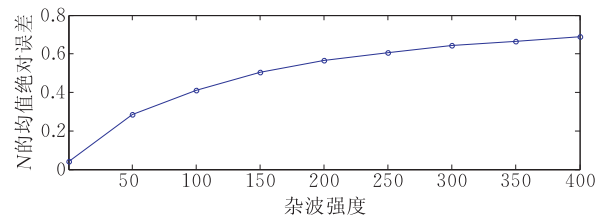
概率  $CPEP_k(r) = \frac{1}{|X_k|} \sum_{x \in X_k} \rho_k(x, r)$ , 其中  $\rho_k(x, r) =$

$Prob\{\|H\hat{x} - Hx\|_2 > r, \forall \hat{x} \in \hat{X}_k\}$ . 同时对 GMPHD 对目标数的估计给出了均值绝对误差  $E\{|\hat{X}_k| - |X_k|\}$ , 其中  $|X|$  表示集合  $X$  的个数. 下面给出实验的相关数据。

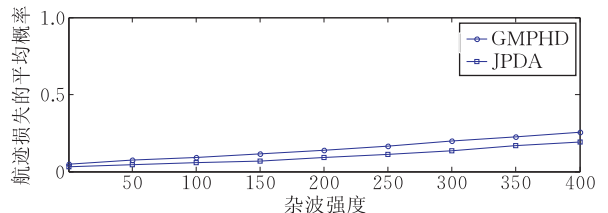
实验 2 的场景为两个固定的目标在位置  $[60; 2.5; 60; -12]$ ,  $[-152; 12; -150; -2.5]$  起始, 目标在  $k=100$  时终结. 其中  $r=20m$ . 其它相关参数同实验 1.

### (1) 杂波强度变换

图 7(b) 为杂波强度依次取不同值, 且检测概率



(a) N 的均值绝对误差



(b) 航迹丢失平均概率

图 7 杂波强度变换的 GMPHD 与 JPDA 性能比较

不变的情况下进行 100 次蒙特卡罗实验. 实验结果表明伴随着杂波强度的增强, GMPHD 和 JPDA 具有较为接近的性能, 但 GMPHD 还具有在线估计目标数的能力, 且从图 7(a) 中不难发现, 随着杂波的增强目标数的估计误差没有显著变化.

## (2) 检测概率变换

图 8(b) 为检测概率依次取不同值, 且杂波强度不变的情况下进行 100 次蒙特卡罗实验, 实验结果表明伴随着检测概率的减小, GMPHD 和 JPDA 在跟踪上的性能差距变大, JPDA 由于有目标数的先验知识因此对于检测概率的变化, 在目标丢失的平均概率上没有较大的变换. 相反 GMPHD 由于每步需要检测目标的数目, 因此随着检测概率的下降, 增加了 GMPHD 在目标检测上不确定, 如图 8(a) 所示 GMPHD 的目标估计的误差随着检测概率的下降而增强, 同时其跟踪性能也随着下降.

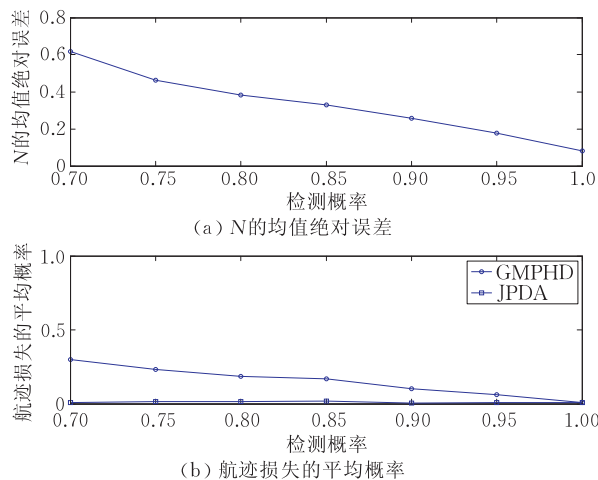


图 8 检测概率变换的 GMPHD 与 JPDA 性能比较

## 5 结论

本文基于随机有限集的多目标跟踪模型, 实现了在线性高斯情况下的概率假设密度滤波的一种解析滤波算法——高斯混合概率密度滤波算法 (Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter). 实验结果表明该算法不仅能够避免传统跟踪方法中的数据关联过程, 而且在密集杂波环境的情况下和 JPDA 滤波器有相近的状态估计性能, 同时在目标数未知或随时间变换的情况下, GMPHD 能实时地估计出当前的目标数, 这是传统跟踪方法如 JPDA 所不具备的能力. 因此 GMPHD 具有很好的研究和应用的前景.

另一方面从仿真实验中看到虽然 GMPHD 能

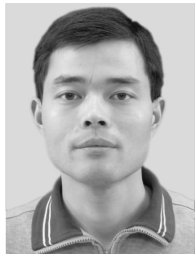
够实时地估计出当前的目标数, 但有些时刻仍会估计出一些假的目标估计, 且随着目标数目的增多, GMPHD 对目标数的估计误差会增大<sup>[6]</sup>. 这是由于算法中假设了目标数服从泊松分布. 本文中的跟踪算法只是使用了随机目标集的一阶统计量, 即文中的概率假设密度. 这样算法在跟踪过程中丢弃了目标的高阶的统计信息. 在每步的估计中, 对于目标数目的估计, 算法估计出当前的目标数目只是真实目标数目的一个统计意义上的期望值.

本文认为对于目标数估计的精度提高可以从两个方面加以改进. (1) 对本文的算法增加目标航迹处理的能力, 通过航迹起始、航迹终结等方法对形成稳定的目标航迹, 这样能够有效地提高目标数的估计精度. (2) 跟踪算法实现上尽可能地保留目标的高阶统计信息, 同时放宽算法成立的限制条件. 从点过程理论的研究角度, 可以适当地放宽目标数服从泊松过程的假设, 在目标数的估计上可以用目标数的概率分布函数来替代原算法推论 3 和推论 4 中的直接利用强度函数来计算的办法, 从点过程的角度结合强度函数和目标数的概率分布来提高算法的估计性能和精确性.

## 参 考 文 献

- [1] Mahler R. Multitarget Bayes filtering via first-order multi-target moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152-1178
- [2] Daley D J, Vere-Jones D. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. New York: Springer, 1988
- [3] Goodman I, Mahler R, Nguyen H. *Mathematics of Data Fusion*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997
- [4] Vo B, Ma W K. A closed-form solution to the probability hypothesis density filter//*Proceedings of the International Conference on Information Fusion*. Philadelphia, PA, 2005
- [5] Mahler R. A theory of PHD filters of higher order in target number//*Proceedings of the SPIE Defense Security Symposium on Signal Process, Sensor Fusion, Target Recognit*. XV, 2006, 6235: 62350K
- [6] Johansen A, Singh S, Doucet A, Vo B. Convergence of the SMC implementation of the PHD filter. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2006, 8(2): 265-291
- [7] Vo Ba-Tuong, Vo Ba-Ngu, Cantoni Antonio. Analytic implementations of the cardinalized probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3553-3567
- [8] Vihola M. Random sets for multitarget tracking and data association. Department Information Technology, Institute of Mathematics, Tampere University of Technology, Finland, 2004

- [9] Lin L, Bar-Shalom Y, Kirubarajan T. Track labeling and PHD filter for multitarget tracking. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(3): 778-795
- [10] Mahler Ronald P S. "Statistics 101" for multisensor, multi-target data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 19(1): 53-64
- [11] Mahler R. A theoretical foundation for the Stein-Winter probability hypothesis density (PHD) multi-target tracking approach//*Proceedings of the 2002 MSS Nat't Symposium on Sensor and Data Fusion*, 1, (Unclassified) Sandia Laboratories, San Antonio TX, 2000
- [12] Panta K, Vo B, Singh S, Doucet A. Probability hypothesis density filter versus multiple hypothesis tracking//*Proceedings of SPIE-Volume 5249 Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition*, XIII, Ivan Kadar, Editor, 2004: 284-295
- [13] Clark D, Bell J. Data association for the PHD filter//*Proceedings of the International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing*, 2005: 217-222
- [14] Punithakumar K, Kirubarajan T, Sinha A. A multiple model probability hypothesis density filter for tracking maneuvering targets//*Drummond O E ed. Signal and Data Processing of Small Targets, Proceedings of the SPIE 5428*. 2004: 113-121
- [15] Bar-Shalom Y, Li X R. *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*. Storrs, CT: YBS Publishing, 1995



**LV Xue-Bin**, born in 1976, Ph. D., lecturer. His research interests include multi-target tracking, data fusion.

**ZHOU Qun-Biao**, born in 1966, associate professor. His research interests include image processing, data fusion.

**CHEN Zheng-Mao**, born in 1973, lecturer. His research interests include image processing, data fusion.

**XIONG Yun-Yu**, born in 1979, Ph. D., lecturer. His research interests include multi-target tracking, data fusion.

**CAI Kui**, born in 1962, lecturer. His research interest is image processing.

## Background

This research, which is mainly on the technology of multi-target tracking based on random finite set (RFS) and point process theory, is supported by the National High Technology Research and Development Program (863 Program) of China (2006AA12A104).

The random finite set framework has recently emerged as a promising approach to multi-target tracking. Modeling set-valued states and set-valued observations as RFSs allows the problem of dynamically estimating multiple targets in the presence of clutter and association uncertainty to be cast in a Bayesian framework. This theoretically optimal approach to multi-target filtering is an elegant generalization of the single-target Bayes filter. Novel RFS-based filters such as the Probability Hypothesis Density (PHD) filter, and its implementation have generated substantial interests.

The focus of this paper is the PHD filter, a suboptimal but computationally tractable alternative to the multi-target Bayes filter. In PHD filtering, this combinatorial problem is circumvented by propagating only the first order moment of the multi-target posterior. However, the PHD recursion in-

volves multi-dimensional integrals that generally do not have closed-form solutions. Current PHD filter implementations are based on sequential Monte Carlo (SMC), a numerical integration method that can accurately approximate the PHD recursions given a sufficiently large number of particles. Due to its ability to handle the time-varying number of nonlinear targets with relatively low complexity, innovative extensions and applications of the SMC-PHD filter soon followed.

This paper proposes an analytic algorithm to the PHD recursion for linear Gaussian target dynamics with Gaussian births. The main contributions include: (1) Analyze multi-target tracking model based on random finite sets; (2) The Probability Hypothesis Density recursive formulas are deduced based on random sets and point process theory; (3) An analytic implementation of the Probability Hypothesis Density Filter is proposed under the linear gaussian assumptions; (4) Two simulation results validate GMPHD performance and then compare GMPHD and JPDA performance under clutter and detection probability change; (5) Point out some the algorithm's lack and research direction.