

基于相变和似然性的多相图像分割方法

刘纯平¹⁾ CHEN Fu-Hua²⁾ 龚声蓉¹⁾ 崔志明¹⁾ 刘全¹⁾

¹⁾(苏州大学计算机科学与技术学院 江苏 苏州 215006)

²⁾(佛罗里达大学数学系 佛罗里达 美国)

摘 要 Sine-Sinc 模型是一种基于材料科学中 Modica-Mortola 物理相变原理的多相图像分割方法. 针对该模型分割结果不完全、易受噪声和亮度不均匀性影响的问题, 提出了一个改进的 Sine-Exp-Gauss 多相图像分割模型. 基于 Sine-Sinc 模型, Sine-Exp-Gauss 模型用指数函数代替 Sine-Sinc 模型的 Sinc 函数, 并从分段常数图像假设推广到高斯分布函数图像假设; 模型偏微分方程的数值解采用凸函数分裂方法迭代, 获得每个相的局部最优解, 同时给出一种标准初始化方法使迭代过程易于收敛到理想局部极小值. 与 Sine-Sinc 模型和偏差矫正模型相比, 实验结果证明 Sine-Exp-Gauss 模型在噪声消除和自偏差矫正方面都更加鲁棒.

关键词 Sine-Sinc 模型; 多相图像分割; 物理相变; 似然性; 凸函数分裂

中图法分类号 TP391 **DOI 号:** 10.3724/SP.J.1016.2012.00375

Multiphase Image Segmentation Method Using Phase Transition and Likelihood

LIU Chun-Ping¹⁾ CHEN Fu-Hua²⁾ GONG Sheng-Rong¹⁾ CUI Zhi-Ming¹⁾ LIU Quan¹⁾

¹⁾(The School of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006)

²⁾(Department of Mathematics, University of Florida, Florida State, USA)

Abstract The Sine-Sinc model is a novel approach to multiphase image segmentation built upon the celebrated Modica-Mortola phase transition theory in material science. This model assumes the image to be piecewise constant. In this paper, the improved model, namely the Sine-Exp-Gauss model is proposed through replacing the Sinc function by the exponential function and extending the model to Gaussian-distribution-like image. Since the Sine-Exp-Gauss model is neither quadratic nor convex, for computation the implementation of the proposed model still adopts the convex-concave procedure (CCCP) that has been developed in the literatures of both computational nonlinear PDEs and neural computation based. Moreover, we choose normalization information of the original image as an initialization of the iterations so that it helps converge to the “true segmentation”. Experiments on both synthetic and real images are presented. Comparisons are carried out between the Sine-Exp-Gauss model and the Sine-Sinc model, as well as the bias-correction model. Experimental results demonstrate that the Sine-Exp-Gauss model is more robust in both denoising and bias-correction.

Keywords Sine-Sinc model; multiphase image segmentation; phase transition; likelihood; convex function splitting

收稿日期:2010-03-15;最终修改稿收到日期:2011-06-12. 本课题得到国家自然科学基金(60873116, 60970015, 61170124, 61170020, 61070223)、江苏省自然科学基金(BK2009116, BK2009593)、江苏省科技支撑计划项目(BE2009048)、江苏省高校自然科学基金项目(09KJA520002)、苏州市应用基础研究计划(SYG201116)资助. 刘纯平, 女, 1971 年生, 博士, 副教授, 中国计算机学会(CCF)会员, 主要研究方向为图像处理与分析、模式识别与计算机视觉、多源信息融合等. E-mail: cpliu@suda.edu.cn. CHEN Fu-Hua, 男, 1966 年生, 博士, 研究方向为基于偏微分方程和统计方法的图像处理和医学成像分析. 龚声蓉, 男, 1966 年生, 博士, 教授, 主要研究领域为多媒体通信、模式识别和机器视觉等. 崔志明, 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为医学图像处理、智能信息处理等. 刘全, 男, 1969 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为机器学习及自动推理等.

1 引 言

多相图像分割源于给定图像存在两个以上待识别目标的自动划分问题,是图像分割领域的研究难点和热点.常见图像分割方法主要包括直方图分析、区域生长、边缘检测以及基于偏微分方程(PDEs)方法 4 大类^[1-2].多相图像分割方法以基于 PDEs 和变分方法为主流^[3-10].这是因为该类方法的理论在物理、机械等其它领域已经比较成熟^[11].基于水平集(Level Set)方法是的一类主要多相图像分割模型.Osher 等人^[12]最早将其用于区域图像分割的边界演化.Shah 等人^[8]将简化的 Mumford-Shah 模型和水平集方法应用于分段常数两相图像分割,提出变分水平集 Chan-Vese 模型,取得很大成功^[6].随后水平集方法以不同方式被推广到多相图像分割^[13-19]中.多相与两相图像分割主要区别在于区域划分与表达,推广的方式可分为两类:(1)采用多个水平集函数,如用 N 个水平集函数表达 2^N 个相^[13-14,17-19]; (2)仍然采用单水平集函数,但对不同相赋予不同水平值^[15-16].基于水平集模型多相图像分割建立在分段常数假设上,即假设图像中每类灰度值都非常接近该类平均值,如分段常数 Chan-Vese 模型^[6]和 Potts 模型^[20].针对基于水平集多相图像分割结果为局部最优问题,基于不同松弛方法改进分段常数证明可取得全局最优解^[20-22].分段常数假设便于模型实现,但当图像灰度值与分段常数相差较大时,模型往往就会失效.因此一些研究者将模型中常数部分增加偏差,用 $c_i \times b(x)$ 替代第 i 类均值 c_i 进行改进^[23-26],但一般要求偏差 $b(x) \approx 1$ (如 $0.9 < b(x) < 1.1$),否则模型将失去分段常数优势.这种改进模型对低强度噪声或低对比度照明的不均匀图像分割效果良好,但当噪声强度较大,或光照不均匀性较强时,如 $b(x) > 1.1$ 或 $b(x) < 0.9$,分割效果明显下降.

最近 Modica-Mortola 物理相变原理被应用到多相图像分割^[27-29]中,其核心思想类似 Mumford-Shah 模型^[8],但存在两点不同:(1)边界长度表达采用了材料科学和流体力学中的相变原理;(2)用 $\text{sinc}(x)$ 函数近似代替特征函数,用凸函数分裂原理^[30],并结合 Γ 收敛理论^[31-32],保证模型收敛到局部极小值或鞍点,目标分割结果以迭代方式直接获得.而基于水平集方法需要先求出不同相的边界,通过赋予边界内常数的方法得到分割结果.

不管是基于水平集的还是基于物理相变模型的多相图像分割,它们都假设图像是分段常数.这种假设要求过强,根据 Brox 等人^[33]给出的分段光滑泛函的 Mumford-Shah 模型在统计学上的解释,可以将每个像素上的灰度值看作一个随机变量.分段常数模型可以理解成这样一个统计模型:即所有点的分布均为高斯分布,并且所有高斯分布都具有相同的方差且等于 $\sqrt{1/2\pi}$,即使这些点不属于同一个相.实际上不同方式获取的图像有不同概率分布,如果允许不同相所对应的高斯分布的方差为不同值且不固定,则这样的统计模型将更加健壮.其次在基于水平集多相图像分割中,不同相曲线演化方程之间的耦合造成曲线演化时间长,分割结果易受水平集函数初始值影响;物理相变模型取随机值为初始值^[27],使图像分割结果不完全,即不能获得真正需要的相的个数.此外基于水平集模型的图像分割区域与水平集函数没有直接对应关系,不便于目标检测,物理相变模型则可通过迭代直接获得分割结果.鉴于此,本文运用统计学原理,将高斯分布假设推广到分段常数图像分割模型,使应用范围和分割效率都得到增强;同时基于物理相变模型^[27]建立多相图像分割模型,由相变函数直接给出分割结果,使分割更加简易.由于物理相变模型能量函数不是凸函数,仍用文献^[27]中凸函数分裂原理(Convex-Concave Procedure, CCCP)^[30]以确保迭代收敛到局部极小值或鞍点.为使模型收敛到理想局部极小值,提高迭代收敛速度,结合相变函数原理,利用原图像信息设置相变函数初值.

本文第 2 节给出在指数函数和高斯分布假设下 Sine-Exp-Gauss 改进模型;第 3 节给出基于凸函数分裂原理的改进模型数值迭代方案;第 4 节给出 Sine-Exp-Gauss 模型多相图像分割方法;第 5 节给出图像分割实验,并与 Sine-Sinc 模型和偏差矫正模型^[23]实验结果比较;最后得出结论.

2 Sine-Exp-Gauss 模型

2.1 Sine-Sinc 模型

Jung 等人^[27]提出基于物理相变的 Sine-Sinc 模型,描述如下.设 Ω 为有界 Lipschitz 域,给定图像 $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.假定图像中有 K 相(类),每个相的对应区域为 $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{K-1}$,类别标签函数 $z(x)$ 和能量函数分别为

$$z(x) = k, \text{ 如果 } x \in \Omega_k (k = 0, 1, \dots, K-1) \quad (1)$$

$$E_\epsilon[z|u_0] = \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sin^2(\pi z) \right] dx + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \int_\Omega (C_k - u_0)^2 \text{sinc}^2(z - k) dx \quad (2)$$

其中 ϵ 是参数, 函数 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

为与文献[27]中符号保持一致, 下面仍然用 $F_\epsilon[z]$ 表示式(2)中第 1 项, 用 $G[z|u_0]$ 表示式(2)中第 2 项主体部分, 即

$$F_\epsilon[z] = \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sin^2(\pi z) \right] dx \quad (3)$$

$$G[z|u_0] = \sum_{k=0}^{K-1} \int_\Omega (C_k - u_0)^2 \text{sinc}^2(z - k) dx \quad (4)$$

式(2)简写为

$$E_\epsilon[z|u_0] = F_\epsilon[z] + \lambda G[z|u_0] \quad (5)$$

$F_\epsilon[z]$ 是界面扩散能量函数, Mordica 和 Mortola 证明了 $F_\epsilon[z]$ 函数 Γ 收敛到 $\frac{4}{\pi} \int_\Omega |Dz(x)|$ [34]. 因此式(3)实际是物体边界的一种近似. 当 ϵ 足够小时, 式(3)表示物体边界长度, 式(4)则驱使最终结果逼近分段常数. 因 Sine-Sinc 模型能量函数 $E_\epsilon[z|u_0]$ 是变量 z 的非凸函数, 文献[27]采用凸函数分裂算法(CCCP)[30]来极小化能量函数, 获得图像分割结果.

2.2 Sine-Exp-Gauss 模型

Sine-Sinc 模型假定图像为分段常数, 因此函数 $\text{sinc}(x)$ 实际上是特征函数的连续近似, 在 Sine-Sinc 模型中应用较好, 但将 Sine-Sinc 模型推广到高斯分布情形时, 因不便估计二阶导数上界, 无法使用凸函数分裂算法 CCCP. 为估计函数 $G[z|u_0]$ 上界, 用指数函数 $e^{-\alpha x^2}$ ($\alpha > 0$) 替代 $\text{sinc}(x)$ 函数, Sine-Sinc 模型能量函数变为

$$E_\epsilon[z|u_0] = F_\epsilon[z] + \lambda G[z|u_0] = \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sin^2(\pi z) \right] dx + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \int_\Omega (C_k - u_0)^2 e^{-\alpha(z-k)^2} dx \quad (6)$$

文中称式(6)表示的模型为 Sine-Exp 模型. 虽然指数函数实质仍是特征函数的一种光滑近似, 但与函数 $\text{sinc}(x)$ 相比, 指数函数更易估计函数 $G[z|u_0]$ 上界, 有利于借助 CCCP 算法的数值迭代. Sine-Exp 模型受指数函数参数 α 大小影响. 当 α 较大时, 相邻两类区分性明显, 但易造成误分; 当 α 较小时, 可减少误分, 但相邻两类区分性不明显. 因此基于该模型的多相图像分割需要通过调节参数 α 改善图像

分割能力.

Sine-Sinc 模型和 Sine-Exp 模型并没有脱离分段常数的假设, 容易把灰度很接近的点划分为一类. 为让 Sine-Exp 模型适合高斯分布图像分割, 假设原图像中每个像素的灰度值呈现高斯分布, 进一步将 Sine-Exp 模型推广到高斯分布图像, 从而建立 Sine-Exp-Gauss 模型.

由于光照和噪声影响, 相同物体的灰度值可能不同; 同时有着相近均方差, 不同均值的物体可能是一类, 因此将均方差引入到建模中. 设灰度强度函数 $u_0(x)$ 在像素点 x 处是满足高斯分布的随机变量, 每个区域 Ω_k ($k=0, 1, \dots, K-1$) 高斯分布的均值 c_k 和方差 σ_k^2 参数相同, 对 $x \in \Omega_k$, 随机变量 $u_0(x)$ 高斯密度函数为

$$P(u_0(x) | c_k, \sigma_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(u_0(x)-c_k)^2}{2\sigma_k^2}}, \quad k=0, 1, \dots, K-1 \quad (7)$$

进一步假设所有随机变量都相互独立, 则联合概率密度函数, 即似然函数为

$$L(c, \sigma) = P(\{u_0(x), x \in \Omega\} | c, \sigma) = \prod_{k=0}^{K-1} P(\{u_0(x), x \in \Omega_k\} | c_k, \sigma_k) = \prod_{k=0}^{K-1} \prod_{x \in \Omega_k} P(u_0(x) | c_k, \sigma_k) = \prod_{k=0}^{K-1} \prod_{x \in \Omega_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(u_0(x)-c_k)^2}{2\sigma_k^2}} \quad (8)$$

对式(8)取负对数, 可以得到

$$-\log L(c, \sigma) = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega_k} \left(\log \sqrt{2\pi}\sigma_k + \frac{(c_k - u_0(x))^2}{2\sigma_k^2} \right) dx = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega} \left(\log \sqrt{2\pi}\sigma_k + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right) 1_{\Omega_k} dx \quad (9)$$

其中 $c = (c_0, c_1, \dots, c_{K-1})$, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{K-1})$, 1_{Ω_k} 代表 Ω_k 上的特征函数. 用 $e^{-\alpha(z(x)-k)^2}$ 逼近特征函数 1_{Ω_k} , 式(9)似然函数 $L(u_0)$ 表达式为

$$L(u_0) = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega} \left(\log \sqrt{2\pi}\sigma_k + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right) e^{-\alpha(z(x)-k)^2} dx \quad (10)$$

用式(10)替换 Sine-Exp 模型能量函数 $E_\epsilon[z|u_0]$ 第 2 部分 $G[z|u_0]$, 其能量函数为

$$E_\epsilon[z|u_0] = F_\epsilon[z] + \lambda G[z|u_0] = \int_\Omega \left[\epsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sin^2(\pi z) \right] dx + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \int_\Omega \left(\log \sqrt{2\pi}\sigma_k + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right) e^{-\alpha(z(x)-k)^2} dx \quad (11)$$

式(11)则为 Sine-Exp-Gauss 模型能量函数. 如果取 $\sigma_k (k=0, 1, \dots, K-1)$ 均为常数 $1/\sqrt{2\pi}$, 并把指数函数改为 $\text{sinc}(x)$, 则 Sine-Exp-Gauss 模型就是 Sine-Sinc 模型. 因此 Sine-Exp-Gauss 模型是基于 Modica-Mortola 物理相变原理的, 只是 Sine-Sinc 模型的特征函数是基于原始图像和分段常数图像的微分近似, 而 Sine-Exp-Gauss 模型的特征函数是基于指数函数和高斯分布图像的近似. 前者驱动边界扩散逼近分段函数, 后者驱动边界扩散逼近高斯函数.

3 Sine-Exp-Gauss 模型的数值算法

Sine-Exp-Gauss 模型改进了边界扩散逼近函数, 但能量函数 $E_\epsilon[z|u_0]$ 本质没有发生任何改变, 依然是关于变量 z 的非凸函数. 因此模型数值迭代仍采用 CCCP 方法^[30].

3.1 CCCP 方法简介

在优化论里凸函数是最理想的. CCCP 方法是 Yuille 和 Rangarajan 等人^[30]提出的一种优化技术. 其核心思想是将非凸函数分解成两个凸函数之差, 从而进行优化. 这一方法可以在任何优化问题中应用, 许多现有的优化算法也可以利用 CCCP 来解释. 下面的定理 1、定理 2 和性质 1 总结了 CCCP 方法的重要结论.

定理 1. 设能量函数 $E(\vec{x})$ 具有海森 (Hessian) 边界, 则该能量函数总可以分解为一个凸函数和一个凹函数之和来表示.

定理 1 表明, 只要具有海森边界, 任何函数可以表示为凸函数和凹函数两部分之和, 而且这个分解不是唯一的. 正因为这一点, CCCP 方法才可以应用于任何优化问题中^[30].

定理 2. 设能量函数 $E(\vec{x})$ 下有界且可以表示成一个凸函数和一个凹函数之和, 即 $E(\vec{x}) = E_{\text{vex}}(\vec{x}) + E_{\text{cave}}(\vec{x})$, 这里 $E_{\text{vex}}(\vec{x})$ 和 $E_{\text{cave}}(\vec{x})$ 分别表示 \vec{x} 的凸函数和凹函数, 那么离散迭代 CCCP 算法:

$$\nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) = -\nabla E_{\text{cave}}(\vec{x}^t), t=0, 1, \dots \quad (12)$$

能保证能量 $E(\vec{x})$ 单调递减到一个局部极小值或鞍点.

证明. 给定 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$, 根据凸函数 $E_{\text{vex}}(\vec{x})$ 和凹函数 $E_{\text{cave}}(\vec{x})$ 的凸性和凹度, 可以得到

$$E_{\text{vex}}(\vec{x}_2) \geq E_{\text{vex}}(\vec{x}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}_1),$$

$$E_{\text{cave}}(\vec{x}_4) \leq E_{\text{cave}}(\vec{x}_3) + (\vec{x}_4 - \vec{x}_3) \cdot \nabla E_{\text{cave}}(\vec{x}_3).$$

设 $\vec{x}_1 = \vec{x}^{t+1} = \vec{x}_4, \vec{x}_2 = \vec{x}^t = \vec{x}_3$, 上面两个不等式

可变成

$$E_{\text{vex}}(\vec{x}^t) \geq E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) + (\vec{x}^t - \vec{x}^{t+1}) \cdot \nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}),$$

$$E_{\text{cave}}(\vec{x}^{t+1}) \leq E_{\text{cave}}(\vec{x}^t) + (\vec{x}^{t+1} - \vec{x}^t) \cdot \nabla E_{\text{cave}}(\vec{x}^t).$$

将凸性不等式变形可有

$$E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) \leq E_{\text{vex}}(\vec{x}^t) + (-\vec{x}^t + \vec{x}^{t+1}) \cdot \nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}).$$

从获得的凸性不等式和凹度不等式可以得到

$$E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) + E_{\text{cave}}(\vec{x}^{t+1}) \leq E_{\text{vex}}(\vec{x}^t) + E_{\text{cave}}(\vec{x}^t) + (\vec{x}^{t+1} - \vec{x}^t) \cdot (\nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) + \nabla E_{\text{cave}}(\vec{x}^t)),$$

又因为 $\nabla E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) = -\nabla E_{\text{cave}}(\vec{x}^t)$, $t=0, 1, \dots$,

所以可以获得

$$E_{\text{vex}}(\vec{x}^{t+1}) + E_{\text{cave}}(\vec{x}^{t+1}) \leq E_{\text{vex}}(\vec{x}^t) + E_{\text{cave}}(\vec{x}^t).$$

这样就证明了定理 2 可以保证能量 $E(\vec{x})$ 单调递减到一个局部极小值或鞍点. 证毕.

性质 1. 设 $f \in C^2(R)$, 且 $F(u) = \int_{\Omega} f(u(x)) dx$.

如果存在 $\gamma > 0$ 使得 $f'' \leq \gamma$, $F(u)$ 的分裂如下:

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{\gamma}{2} u^2 dx - \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma}{2} u^2 - f(u) \right) dx := F^1(u) - F^2(u) \quad (13)$$

如果存在 $\gamma > 0$ 使得 $f'' \geq -\gamma$, $F(u)$ 的分裂如下:

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma}{2} u^2 + f(u) \right) dx - \int_{\Omega} \frac{\gamma}{2} u^2 dx := F^1(u) - F^2(u) \quad (14)$$

那么, 对上述两种情形中的任何一种, $F^1(u)$ 和 $F^2(u)$ 均为凸函数.

该性质的证明很简单. 只要通过交换导数与积分的次序就很容易发现, 第 1 种情形 $(F^2)''(u) \geq 0$, 第 2 种情形 $(F^1)''(u) \geq 0$.

如果一个函数 f 是一个凸函数, 那么函数 $F(u) = \int_{\Omega} f(u(x)) dx$ 也是一个凸函数, 并且满足性质 1.

3.2 数值迭代方案

按照 CCCP 算法原理, Sine-Exp-Gauss 模型数值求解需要首先将能量函数(式(11))中的 $F_\epsilon[z]$ 和 $G[z|u_0]$ 分别分裂为凸函数之和, 然后求解标签函数 z^{n+1} . 经过 CCCP 方法分裂之后, Sine-Exp-Gauss 模型的能量函数就转变为

$$(F^1 + \lambda G^1)'(z^{n+1}) = (F^2 + \lambda G^2)'(z^n) \quad (15)$$

其中 F^1, F^2, G^1, G^2 为分裂的凸函数, 导数为泛函导数(或 Frechet 导数).

用偏微分方程来表示式(15)(推导见附录), 则 Sine-Exp-Gauss 模型数值迭代公式为

$$\left(8\epsilon + \frac{\pi}{\epsilon} \left(\frac{\sin(2\pi z_{i,j}^n)}{z_{i,j}^n} + 2\pi \right) \right) z_{i,j}^{n+1} + \left(4e^{-1.5} \lambda \alpha \sum_{k=0}^{K-1} \left(\log \sqrt{2\pi} \sigma_k + \frac{|u_{i,j} - c_k|^2}{2\sigma_k^2} \right) \right) z_{i,j}^{n+1} =$$

$$2\epsilon(z_{i,j}^n + z_{i,j-1}^n + z_{i+1,j}^n + z_{i,j+1}^n) + \frac{2\pi^2}{\epsilon} z_{i,j}^n + \lambda \alpha \sum_{k=0}^{K-1} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|u_{i,j} - c_k|^2}{2\sigma_k^2} \right) \cdot (4e^{-1.5} z_{i,j}^n + 2(z_{i,j}^n - k) e^{-\alpha(z_{i,j}^n - k)^2}) \quad (16)$$

在 Sine-Exp-Gauss 模型中有 3 组参数待定, 即均值 $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{K-1})$, 标准偏差 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{K-1})$ 和标签函数 $z(x)$. 假设均值、标准偏差和标签函数这 3 组变量相互独立, 计算 Sine-Exp-Gauss 模型的能量函数 $E_\epsilon[z, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma} | u_0]$ 就变成优化下列 3 个条件能量函数: $E_\epsilon[z | \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}, u_0]$ 、 $E_\epsilon[\mathbf{c} | z, \boldsymbol{\sigma}, u_0]$ 和 $E_\epsilon[\boldsymbol{\sigma} | z, \mathbf{c}, u_0]$.

$$c^n = \arg \min E_\epsilon[\mathbf{c} | \boldsymbol{\sigma}^n, z^n, u_0] \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \arg \min E_\epsilon[\boldsymbol{\sigma} | c^n, z^n, u_0] \quad (18)$$

$$z^{n+1} = \arg \min E_\epsilon[z | c^n, \boldsymbol{\sigma}^n, u_0] \quad (19)$$

因此求标签函数 z^{n+1} , 可以对式(17)、(18)和式(19)按 $z^n \rightarrow c^n \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^n \rightarrow z^{n+1}$ 次序交叉迭代进行求解, 获得标签函数的局部最优解. 迭代的关键是保证能量函数具有单调下降的性质, Vogel 证明了这种迭代顺序能保证能量函数单调下降, 即 $E_\epsilon[z^{n+1}, c^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1} | u_0] \leq E_\epsilon[z^n, c^n, \boldsymbol{\sigma}^n | u_0]$ [35].

4 Sine-Exp-Gauss 模型多相图像分割

4.1 标签函数初始化

根据定理 2, Sine-Exp-Gauss 模型的迭代方案可以保证收敛到局部极小值或者鞍点, 但由于文献[27]采用随机值作为标签函数初始值, 在实际应用中收敛的极小值或鞍点可能并不是理想结果, 如图像 K 相(类)分割, 最终结果可能少于 K 相(类). 多相图像分割实质是希望标签函数 $z_0(x)$ 的值域在 0 到 $K-1$ 之间, 这样分割结果是一个取值 0 到 $K-1$ 之间的分段常数函数经适当光滑后的结果, 因此提出基于原始图像信息的初始化策略.

给定图像 $u_0(x)$, 定义标签函数 $z(x)$ 初始函数 $z_0(x) = \frac{\bar{u}_0(x) - m}{M - m} K$. 这里 M 和 m 分别为 $\bar{u}_0(x)$ 的最大值和最小值, $\bar{u}_0(x)$ 是 $u_0(x)$ 经适当光滑后的函数(如采用高斯卷积).

由于初始值 $z_0(x)$ 实际上是原图像经光滑后再进行平移和拉伸的结果, 由定理 2 可知, Sine-Exp-Gauss 模型在用图像原始信息初始化后, 按 $z^n \rightarrow c^n \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^n \rightarrow z^{n+1}$ 次序迭代保证能量 $E_\epsilon[z^{n+1}, c^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1} | u_0] \leq E_\epsilon[z^n, c^n, \boldsymbol{\sigma}^n | u_0]$ 单调下降, 可保证迭代

收敛. 由于初始值实际上是原图像经光滑后再进行平移和拉伸后的结果, 因此该初始值比随机值更接近理想分割结果, 可以减少迭代次数而加快迭代速度, 利于收敛到所希望的相数.

4.2 分割决策及后处理

当迭代稳定时, 采用硬决策法则进行相的分割. 硬决策法则为

$$x \in \Omega_k, \text{ 若 } k - \frac{1}{2} \leq z(x) < k + \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (20)$$

在采用硬分类之后, 可能出现在某些物体内部或背景出现不应有的瑕点, 可以用形态学方法进行分割图像后处理操作将其去掉.

4.3 算法步骤

Sine-Exp-Gauss 模型图像分割算法.

1. 输入待分割图像 $u_0(x)$, 设定相的个数 K , 参数 ϵ, λ 和 α 以及最大迭代次数 N 和阈值 T .
2. 初始化标签函数 $z(x)$.
 - 2.1. 用高斯卷积平滑待分割图像 $u_0(x)$, 得到平滑图像 $\bar{u}_0(x)$;
 - 2.2. 用 $z_0(x) = \frac{\bar{u}_0(x) - m}{M - m} K$ 设定 $z(x)$ 的初始值.
 - 2.3. 迭代过程: 设 $n=0$, 用 CCCP 程序, 按 $z^n \rightarrow c^n \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^n \rightarrow z^{n+1}$ 次序进行迭代:
 - 3.1. 用式(21)求图像 $\bar{u}_0(x)$ 均值 c^n :

$$c_k = \frac{\sum_i \sum_j u_0^{i,j} e^{-\alpha(z_{i,j} - k)^2}}{\sum_i \sum_j e^{-\alpha(z_{i,j} - k)^2}}, k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (21)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_i \sum_j (u_0^{i,j} - c_k)^2 e^{-\alpha(z_{i,j} - k)^2}}{\sum_i \sum_j e^{-\alpha(z_{i,j} - k)^2}}, k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (22)$$

这里 $z_{i,j}$ 和 $u_0^{i,j}$ 分别代表图像 $z(x)$ 和 $u_0(x)$ 在 (i, j) 像素处的值;

- 3.2. 用式(22)求图像 $\bar{u}_0(x)$ 标准偏差 $\boldsymbol{\sigma}^n$;
- 3.3. $n = n + 1$, 更新标签函数 z^n (式(19));
- 3.4. 若 $E_\epsilon[z^{n+1}, c^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1} | u_0] - E_\epsilon[z^n, c^n, \boldsymbol{\sigma}^n | u_0] \leq T$, 迭代停止, 转入步 4; 否则返回步 3.1.
4. 图像分割(式(20)), 输出分割图像.

5 实验结果与分析

实验分别是以人工合成图像和真实图像为实例, 并与 Sine-Sinc 模型和偏差矫正模型 [23] 进行比较. 从 Sine-Exp-Gauss 模型多相图像分割方法的抗噪性和自偏差矫正两个方面进行分析.

5.1 抗噪声性能测试

为验证提出的 Sine-Exp-Gauss 模型图像分割在抗噪性能方面的有效性,用无噪声图像和加高斯噪声的图像进行实验. 其中图 1 和图 3 的结果进行

了阈值化处理. 为了使比较更具准确性,图 2 的分割结果没有进行包括阈值处理在内的任何后处理. 在下面的实验中相的个数均取 $K=3$.

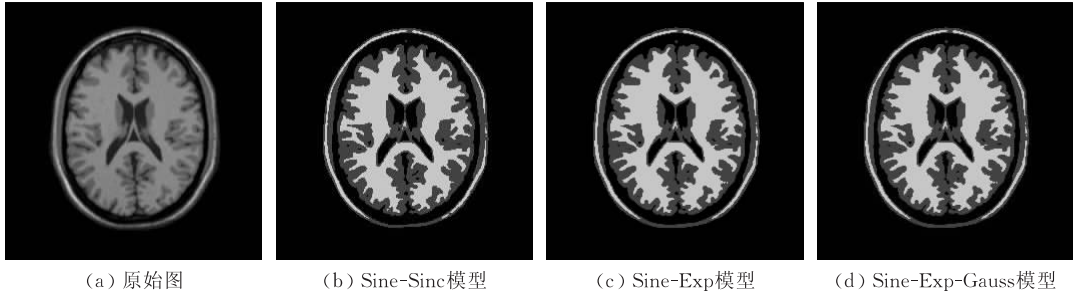


图 1 人脑切片无噪声图像及三种模型分割结果



图 2 合成图像分割噪声对比((b)、(c)、(d)为 Sine-Sinc 模型结果;(f)、(g)、(h)为 Sine-Exp-Gauss 模型结果)

图 1 给出了 Sine-Sinc、Sine-Exp 和 Sine-Exp-Gauss 3 个模型在无噪声图像分割中的 3 相分割结果. 其中 Sine-Sinc 和 Sine-Exp 模型中 $\lambda=150$, Sine-Exp-Gauss 模型中 $\lambda=5000$, Sine-Exp 模型中 $\alpha=5$, Sine-Exp-Gauss 模型中 $\alpha=15$. 由于图像本身不存在噪声,从图 1(b)、(c)和(d)中可以发现 3 个模型在分割结果上几乎没有任何差别,3 个模型具有一致的图像分割精度. 这说明基于指数函数和高斯分布的 Sine-Exp-Gauss 模型在理想的图像质量下可以准确分割多相图像,和 Sine-Sinc 模型一样是一个有效的多相图像分割模型.

为了进一步分析提出模型对噪声不敏感的性质,实验先从人为添加噪声的合成图像入手,验证 Sine-Exp-Gauss 模型对噪声的抗干扰性. 实验分别用 Sine-Sinc 和 Sine-Exp-Gauss 模型对图 2(e)进

行 3 相图像分割. 人工合成图像 Sine-Sinc 模型和 Sine-Exp-Gauss 模型对有噪声 3 相图像的分割结果见图 2 所示. 图 2(a)为原始图像,图 2(e)为在图 2(a)上加上噪声的图像,图 2(b)、(c)和(d)分别为用 Sine-Sinc 模型进行的 3 相分割结果,图 2(f)、(g)和(h)分别为 Sine-Exp-Gauss 模型的 3 相分割结果. 从结果中可以看出, Sine-Sinc 模型分割结果中仍然有很多较强噪声没有被消除,而 Sine-Exp-Gauss 模型可以很好地分割图像,分割结果中几乎没有噪声点. 实验结果表明 Sine-Exp-Gauss 模型对噪声不敏感.

为进一步验证 Sine-Exp-Gauss 模型在噪声图像中的分割精度,图 3 给出了真实图像分割实验对比结果. 图 3(a)是在图 1(a)上叠加 $m=0, \sigma^2=0.005$ 高斯噪声图像,图 3(b)、(c)和(d)分别为 Sine-Sinc、Sine-Exp 和 Sine-Exp-Gauss 模型分割

结果. 前两个模型中 $\lambda=150$, 最后一个模型中 $\lambda=5$, Sine-Exp 模型 $\alpha=5$, Sine-Exp-Gauss 模型 $\alpha=0.5$. 从图 3 中可以发现, 对于多相噪声图像分割, Sine-Sinc、Sine-Exp 模型分割结果都有噪声存在(图 3(b)、(c)), 但 Sine-Exp 模型和 Sine-Exp-Gauss 模型的分割结果明显好于 Sine-Sinc 模型, 而 Sine-Exp-Gauss 模型的结果几乎没有噪声(图 3(d)), 和图 1(d)无噪声图像多相分割结果一致. 因此 Sine-Sinc 模型对噪声比较敏感, 在分割结果中受到噪声干扰,

导致图像中存在一些错误的分割结果. 改进的两种模型, 对含噪声图像分割则具有一定的稳健性, 在一定程度上消除了由噪声所产生的不规则点集, 从而使分割结果减少了噪声的干扰, 确保了分割结果的有效性. 从分割效果图来看, Sine-Exp-Gauss 模型更优于 Sine-Exp 模型(图 3(c)、(d)). 图 3(c)中含有的噪声点比图 3(d)中明显要多, 这说明 Sine-Exp-Gauss 模型在图像分割精度保持不变的情况下, 对噪声干扰具有更好的鲁棒性.

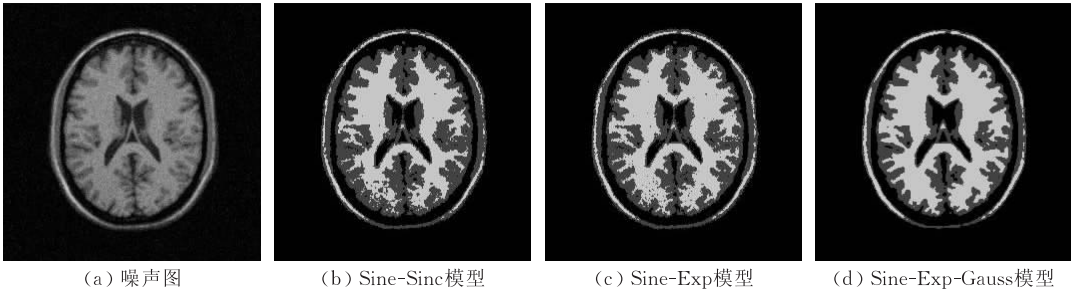


图 3 人脑切片有噪声图像分割结果

5.2 偏差矫正性能测试

现有多相图像分割方法大多以摄像环境不存在有偏场为前提, 但实际摄像环境普遍存在有偏场, 也就是所谓的偏置场. 偏置场是对背景附加的缓慢变化随机噪声, 使得目标图像像素的灰度具有不一致性. 这一原因往往会导致图像分割误差较大, 分割精

度下降. 现有解决策略是利用偏差矫正模型对此类图像进行分割. 下面通过实验分析 Sine-Exp-Gauss 模型的自偏差矫正性能. 图 4、图 5 和图 6 的图像分割结果均没有进行包含阈值处理在内的任何后处理操作. 图 4、图 5 实验相的个数均取 $K=3$, 图 6 实验相的个数取 $K=2$.

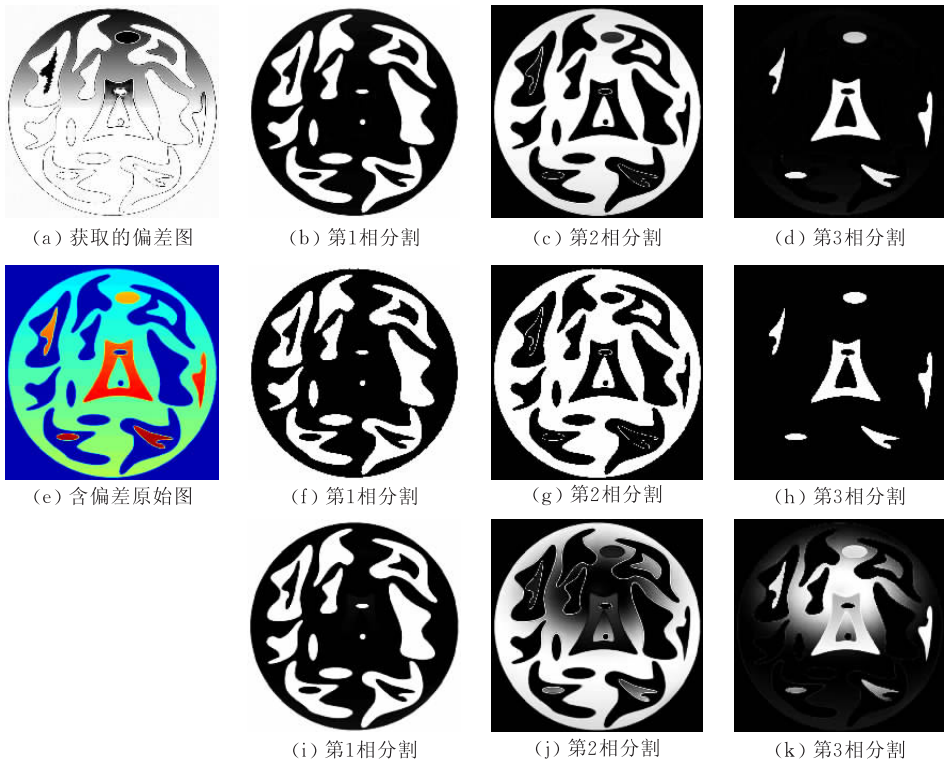


图 4 偏差矫正模型^[23]((b)、(c)、(d)), Sine-Exp-Gauss 模型((f)、(g)、(h))与 Sine-Sinc 模型((i)、(j)、(k))对合成偏差图像分割结果比较

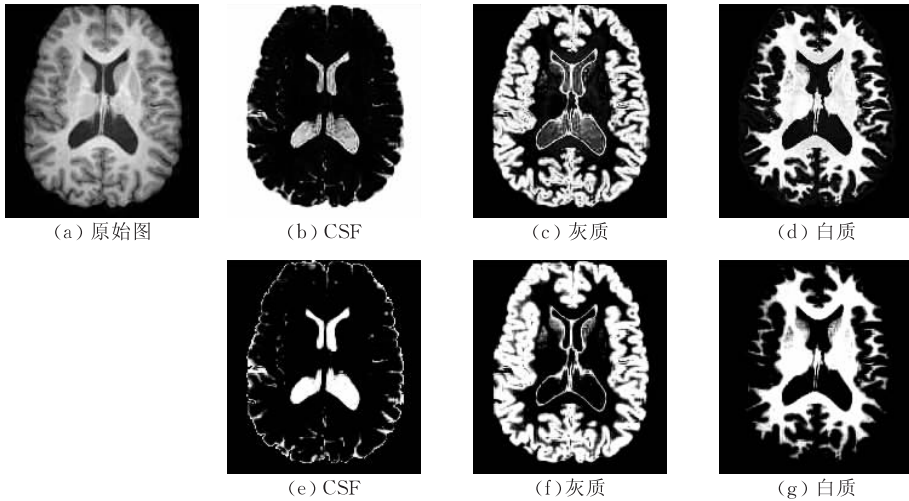


图 5 Sine-Sinc 模型((b)、(c)、(d))和 Sine-Exp-Gauss 模型((e)、(f)、(g))的 MRI 图像分割结果对比

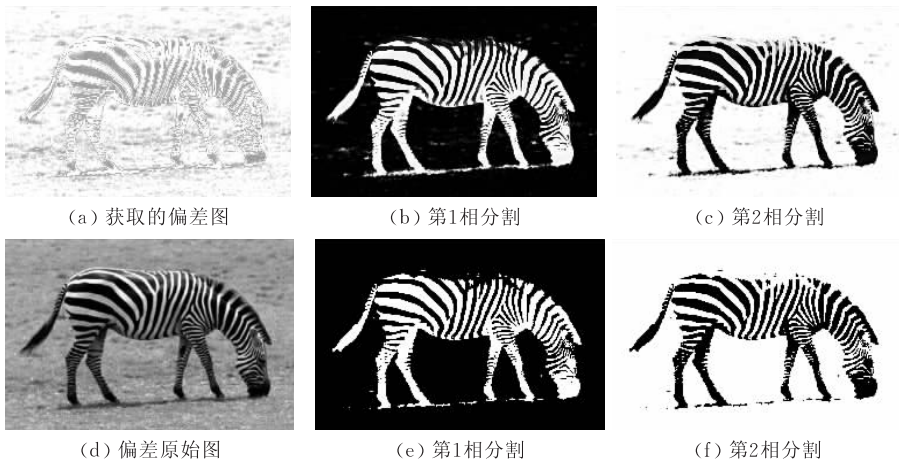


图 6 偏差矫正模型^[23]((b)、(c))与 Sine-Exp-Gauss 模型((e)、(f))真实图像分割的比较

图 4 给出了一个人为添加偏差后的多相图像分割实验结果比较. 图 4(e)是对图 2(a)添加偏差而合成的带有偏差的原始图像,其中偏差系数大于 1.1. 图 4(a)是偏差矫正模型^[23]进行矫正后得到的偏差场图像. 图 4(b)、(c)和(d)是偏差矫正模型分割的 3 相分割结果,图 4(f)、(g)和(h)是 Sine-Exp-Gauss 模型得到的 3 相分割结果. 图 4(i)、(j)和(k)是 Sine-Sinc 模型得到的 3 相分割结果. 从图 4 所给的 3 种模型分割结果来看,尽管偏差模型是针对图像偏差而设计的,但在分割结果中仍然存在一些偏差(图 4(d)),Sine-Sinc 模型分割的第 2 相和第 3 相均出现明显的偏差(图 4(j)和(k)),而 Sine-Exp-Gauss 模型图像分割结果中,由于模型是基于高斯分布的,分割图像中的偏差却不复存在. 因此,Sine-Exp-Gauss 模型在自偏差矫正中有着良好的性能.

Sine-Sinc 和 Sine-Exp-Gauss 模型真实 MRI 图像分割结果见图 5. 图 5(a)为原始 MRI 图像,图 5

(b)~(d)为 Sine-Sinc 模型分割结果,其中图 5(b)、(c)和(d)分别为分割后的 CSF(Cerebrospinal Fluid)、灰质和白质;图 5(e)、(f)和(g)依次为 Sine-Exp-Gauss 模型分割获得的 CSF、灰质和白质的结果. 从结果看,Sine-Exp-Gauss 模型的结果更加光滑,且更接近硬分割结果.

为验证 Sine-Exp-Gauss 模型在多相图像分割偏差自矫正性能的广泛性,图 6 给出了偏差矫正模型与 Sine-Exp-Gauss 模型在自然风景图像分割中的实验结果. 图 6(d)是原始图像,图 6(e)和(f)是 Sine-Exp-Gauss 模型进行的 2 相分割结果,图 6(a)是用偏差模型获取的原始图像的偏差场图像. 图 6(b)和(c)是偏差矫正模型的图像分割结果. 从图 6(c)中可以发现,偏差矫正模型不能很好区分图像的背景(草)和前景(斑马),在前景图像中将原来属于背景的一些灰度与前景相近的区域误分到前景中,不利于前景的提取;而 Sine-Exp-Gauss 模型能够很

好的将前景和背景分离开来(图 6(f)).

因此尽管偏差模型是针对偏置场图像分割提出的,但当偏差较大时,对分割结果并没有很好的鲁棒性,而 Sine-Exp-Gauss 模型的多相图像分割方法由于基于似然函数和相变原理,对于偏置场的存在可以通过模型进行自矫正,得到很好的分割结果.

6 总结与展望

在分析基于 Modica-Mortola 物理相变原理的 Sine-Sinc 模型多相图像分割的基础上,对 Sine-Sinc 模型进行了两个方面的改进.首先用指数函数 e^{-ax^2} 替代 Sine-Sinc 模型中 $\text{sinc}(x)$ 函数;其次将模型推广到适合所有高斯型分布的图像,提出了基于指数函数和高斯分布的 Sine-Exp-Gauss 多相图像分割模型,并结合 CCCP 方法给出了模型实现的具体方案.为了加速收敛和避免随机初值所带来的图像相分割不完全问题,给出了基于原始图像信息的初始化方法.实验结果表明,基于指数函数和高斯分布的 Sine-Exp-Gauss 多相图像分割模型在抗噪性和图像偏差自矫正方面有更好的性能,具有适用面更广、迭代速度更快以及分割结果更好等优点.

参 考 文 献

- [1] Cheng H D, Jiang X H, Sun Y, Wang J. Color image segmentation: Advances and prospects. *Pattern Recognition*, 2001, 34(12): 2259-2281
- [2] Jahne B. *Digital Image Processing*. New York, USA: Springer, 2002
- [3] Bresson X, Esedoglu S, Vanderghneys P T, Thiran J P, Osher S. Fast global minimization of the active contour/snake model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, 28(2): 151-167
- [4] Berrson X, Chan T F. Non-local unsupervised variational image segmentation models. USA: UCLA CAM Report cam08-67, 2008
- [5] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(1): 61-79
- [6] Chan T F, Vese L A. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 266-277
- [7] Chan T F, Esedoglu S, Nikolova M. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2006, 66(5): 1632-1648
- [8] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, 42(5): 577-685
- [9] Paragios N, Deriche R. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 2002, 46(3): 223-247
- [10] Zhu S C, Yuille A. Region competition: unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, 18(9): 884-900
- [11] Aubert G, Kornprobst P. *Mathematical problems in image processing: Partial differential equations and the calculus of variations (2nd edition)*//*Applied Mathematical Sciences* 147. New York, USA: Springer-Verlag, 2006
- [12] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79: 12-49
- [13] Vese L A, Chan T F. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 2002, 50(3): 271-293
- [14] Vese L. Multiphase object detection and image segmentation//Osher S, Paragios N. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer, 2003: 175-194
- [15] Chung G, Vese L. Energy minimization based segmentation and denoising using a multilayer level set approach//Rangarajan A et al. *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Lecture Notes in Computer Science 3757. Springer, 2005: 439-455
- [16] Lie J, Lysaker M, Tai X C. A variant of the level set method and applications to image segmentation. *AMS Mathematics of Computations*, 2006, 75(1): 1155-1174
- [17] Zhao H K, Chan T, Merriman B, Osher S. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal Computational Physics*, 1996, 127(1): 179-195
- [18] Pan Zhen-Kuan, Li Hua, Wei Wei-Bo, Guo Zhen-Bo, Zhang Chun-Fen. A variational level set method of multiphase segmentation for 3D images. *Chinese Journal of Computers*, 2009, 32(12): 2464-2474(in Chinese)
(潘振宽, 李华, 魏伟波, 郭振波, 张春芬. 三维图像多相分割的变分水平集方法. *计算机学报*, 2009, 32(12): 2464-2474)
- [19] Wang Qi, Pan Zhen-Kuan, Wei Wei-Bo. Split-Bergman method and dual method for multiphase image segmentation. *Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics*, 2010, 22(9): 1561-1569(in Chinese)
(王琦, 潘振宽, 魏伟波. 多相图像分割的 Split-Bergman 方法及对偶方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2010, 22(9): 1561-1569)
- [20] Bae E, Yuan J, Tai X C. Global minimization for continuous multiphase partitioning problems using a dual approach. *International Journal of Computer Vision*, 2011, 92(1): 112-129

- [21] Pock T, Schoenemann T, Graber G, Bischof H, Cremers D. A convex formulation of continuous multi-label problems// Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision (ECCV); Part III. Marseille, France, 2008; 792-805
- [22] Brown E S, Chan T F, Bresson X. Convex formulation and exact global solutions for multi-phase piecewise constant Mumford-Shah image segmentation. USA: UCLA CAM Report cam09-66, 2009
- [23] Ahmed M N, Yamany S M, Mohamed N, Farag A A, Moriarty T. A modified fuzzy C-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2002, 21(3): 193-199
- [24] Li C, Huang R, Ding Z, Gatenby C, Metaxas D. A variational level set approach to segmentation and bias correction of images with intensity inhomogeneity//Proceedings of the MICCAI 2008, Part II, New York, USA, 2008; 1083-1091
- [25] Pham D L, Prince J L. An adaptive fuzzy C-means algorithm for the image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities. Pattern Recognition Letters, 1999, 20(1): 57-68
- [26] Wells W, Grimson E, Kikinis R, Jolesz F. Adaptive segmentation of MRI data. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, 15(4): 429-442
- [27] Jung Y M, Kang S, Shen J. Multiphase image segmentation via modica-mortola phase transition. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2007, 67(5): 1213-1232
- [28] Benes M, Chalupceky V, Mikula K. Geometrical image segmentation by the Allen-Cahn equation. Applied Numerical Mathematics, 2004, 51(2): 187-205
- [29] Li Y, Kim J. Multiphase image segmentation using a phase-ified model. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62: 737-745
- [30] Yuille A, Rangarajan A. The concave-convex procedure (CCCP). Neural Computations, 2003, 15(1): 915-936
- [31] Bertozzi A, Esedoglu S, Gillette A. Inpainting of binary images using the Chan-Hilliard equation. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(1): 285-291
- [32] Cahn J, Hilliard J. Free energy of a non-uniform system. I. Interfacial free energy. The Journal of Chemical Physics, 1958, 28(1): 258-267
- [33] Brox T, Cremers D. On the statistical interpretation of the piecewise smooth Mumford-Shah functional//Sgallari F et al. Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. Lecture Notes in Computer Science 4485. Springer, 2007; 203-213
- [34] Modica L, Mortola S. Un esempio di γ convergenza. Bollettino della Unione Matematica Italiana, 1977, 14(1): 285-299
- [35] Vogel C. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002

附 录.

Sine-Exp-Gauss 模型的能量函数为

$$E_\varepsilon[z|u_0] = F_\varepsilon[z] + \lambda G[z|u_0]$$

$$= \int_{\Omega} \left[\varepsilon |\nabla z|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sin^2(\pi z) \right] dx + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right) e^{-\alpha(z-k)^2} dx \quad (1)$$

由于 $\frac{d^2}{dz^2} \sin^2(\pi z) \geq -2\pi^2$, 对于式(1)中第 1 部分泛函

$F_\varepsilon[z]$, 可根据 CCCP 算法性质 1 将其分裂为两个凸函数:

$$F_\varepsilon[z] = \left(F_\varepsilon^1[z] + \frac{\pi^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} z^2 dx \right) - \frac{\pi^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} z^2 dx \quad (2)$$

简写式(2)可得

$$F_\varepsilon[z] := F_\varepsilon^1[z] - F_\varepsilon^2[z] \quad (3)$$

类似的, 因为 $\frac{d^2}{dz^2} e^{-\alpha(z-k)^2} \leq 4\alpha e^{-1.5}$, 式(1)中第 2 部分泛

函 $G[z|u_0]$ 也可以分裂成两个凸函数:

$$G[z|u_0] = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega} 2\alpha e^{-1.5} \left[\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] (z-k)^2 dx - \left(\sum_{k=0}^{K-1} \int_{\Omega} 2\alpha e^{-1.5} \left[\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{(c_k - u_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] \cdot (z-k)^2 dx - G[z|u_0] \right) \quad (4)$$

简写式(4)可得

$$G[z|u_0] := G^1[z|u_0] - G^2[z|u_0] \quad (5)$$

分裂之后, 式(3)和(5)中的 $F_\varepsilon^1[z]$, $F_\varepsilon^2[z]$, $G^1[z|u_0]$ 和

$G^2[z|u_0]$ 都是凸函数. 根据 CCCP 算法介绍中的定理 2, 可以得到 Sine-Exp-Gauss 模型的 CCCP 迭代方案:

$$(F^1 + \lambda G^1)'(z^{n+1}) = (F^2 + \lambda G^2)'(z^n) \quad (6)$$

其中导数为泛函导数(或 Frechet 导数). 通过分步积分法, 式(6)表示的导数方程等价于下面的偏微分方程:

$$\left[-2\varepsilon \Delta z^{n+1} + \frac{\pi}{\varepsilon} \sin(2\pi z^{n+1}) \right] + \frac{2\pi^2}{\varepsilon} z^{n+1} + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} 4\alpha e^{-1.5} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|c_k - u_0|^2}{2\sigma_k^2} \right) (z^{n+1} - k) = \frac{2\pi^2}{\varepsilon} z^n + \left[\lambda \sum_{k=0}^{K-1} 2\alpha e^{-\alpha(z^n - k)^2} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|c_k - u_0|^2}{2\sigma_k^2} \right) (z^n - k) \right] + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} 4\alpha e^{-1.5} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|c_k - u_0|^2}{2\sigma_k^2} \right) (z^n - k) \quad (7)$$

对于式(7)中的有关参数, 采用下面的数值逼近公式:

$$\Delta z^{n+1} \sim z_{i,j-1}^n - z_{i,j}^n + z_{i,j+1}^n - z_{i,j}^n - 4z_{i,j}^{n+1} \quad (8)$$

$$\sin(2\pi z^{n+1}) \sim \frac{\sin(2\pi z^n)}{z^n} z^{n+1} \quad (9)$$

将式(8)和(9)分别代入式(7)中, 最后可以得到下面的数值迭代公式:

$$\left(8\varepsilon + \frac{\pi}{\varepsilon} \left(\frac{\sin(2\pi z_{i,j}^n)}{z_{i,j}^n} + 2\pi \right) \right) z_{i,j}^{n+1} + \left(4e^{-1.5} \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|u_{i,j} - c_k|^2}{2\sigma_k^2} \right) \right) z_{i,j}^{n+1} = 2\varepsilon (z_{i,j-1}^n + z_{i,j+1}^n + z_{i,j}^n) + \frac{2\pi^2}{\varepsilon} z_{i,j}^n + \lambda \sum_{k=0}^{K-1} \left(\log \sqrt{2\pi\sigma_k} + \frac{|u_{i,j} - c_k|^2}{2\sigma_k^2} \right) \cdot$$

$$(4e^{-1.5} z_{i,j}^n + 2(z_{i,j}^n - k)e^{-\alpha(z_{i,j}^n - k)^2}) \quad (10)$$

式(10)就可以应用于本文提出的 Sin-Exp-Gauss 模型



LIU Chun-Ping, born in 1971, Ph. D., associate professor. Her research interests include image processing and analysis, pattern recognition and computer vision, multisource information fusion.

CHEN Fu-Hua, born in 1966, Ph. D.. His research interests include image processing based on PDEs and statistical method, medical image analysis.

Background

The problem of multiphase image segmentation in image processing and computer vision is a very challenging topic which has received wide attention in recent years. Since the great success of level-set method in two-phase image segmentation for Mumford-Shah type model, different kinds of level-set based methods have been extended for multiphase image segmentation using an objective functional. Recently, a novel Sine-Sinc model, which can also be thought to be a variant of the Mumford-Shah model, is developed for multiphase segmentation based upon the celebrated Modica-Mortola phase transition theory in material sciences using a signature function.

Both of the aforesaid models have some shortcomings. For example, both models assume the image to be piecewise constant. This hypothesis cannot deal with the situation where objects and background don't behavior as intensity constant but show some distribution property. Compared with the level-set method, the Sine-Sinc model outputs a single multiphase distribution from which all the phases can be found directly, while level-set based methods must find the boundary first by solving a level-set based PDE equation. With the theory of Γ -convergence and the convex-concave procedure (CCCP), the iteration scheme of Sine-Sinc model can guarantee to converge to a local minimum. But the model cannot guarantee the iteration to converge to an expected segmentation. Especially, the Sine-Sinc model is not robust when the illumination of image is inhomogeneous.

多相图像分割的迭代求解了.

GONG Sheng-Rong, born in 1966, Ph. D., professor. His research interests include communication of multimedia, pattern recognition and machine vision.

CUI Zhi-Ming, born in 1961, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include medical image processing and intelligent information processing.

LIU Quan, born in 1969, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include machine learning and automated reasoning.

This paper gives an improved model of Sine-Sinc model based on the framework of Γ -convergence, celebrated phase transition theory and likelihood. The new developed model extends its application from piecewise constant images to Gaussian-distribution-like images. The Sinc function in the original model is replaced by the exponential function. Since the objective functional is nonlinear and non-convex, it usually finds a local minimum. By choosing the initialization of the signature function based on the original image, the iteration will converge to an ideal segmentation.

The multiphase image segmentation is a part of multi-objects tracking under multi-cameras, increment information acquisition method based on Deep Web and the construct of a large-scale knowledge base of Deep Web project that are supported by the National Science Foundation of China, multi-objects recognition based on multisource information fusion project that is supported by the Provincial Science Foundation of Jiangsu and so on. The purpose of these projects is to develop a comprehensive automatic multi-object detection, tracking and recognition for intelligent Surveillance. This paper focuses on developing multiphase image segmentation model for extracting the foreground of image or video with noise and uneven illumination.

These projects have been studied three years in our research group, and about ten papers on these topics have been published.