第35卷 第10期 计 算 机 学 报 Vol. 35 No. 10
2012年10月 CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS Oct. 2012

可重写 Petri 网：位置可重写及性质分析

庞善臣[1)] 林 闯[2)]

[1)](山东科技大学信息科学与工程学院 山东 青岛 266590)

[2)](清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

摘 要 针对Petri网对动态系统重构形式化描述和建模能力的不足，提出了可重写Petri网和位置可重写Petri网的基本概念.分析了位置可重写Petri网保持有界性、保守性、可重复性及活性等性质.给出了位置可重写Petri网保持活性的一个充要条件.证明了共享合成Petri网是位置可重写Petri网的一个实例，建立了退化的位置可重写Petri网模拟共享合成Petri网的算法.所得结果能够为动态重构系统的Petri网形式化建模提供理论方法，为大规模动态分布式系统的形式化验证提供有效途径.

关键词 可重写Petri网；位置可重写Petri网；共享合成Petri网；活性；模拟

中图法分类号 TP301 **DOI号**：10.3724/SP.J.1016.2012.02182

Rewritable Petri Nets: Rewritable Place and Properties Analysis

PANG Shan-Chen[1)] LIN Chuang[2)]

[1)](*College of Information Science & Engineering, Shandong University of Science & Technology, Qingdao* 266590)

[2)](*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract To solve problems of dynamic modeling capabilities of Petri nets on the dynamic system reconfiguration, rewritable Petri nets and rewritable place of Petri nets is presented in this paper. Some properties of the rewritable place of Petri nets, such as structural boundedness, conservation, repetitiveness, and liveness are analyzed and verified. A necessary and sufficient condition for the liveness of the rewritable place of Petri nets is presented. The paper shows that the sharing synthesis Petri net is an instance of rewritable place of Petri net, and a simulation algorithm the degraded rewritable place of Petri nets simulates sharing synthesis Petri nets is established. The results provide a theoretical method for Petri net formal modeling of dynamic reconfiguration systems, and provide an effective way for the formal verification of large-scale dynamic distributed systems.

Keywords rewritable Petri nets; rewritable place of Petri nets; sharing synthesis Petri nets; liveness; simulation

1 引 言

Petri网的概念最早由德国的Carl Adam Petri博士于1962年在他的博士论文中提出[1].40多年来，Petri网理论不断充实和发展，Petri网的描述能力也在不断得到丰富，从基本的条件事件网(C/E)、位置变迁网(P/T)到有色网；从一般有向弧发展到

收稿日期：2012-06-30；最终修改稿收到日期：2012-08-23.本课题得到国家"九七三"重点基础研究发展规划项目基金(2010CB328105)、国家自然科学基金(90718012,60970001,60874036,61170183)、山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(BS2011DX027,BS2011SW025)、青岛市科技发展计划应用基础研究项目(12-1-4-6-(7)-jch)、山东科技大学杰出青年基金(2011KYJQ104)和山东科技大学科研创新团队支持计划项目(2011KYTD102)资助.**庞善臣**，男，1974年生，博士，副教授，主要研究方向为Petri网、形式化方法、服务计算、可信计算等. E-mail: shanchenpang2008@gmail.com. **林 闯**，男，1948年生，博士，教授，博士生导师，主要研究领域为计算机网络和系统性能评价等.

禁止弧和可变弧；从自然数 Token 到概率 Token；从瞬时变迁到时延变迁等. Petri 网分析技术也得到了丰富和完善，能够借助 Petri 网的代数分析技术来刻画系统结构，建立状态可达的线性系统关系；借助 Petri 网的图分析技术，展现系统的运行机制，分析系统的动态行为；借助 Petri 网的归纳分析技术，可缩小系统的可达状态空间，降低系统分析的复杂度；借助 Petri 网语言能够形式表示和分析系统的动态行为性质；借助随机过程能够分析性能等特性. 在应用方面，Petri 网以其简洁、直观、潜在模拟能力强等特点被广泛用于分布式、并发系统的建模和分析，如计算机、通信、交通、电子与电力、服务、通信协议验证、网络性能分析、并行程序设计、柔性制造系统控制、知识推理及人工神经元网络等.

但是，随着系统规模的激增，系统的复杂性、柔性(松耦合性)不断增加，系统的异构、分布、协同、自治性增强，系统的动态更新速度加快. 然而，传统 Petri 网的形式化方法不能提供直接支持系统结构的动态变化和业务的多种操作模式，Petri 网建模方法在解决系统上述问题过程中遇到极大困难和挑战[2]. 因此，具有动态建模能力扩展 Petri 网的研究得到不断发展[2-7]. Petri 网的动态建模理论及方法，主要有以下 3 个方向.

1.1　Petri 网的化简和精炼

为了解决 Petri 网模型分析带来的状态空间爆炸问题，许多学者开展了 Petri 网化简和精炼的研究[8-25]，建立了多种化简规则和运算方法，给出了化简后活性、有界性、公平性等性质保持条件，以解决系统复杂性增长所带来的空间状态爆炸问题. Murata 是较早从事 Petri 网化简的主要研究人员，Murata 等人[8]针对 T-图提出了若干化简规则，讨论了这些规则对活性和安全性的保持关系. Ehrig 等人[10]给出了 Petri 网变换的化简规则，并将结果应用在软件工程领域. 国内研究人员对 Petri 网化简开展了卓有成效的研究[11-17]. Jensen[18]研究了基于求精思想的有色 Petri 网的层次化建模方法，开发了复杂系统的设计工具 Design/CPN. Betous-Almeida 等人[19]讨论了在随机 Petri 网中，利用精炼操作逐步求精以构建一个可靠性模型的方法. Suzuki 等人[20]研究了 Petri 网的精炼操作，提出了精炼网的定义，并研究了精炼网的动态性质(如有界性、活性等)保性关系. Huang 等人[21]定义了两类 Petri 网的精炼操作，并对包括结构性质(如不变量、可重复性等)和动态性质在内的 19 种性质的保性关系进行了较全面的论述和分析. Ding 等人[17]基于序列投影，建立精炼 Petri 网与原网、子网间的动态行为关联关系，并分析了该精炼操作的相关动态性质，得到一组性质保持判据. Petri 网化简和精炼技术在系统建模与分析中得到广泛应用. 近几年，在工作流和服务组合研究中应用成果更为常见. Sadiq 等人[22]针对工作流建模语言，利用一组 Petri 网化简规则，建立了可视化的验证算法来识别工作流过程模型中的结构冲突. Li 等人[23]改进了文献[20]的化简规则，建立了化简矩阵的工作流验证算法. 最近，有学者开始研究一种新的 Petri 网化简技术——切片技术来实现 Petri 网的动态建模[24-25]. 上述这些工作，为 Petri 网的层次化分析奠定了理论基础.

1.2　Petri 网的合成

Petri 网化简和精炼体现了模型验证和分析由上到下的思想，为了解决系统集成时由下向上的模型表达问题，人们开始关注 Petri 网的合成[26-43]. 近年来，合成 Petri 网研究已取得很大的进展[28-31]，其研究成果主要集中在共享合成和同步合成上. Souissi[32]研究了共享合成 Petri 网系统的活性保持性问题，基于对活性满足单调性条件的推广，提出了 F-强网的概念，得出两个活的 F-强网共享合成后仍是活的结论. Jeng[33]研究了用 Petri 网系统来建模柔性制造系统的合成方法，提出资源控制网的概念，每一个子系统都是资源控制网，且按两个约束条件合成起来，这样得到的大系统有结构活性. Jiang 等人[34]首次提出了 Petri 网的加法、笛卡儿积、广义笛卡儿积的 Petri 网合成运算，得到了一系列的重要性质. Jiang[35]研究了 Petri 网同步合成和共享合成两种组合网的动态不变性，即状态和行为不变性. Jiao 等人[36]研究了针对 AC 网进行库所集合合成的转化问题. Badouel 等人[37]提出了 Petri 网合成后的网保持死锁-陷阱性质、活性、有界性和可逆性的条件. Chen[38]给出了一种对具有控制器的离散事件系统进行合成的系统方法. 夏传良等人[39]给出了使共享 PP-型子网合成 Petri 网系统保持活性、有界性和可逆性的条件；Jiang[35]对 Petri 网系统同步合成的进程和语言关系式进行了研究，得到了反映系统行为关系的进程和语言关系式. Wang 等人[40]利用同步合成的语言关系式去研究其他 Petri 网系统合成操作，如抑制弧连接、自环连接的语言关系式，由此得到行为不变性质. 蒲飞等人[41]着重研究了 Petri 网系统共享合成的行为关系(语言关系)，指出并证明了 Petri 网系统共享合成过程中语言的递归性

质，得到一个并发语言形式的共享合成语言关系式，并可用小系统的语言子集来判定共享合成网系统的活性，从而达到用小系统来研究大系统活性的目的系式. 另有文献[42]和[43]分别提出了新的 Petri 网共享合成活性判定条件. 上述研究工作为 Petri 网的层次化建模奠定了理论基础.

1.3 Petri 网的分解

Petri 网化简策略主要利用功能和行为等效机制，将复杂结构简化为一个简单结构，来分析系统的性能. 在结构化简过程中，因化简带来黑盒现象，系统的资源信息将会丢失，因此部分研究者开始了 Petri 网分解的研究，以避免化简的不足，但 Petri 网分解研究的成果尚不多见. Berthelot[44]提出用分解和变形的方法来研究系统的一些性质，如活性、无死锁性及有界性等的保持性问题. Aybar 等人[45]用分解方法研究大系统的性质，采用一种称为包含原则方法分解大系统，以保证合成后的大系统具有小系统相应的性质，并给出了这种方法在分散控制中的应用. 在应用方面，李建强等人[46]给出了工作流网的一个特殊子类——无环自由选择工作流网的一个分解算法 . Li 等人[47]将文献[46]的分解算法推广，进一步给出了含有循环结构的自由选择工作流网的分解算法，并在分解的基础上对工作流模型的性能进行了分析. 文献[48-49]在研究 Petri 网分解中，给出了基于不变量分解算法，并在工作流性能分析中得到较好应用.

上述的 Petri 网化简、精炼、合成、分解等内容，都是 Petri 网动态建模理论的研究范畴，上述许多方法在获得动态建模能力的同时，也造成了已有信息的丢失，使对 Petri 网的性质判断变得十分困难或不可能. 2000 年前后，部分学者基于图重构的思想，提出重构网的概念[2-7]，但是，活性、有界性、可逆(可重复)性和公平性等一些基本性质的保持和继承问题仍然没有解决. Llorens 等人[2-3]提出了网重写系统和重构网的并发系统建模方法，并证明了具有图灵机的计算能力，该方法在假设被重写的位置没有 Token 的情况下，使用图重构的方法，就是将一个同构的嵌入子图替换成新子图的方法，丢失了 Petri 网的状态动态性，使得活性、有界性、可逆性等性质难以判断. Li 等人[5]对重写网系统和可重构 Petri 网进行了改进，将重写规则中左手、右手的接口限定为位置和变迁两种类型，并相应建立了几种结构模式，该方法能够较好地应用在柔性制造系统的建模中，但重写位置中的托肯仍然被忽略，另外，该方法即便在给定的结构模式下，重构系统的一些性质. 如活性、有界性、公平性等仍无法得到保证. 文献[7]对重写网系统改进，明确了流关系和权函数的区别，同时考虑了重写位置中的托肯对重写系统的影响，并分析了动态编程工作流网重写后的活性和健壮性等问题.

本文在文献[2-7]基础上，提出了可重写 Petri 网(Rewritable Petri Nets，RWPN)和位置可重写 Petri 网(Rewritable Place of Petri Nets，RWPPN)的概念，分析了位置可重写 Petri 网保持有界性、公平性、可逆性、可重复性及活性等性质，给出了退化的位置可重写 Petri 网模拟共享合成 Petri 网的算法，证明了共享合成 Petri 网是位置可重写 Petri 网的一个实例. 所得结果能够为动态重构系统的 Petri 网形式化建模提供理论方法，为大规模动态分布式系统的形式化验证提供有效方法.

本文第 2 节介绍一些基本概念，建立可重写 Petri 网和位置可重写 Petri 网的概念，并举例子说明；第 3 节分析位置可重写 Petri 网的性质，证明位置可重写 Petri 网有界性、可重复性，提出判定一个位置可重写 Petri 网保持活性的充要条件，给出退化的位置可重写 Petri 网模拟共享合成 Petri 网的算法，证明共享合成 Petri 网是位置可重写 Petri 网的一个实例；第 4 节给出一个实例解释我们的方法；第 5 节总结本文的工作.

2 位置可重写 Petri 网(RWPPN)

2.1 Petri 网的基本概念

在 Petri 网的图形表示中，用圆表示库所，矩形框表示变迁，有向弧是连接两个不同类型节点(库所和变迁)的弧. 库所中的托肯用圆点表示. 本文引入几个必要的定义，其余概念参见文献[1,34].

定义 1. 四元式 $N=(P,T;F,M_0)$ 称为 Petri 网，当且仅当，$(P,T;F)$ 是一个网；其中 P，T 分别是库所和变迁的有限集，$P\cap T=\varnothing$；$F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)$ 是流关系；M: $P\rightarrow Z$ 为标识函数，其中 M_0 是初始标识，$Z=\{0,1,2,\cdots\}$ 为非负整数集.

(1) ${}^{\cdot}x=\{y\,|\,(y,x)\in F\}$ 称为 x 的输入集或前集；$x^{\cdot}=\{y\,|\,(x,y)\in F\}$ 称为 x 的输出集或后集；

(2) 对 $\forall M_1$ 和 M_2，$M_1\leq M_2$，当且仅当对所有的 $p\in P$: $M_1(p)\leq M_2(p)$；

引发规则：

(3) 变迁 $t\in T$ 在标识 M 下是使能的，当且仅当 $\forall p\in {}^{\cdot}t, M(P)\geq 1$，记 $M[t\rangle$；

(4) 若 t 在 M 下使能，则 t 可以引发，且引发后产生一个后继标识 M'，记作 $M[t\rangle M'$，其中，

$$M'(p)=\begin{cases}M(p)+1, & 当\ p\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t\\ M(p)-1, & 当\ p\in {}^{\cdot}t-t^{\cdot}\\ M(p), & 其它\end{cases}.$$

设 $R(M_0)$ 表示 N 的从 M_0 可达的所有状态（标识）集合. 如果存在 $M_1, M_2, \cdots, M_k\in R(M_0)$，且 $\forall i$：$1\leq i\leq k$，$\exists t_i\in T$：$M_i[t_i\rangle M_{i+1}$，则称变迁序列 $\sigma=t_1t_2\cdots t_k$ 在 M_1 下是使能的，M_{k+1} 从 M_1 可达，记作 $M_1[\sigma>M_{k+1}$.

定义 2. 设 $N=(P,T;F,M_0)$ 是 Petri 网，存在如下性质：

(1) (N,M_0) 是活的，当且仅当 $\forall t\in T$，$\forall M\in R(M_0)$，$\exists M'\in R(M)$，$M'[t\rangle$；

(2) (N,M_0) 是有界的，当且仅当对 $\forall M\in R(M_0)$，$\exists k\in N$，$M(p)\leq k$；

(3) (N,M_0) 是安全的，当且仅当对 $\forall M\in R(M_0)$，$M(p)\leq 1$；

(4) (N,M_0) 是公平的，当且仅当 $\forall t_1,t_2\in T$，如果存在正整数 k 使得任意的 $M\in R(M_0)$ 和任意的 $\sigma\in T^*$：$M[\sigma\rangle$ 都有 $\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_j/\sigma)\leq k$，$i,j\in\{1,2\}$，$i\neq j$.

定义 3. Petri 网 $N'=(P',T';F',M_0')$ 是 N 的子网，当且仅当 $P'\subseteq P$，$T'\subseteq T$，$F'=F\cap((P'\times T')\cup(T'\times P'))$；Petri 网 $N'=(P',T';F',M_0')$ 是 N 库所子集 P' 的外延子网，当且仅当 $P'\subseteq P$，$T'={}^{\cdot}P'\cup P'^{\cdot}$；$F'=F\cap((P'\times T')\cup(T'\times P'))$.

定义 4. $P'\subseteq P$ 是 N 的一个非空死锁（陷阱），当且仅当 $P'\neq\varnothing$，且 ${}^{\cdot}P'\subseteq P'^{\cdot}$ $(P'^{\cdot}\subseteq {}^{\cdot}P')$；$P'$ 是 N 的极小死锁（陷阱），当且仅当 P' 真子集都不是 N 的死锁（陷阱）.

定义 5. 设 Petri 网 $N_i=(P_i,T_i;F_i,M_{0i})$，$i=1,2$，令 $N=(P,T;F,M_0)$，若：

① $P=P_1\cup P_2$，$P_0=P_1\cap P_2\neq\varnothing$，设 $|P_0|=h$，$|P|=m$；

② $T=T_1\cup T_2$，$T_1\cap T_2=\varnothing$；

③ $F=F_1\cup F_2$；

④ $M_0(P)=$

$$\begin{cases}\max\{M_{01}(P),M_{02}(P)\}, & 若 P\in P_1\cap P_2\\ M_{0i}(P), & 若 P\in P_i-(P_1\cap P_2)\end{cases},$$

$i=1,2$；

称 N 为 N_1 与 N_2 的共享合成 Petri 网.

在 Petri 网图形中，由一个节点到达另一个节点的所有有向弧连接的节点序列称为路径. 设 S 是一个集合，S^* 表示 S 中元素的所有有限序列的集合，且空序列 $\lambda\in S^*$. $\forall\sigma\in S^*$，记作 $\&(\sigma)=\{x\mid x$ 是 σ 中的元素$\}$. 因此，算符 & 将序列 σ 转换成一个字母表 $\&(\sigma)$.

定义 6. N 是 Petri 网，一个从节点 n_1 到 n_k 的通道 C 是一个节点的序列 $\langle n_1,n_2,\cdots,n_k\rangle$，其中 $\langle n_i,n_{i+1}\rangle\in F$，$1\leq i\leq k-1$，$\&(C)=\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$ 是通道 C 的字母表. 通道 C 是基本的，当且仅当对通道 C 上的任意两个节点 n_i,n_j，若 $i\neq j\Rightarrow n_i\neq n_j$.

定义 7. 一个 Petri 网是强连通的，当且仅当对于每一对节点 $x,y\in P\cup T$，都存在一个从 x 到 y 的通道.

定义 8. 一个强连通的 Petri 网在结构上是良构的，当且仅当对任意一对不同类型的节点 x,y（一个为变迁，一个为库所），若 C_1,C_2 是从 x 到 y 的任意两条基本路径，且 $\&(C_1)\cap\&(C_2)=\{x,y\}\Rightarrow C_1=C_2$.

由定义 8 可以得到定义 9.

定义 9. 一个 Petri 网在结构上是良构的，当且仅当对任意两个相同类型的节点 x_1,x_2 与不同类型的节点 y 之间，如果存在基本路径 C_1 和 C_2，则 $\&(C_1)\cap\&(C_2)\neq\{y\}\Rightarrow\&(C_1)\cap\&(C_2)=\&(C_i)$，$i=1,2$.

2.2 位置可重写 Petri 网（RWPPN）

类似文献[2-3]，本节主要建立可重写 Petri 网和位置可重写 Petri 网的概念.

定义 10. 若 $R\subseteq X\times Y$ 为二元关系，令 $X'R=\{y\in Y\mid\exists x\in X',(x,y)\in R\}$ 记作 X' 的像，$X'\subseteq X$；令 $RY'=\{x\in X\mid\exists y\in Y',(x,y)\in R\}$ 记作 Y' 的逆像，$Y'\subseteq Y$. R 的域和陪域分别为 $Dom(R)=RY$ 和 $Cod(R)=XR$.

定义 11. $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个图，G 和 G' 称为同构，若存在双射 φ：$V\rightarrow V'$ 使得 $\forall x,y\in V,(x,y)\in E\Leftrightarrow(\varphi(x),\varphi(y))\in E'$.

定义 12. $N=(P,T,F)$ 和 $N'=(P',T',F')$ 为两个 Petri 网. N 和 N' 称为同构，若存在双射 φ：$P\cup T\rightarrow P'\cup T'$，使得 $\forall x,y\in P\cup T,F(x,y)\in N\Leftrightarrow F'(\varphi(x),\varphi(y))\in N'$.

定义 13. $N=(P,T,F)$ 和 $N'=(P',T',F')$ 为两个 Petri 网，N 是 N' 的全嵌入（full embedding）定义为单射 f：$P\cup T\rightarrow P'\cup T'$，它映射库所到库所

和变迁到变迁，即 $f(P)\subseteq P'$ 且 $f(T)\subseteq T'$，使得 $\forall x,y\in P\cup T, F(x,y)=F'(f(x),f(y))$. 在单射 f 下 N 的镜像也称为 N'的全子网(full subnet)，当 $f(P)\subset P'$或 $f(T)\subset T'$时，在单射 f 下 N 的镜像也称为 N'的真子网(true subnet).

下面给出可重写 Petri 网(RWPN)的概念.

定义 14. 可重写 Petri 网是一个二元组 $N=(\mathfrak{R},N_0)$，其中$\mathfrak{R}=\{r_1,r_2,\cdots,r_h\}$为有限的重写规则集，$N_0=(P_0,T_0,F_0,M_0)$为初始 Petri 网.

一个重写规则 $r\in\mathfrak{R}$是一个四元组，结构为 $r=(L,R,{}^{\bullet}\tau,\tau^{\bullet})$，其中：

(1) $L=(P_L,T_L,F_L,M_L)$ 和 $R=(P_R,T_R,F_R,M_R)$为 Petri 网，分别称为规则 r 的左手和右手；

(2) ${}^{\bullet}\tau\subseteq(P_L\times P_R)\cup(T_L\times T_R)$称为 r 的输入重写关系，是左手 L 的输入库所(变迁)关联到右手 R 的输入库所(变迁)的二元关系，即 $P_L{}^{\bullet}\tau\subseteq P_R$，$T_L{}^{\bullet}\tau\subseteq T_R$，${}^{\bullet}\tau P_R\subseteq P_L$，${}^{\bullet}\tau T_R\subseteq T_L$；

(3) $\tau^{\bullet}\subseteq(P_L\times P_R)\cup(T_L\times T_R)$称为 r 的输出重写关系，是左手 L 的输出库所(变迁)关联到右手 R 的输出库所(变迁)的二元关系，即 $P_L\tau^{\bullet}\subseteq P_R$，$T_L\tau^{\bullet}\subseteq T_R$，$\tau^{\bullet}P_R\subseteq P_L$，$\tau^{\bullet}T_R\subseteq T_L$.

可重写 Petri 网 $N=(\mathfrak{R},N_0)$的库所集 P、变迁集 T 和流关系 F 由下列公式给出，其中 f 是 L 到 N_0的一个全嵌入，即 $f:L\rightarrow N_0$.

库所集：$P=P_0-f(P_L)+P_R$，

变迁集：$T=T-f(T_L)+T_R$，

流关系：

$$F(x,y)=\begin{cases}F_0(x,y),x\notin R\wedge y\notin R\\ F_R(x,y),x\in R\wedge y\in R\\ \bigcup\limits_{y_i\in{}^{\bullet}\tau y}F(x,f(y_i)),x\notin R\wedge y\in R\\ \bigcup\limits_{x_i\in\tau^{\bullet}x}F(f(x_i),y),x\in R\wedge y\notin R\end{cases}.$$

库所 $p\in P$，标识 $M(p)$由下式给出

$$M(p)=\begin{cases}M_0(p),\ p\notin R,\\ \max\{M(f(p'))\,|_{p'\in{}^{\bullet}\tau p\cup\tau^{\bullet}p},M_R(p)\},p\in R.\\ M_R(p),p\in R\wedge({}^{\bullet}\tau p\cup\tau^{\bullet}p)=\varnothing\end{cases}$$

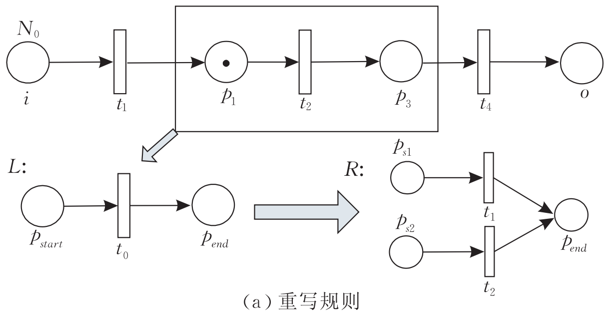
定义 15. 可重写 Petri 网 $N=(\mathfrak{R},N_0)$的状态可达图为 $G(N)$，它的节点为 N 的状态，它的弧的描述如下：

变迁使能：由状态 M 到状态 M'的弧标注了变迁 t，即在状态 M 下，变迁 t 能够使能，并且到达一个新状态 M'：$(N_0,M)\xrightarrow{t}(N,M')\Leftrightarrow(N=N_0\wedge M[t\rangle)$.

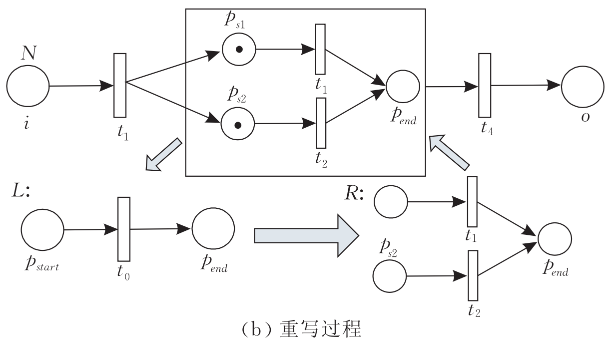
组态变化：由状态 M 到状态 M'的弧标注了重写规则 $r=(L,R,{}^{\bullet}\tau,\tau^{\bullet})$，即存在一个全嵌入 $f:L\rightarrow N_0$ 使得 $\forall x\in P_0\cup T_0\wedge x\notin f(L)\wedge\forall y\in L$：$x\in{}^{\bullet}f(y)\Rightarrow y\in Dom({}^{\bullet}\tau)\vee x\in f(y)^{\bullet}\Rightarrow y\in Dom(\tau^{\bullet})$.

为了更好地说明定义 14 和定义 15，下面我们给出一个简单的例子.

图 1(a)中给出了重写规则，其中输入重写规则关系为${}^{\bullet}\tau=\{(\{p_{\text{start}}\},\{p_{s1},p_{s2}\})\}$，输出重写规则关系为 $\tau^{\bullet}=\{(\{p_{\text{end}}\},\{p_{\text{end}}\})\}$. 图 1(b)给出了重写过程，根据定义 14 和定义 15，可以方便地求出 $N=(\mathfrak{R},N_0)$的位置集 P、变迁集 T、流关系 F、标识M'和状态可达图 $G(N)$，说明了系统(N_0,M)在线运用了重写规则 $r=\{L,R,{}^{\bullet}\tau,\tau^{\bullet}\}$后到达的新状态$(N,M')$，重写后系统中的标识增加了一倍.



(a) 重写规则



(b) 重写过程

图 1 用 PRPN 建模一个系统

定义 16. 位置可重写 Petri 网 $N=(\mathfrak{R},N_0)$是一个可重写 Petri 网，其中：

一个可重写规则 $r\in\mathfrak{R}$是一个四元组，结构为 $r=(L,R,{}^{\bullet}\tau,\tau^{\bullet})$，称为位置重写规则，其中：

(1) $L=(P_L,T_L,F_L,M_L)$和 $R=(P_R,T_R,F_R,M_R)$为 Petri 网，分别称为规则 r 的左手和右手，$P_L=P_{Li}\cup P_{Lo}\cup P_{Lr}$，其中 P_{Li}、P_{Lo}和 P_{Lr}是 P_L的划分. 对$\forall p\in P_{Li}$，${}^{\bullet}p=\varnothing$；对$\forall p\in P_{Lo}$，$p^{\bullet}=\varnothing$. P_{Li}和 P_{Lo}分别描述左手库所集合的输入和输出接口. $P_R=P_{Ri}\cup P_{Ro}\cup P_{Rr}$，其中 P_{Ri}、P_{Ro}和 P_{Rr}是 P_R的划分. 对$\forall p\in P_{Ri}$，${}^{\bullet}p=\varnothing$；对$\forall p\in P_{Ro}$，$p^{\bullet}=\varnothing$. P_{Ri}

和 P_{Ro} 分别描述右手库所集合的输入和输出接口.

如果析取式 $(P_{Li}=\varnothing)\vee(P_{Lo}=\varnothing)\vee(P_{Ri}=\varnothing)\vee(P_{Ro}=\varnothing)$ 为真，则称 $N=(\Re,N_0)$ 为退化的位置可重写 Petri 网.

(2) 重写关系 $^{\cdot}\tau$ 和 $\tau^{\cdot}$ 分别称为输入位置重写关系和输出位置重写关系，即 $^{\cdot}\tau\subseteq(P_{Li}\times P_{Ri})$，$\tau^{\cdot}\subseteq(P_{Lo}\times P_{Ro})$.

位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$ 的位置集 P、变迁集 T 和流关系 F 由下列公式给出，其中 f 是 L 到 N_0 的一个全嵌入，即 $f:L\rightarrow N_0$. 则

库所集为 $P=P_0-f(P_L)+P_R$，

变迁集为 $T=T-f(T_L)+T_R$.

流关系 F 为

$$F(x,y)=\begin{cases}F_0(x,y), x\notin R\wedge y\notin R\\ F_R(x,y), x\in R\wedge y\in R\\ \bigcup\limits_{y_i\in y^{\cdot}\tau}F(x,y_i), x\in T_0\backslash L\wedge y\in P_{Li}\\ \bigcup\limits_{x_i\in x\tau^{\cdot}}F(x_i,y), x\in P_{Lo}\wedge y\in T_0\backslash L\end{cases}.$$

对 $\forall p\in P$，标识 $M(p)$ 为

$$M(p)=\begin{cases}M(p), & 若 p\notin R\\ \max\{M(p')\mid_{p'\in p^{\cdot}\tau\cup p\tau^{\cdot}}, M(p)\}, & 若 p\in P_{Ri}\cup P_{Ro}\\ M(p), & 若 p\in P_{Rr}\end{cases}.$$

设 N_0,L,R 的关联矩阵分别为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_L,\boldsymbol{A}_R$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $n_i\times m_i$ 矩阵，$i=1,L,R$，记 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$，其中，$\boldsymbol{A}_{11}$、$\boldsymbol{A}_{12}$、$\boldsymbol{A}_{22}$ 分别是 $T-T_L$ 与 $P-P_L$、$T-T_L$ 与 P_L、T_L 与 P_L 所对应的关联子阵；显然 $\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{A}_L$，同理 $\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Li}} & \boldsymbol{A}_{12}^{P_{Lo}}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Li}}$，$\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Lo}}$ 分别是 $T-T_L$ 与 P_{Li} 和 P_{Lo} 的关联矩阵，进一步得到位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$ 的关联矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}'_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_R\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}'_{12}$ 是 $T-T_L$ 与 P_R 所对应的关联子阵，同理 $\boldsymbol{A}'_{12}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Ri}} & \boldsymbol{A}_{12}^{P_{Ro}}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Ri}}$，$\boldsymbol{A}_{12}^{P_{Ro}}$ 分别是 $T-T_L$ 与 P_{Ri} 和 P_{Ro} 的关联矩阵.

3　位置可重写 Petri 网的性质分析

图 1 展示了位置可重写 Petri 网的重写过程和结果.

由定义 15 和定义 16 可知，位置可重写 Petri 网是重写 Petri 网的一个子类，该子类在众多可重构系统的建模中占有较大比例，因此研究该子类性质对系统建模具有重要意义. 本节主要分析位置可重写 Petri 网的一些基本性质及定理.

引理 1[1]．　设 $\boldsymbol{A}$ 是 Petri 网 N 的关联矩阵，则 N 为结构有界 Petri 网(守恒网)当且仅当存在 m 维正整数向量 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{Ay}\leq 0(\boldsymbol{Ay}=0)$.

引理 2[50]．　Petri 网 N 是良构的，则 N 为结构有界 Petri 网，若 N 是强连通的，则 N 是活的.

定理 1．　设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，若 N_0 是结构有界的，重写规则的右手 R 是良构的，则 $N=(\Re,N_0)$ 是结构有界网.

证明．　要证明位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$ 是结构有界的，当且仅当证明存在一个正整数向量 $\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{AY}\leq 0$，即 $\boldsymbol{AY}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}'_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\leq 0$，$\boldsymbol{A}_{11}Y_{11}+\boldsymbol{A}'_{12}Y_{12}+\boldsymbol{A}_R Y_{12}\leq 0$.

因为 Petri 网 N_0 是结构有界的，即存在整数向量 $\boldsymbol{Y}_1$，使得 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_1\leq 0$，由 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$，于是得到 $\boldsymbol{A}_{11}Y_{11}+\boldsymbol{A}_{12}Y_{12}+\boldsymbol{A}_{22}Y_{12}\leq 0$，$\boldsymbol{A}_{11}Y_{11}\leq 0$，$\boldsymbol{A}_{22}Y_{12}\leq 0$ 和 $\boldsymbol{A}_{12}Y_{12}\leq 0$. 下面分别构造 $\boldsymbol{Y}_1$、$\boldsymbol{Y}_2$，使得 $\boldsymbol{AY}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}'_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\leq 0$，因为 R 是良构的，由引理 2，则 R 是结构有界的，由 N_0 和 R 的结构有界性，可以得到 $T-T_L$ 与 P_R 的子网也是结构有界的，即存在整数向量 $\boldsymbol{Y}_2$，使得 $\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{Y}_2\leq 0$，$\boldsymbol{A}'_{12}\boldsymbol{Y}_2\leq 0$. 令 $\boldsymbol{Y}_1=Y_{11}$，于是得到 $\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{A}'_{12}\boldsymbol{Y}_2+\boldsymbol{A}_R\boldsymbol{Y}_2\leq 0$，由于 $\boldsymbol{AY}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}'_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\leq 0$，即存在整数向量 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$ 使得 $\boldsymbol{AY}\leq 0$，由引理 1 知，$N=(\Re,N_0)$ 是结构有界网.　　证毕.

同理可证定理 2 成立.

定理 2．　设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，若 N_0 是是守恒的，重写规则的右手 R 是良构和守恒的，则 $N=(\Re,N_0)$ 是守恒网.

引理 3[1]．　设 $\boldsymbol{A}$ 是 Petri 网 N 的关联矩阵，则 N 为可重复 Petri 网(协调网)当且仅当存在 n 维正整数向量 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\geq 0(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0)$.

定理 3．　设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，若 N_0 是可重复的，重写规则的右手 R 是良构的，则 $N=(\Re,N_0)$ 是可重复网.

证明．　N_0 是可重复的，则存在 n_1 维正整数向量 $\boldsymbol{X}_1=(X_{11},X_{12})$，使得 $\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1\geq 0$，由 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$ 即

$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}X_{11}\geq 0\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}}X_{11}+\boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}X_{12}\geq 0\end{cases}$，下面构造 n 维正整数向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & 0\\ \boldsymbol{A}_{12}'^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\geq 0$. 由 R 是良构的，由定义 9 可知，对 $\forall p\in P_{Ri}$，都存在唯一一条基本路径到达 P_{Ro}，使得 $P_{Ro}^{\cdot}$ 发生，再因 N_0 可重复，则存在 n_2 维正整数向量 $\boldsymbol{X}_2$，使得 $\boldsymbol{A}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{A}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2\geq 0$，令 $\boldsymbol{X}_1=X_{11}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}X_{11}\geq 0\\ \boldsymbol{A}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{A}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2\geq 0\end{cases}$，即存在 n 维正整数向量 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_{11}\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & 0\\ \boldsymbol{A}_{12}'^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\geq 0$，由引理 3，$N=(\Re,N_0)$ 是可重复网得证. 证毕.

同理可证下述结论成立.

定理 4. 设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，若 N_0，R 都是协调网，重写规则的右手 R 是良构，则 $N=(\Re,N_0)$ 是可重复网.

引理 4[42]. 设 N 为一个 Petri 网，M 为 N 的一个标识，记 $T'=\{t\in T\mid \neg M[t\rangle\}$，$P'=\{p\in P\mid M(p)=0\}$，$P''={}^{\cdot}T'\cap P'$，如果 ${}^{\cdot}P''\subseteq T'$，则 P'' 是 N 的一个死锁，且 $M(P'')=0$.

引理 5. 设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，若 N_0 是活的，R 是良构的，$P_{Ri}\cup P_{Ro}$ 的外延子网不含非空死锁，则 $N=(\Re,N_0)$ 是活的.

证明. 反证法.

假设 $N=(\Re,N_0)$ 不是活的，则 $\exists M_1\in R(M_0')$，$\exists t\in T'$，对 $\forall M\in R(M_1)$：$\neg M[t\rangle$，记 $T''=\{t\in T'\mid \forall M\in R(M_1):\neg M[t\rangle\}$，$P_{M_1}=\{p\in P\mid M_1(P)=0\}$，$P^1={}^{\cdot}T''\cap P_{M_1}$；

现在考察 P^1，若 ${}^{\cdot}P^1\not\subset T''$，即 $\exists t_1\in {}^{\cdot}p^1$ 和 $M_1'\in R(M_1)$：$M_1'[t_1>$，显然 $t_1\notin T''$. 设 $M_1'[t_1>M_2$，$\exists p_1\in P^1$，$M_2(p_1)=1$，然而由于 $p_1\in P^1$，若 $p_1\in P_N\backslash(P_{Ri}\cup P_{Ro})$，这与 N_0 是活的相矛盾，同理 $p_1\notin P_R\backslash(P_{Ri}\cup P_{Ro})$，故 $p_1\in P_{Ri}\cup P_{Ro}$，以下分两种情况分析：

(1) $|p_1^{\cdot}|\geq 2$，由 Petri 网活性和良构性质知，p_1 中增加的这个标志不能导致任何变迁发生，只能“冻结”在那里，令 $P_{M_2}=\{p\in P\mid M_2(p)=0\}$，$P^2={}^{\cdot}T''\cap P_{M_2}$，显然 $P^2\subset P^1$.

再分析 ${}^{\cdot}P^2$，若 ${}^{\cdot}P^2\not\subset T'$，即 $\exists t_2\in {}^{\cdot}P^2$ 和 $M_2'\in R(M_2)$，使得 $M_2'[t_2\rangle$，则 $t_2\notin T''$. 设 $M_2'[t_2\rangle M_3$，则 $\exists p_2\in P^2$，使 $M_3(p_2)=1$，同 p_1 一样，p_2 中的标志也“冻结”在那里，不会导致任何变迁发生. 由于 M_1 的有限性，上述过程重复有限步之后，必然会遇到一个 M_k：$P^k={}^{\cdot}T''\cap P_{M_k}$，$P_{M_k}=\{p\in P\mid M_k(p)=0\}$ 使得 $\forall t\in {}^{\cdot}P^k$，$\forall M\in R(M_k)$：$\neg M[t\rangle$. 这时便有 ${}^{\cdot}P^k\subseteq T''$，由引理 4 知，$P^k$ 是一个死锁，且 $P^k\neq\phi$(否则 ${}^{\cdot}T''\cap P^k=\phi\rightarrow \forall t\in T'$：$M_k[t\rangle$) 这与题设相矛盾，命题得证.

(2) $|p_1^{\cdot}|=1$，则 $P_{Ri}\cup P_{Ro}$ 的外延子网含非空死锁，这与题设相矛盾，命题得证. 证毕.

引理 6[1]. 设 N 是一个 Petri 网，M 是网 N 的一个标识，D 是 N 的一个死锁，S 是 N 的一个陷阱，D 不被 M 标识 $\Rightarrow \forall M'\in R(M)$，$D$ 不被 M' 标识；S 被 M 标识 $\Rightarrow \forall M'\in R(M)$，$S$ 被 M' 标识.

定理 5. 设 $N=(\Re,N_0)$ 是位置可重写 Petri 网，N_0 是活的，R 是良构的，若 $N=(\Re,N_0)$ 是活的，当且仅当 $P_{Ri}\cup P_{Ro}$ 的外延子网的每个极小死锁 Q 中均包含一个含有标志的陷阱.

证明. 先证充分性.

(1) Q 既是死锁也是陷阱，这时只需证明 $M_0(Q)\neq 0$.

由于 Q 既是陷阱又是死锁，即 ${}^{\cdot}Q=Q^{\cdot}$，若 $M_0(Q)=0$，因 Q 是死锁，由引理 6 知 $\forall M'\in R(M_0)$，$M'(Q)=0$，则 $\forall t\in Q^{\cdot}$，$\forall M'\in R(M_0)$：$\neg M'[t\rangle$，这与 $N=(\Re,N_0)$ 是活的相矛盾，故 $M_0(Q)\neq 0$ 成立.

(2) Q 不是陷阱，则一定 $\exists t\in Q^{\cdot}$，$t\notin {}^{\cdot}Q$，记 $T^1={}^{\cdot}Q$，$\overline{T}^1=\{t\mid t\in Q^{\cdot}\wedge t\notin {}^{\cdot}Q\}$，$P^1=\{p\mid p\in {}^{\cdot}T^1\cap Q\}$，$N_{P^1}=(P^1,T^1;F^1,M(P^1))$，$F^1=((P^1\times T^1)\cup(T^1\times P^1))\cap F$，由 $N=(\Re,N_0)$ 的活性知，则 N_{P^1} 也是活的. 因 Q 是死锁，由引理 6 知，Q 以外的标志不会进入 Q，而 $\overline{T}^1$ 的发生会使 Q 中的标志减少，P^1 若是陷阱，由于 N_{P^1} 是活的，则 $M(P^1)\neq 0$，即得证.

若 $P^{1\cdot}\not\subset {}^{\cdot}P^1$，重复以上步骤，将得到一个活网 $N_{P^2}=(P^2,T^2;F^2,M(P^2))$，在执行若干步之后就会出现下述情况：

① $P^k\neq\varphi$，$P^{k\cdot}\subseteq {}^{\cdot}P^k$，且 $\mathrm{M}(P^k)\neq 0$，即结论得证.

② $P^k=\varphi$，由 PN_{p^k} 的构造过程可知，$P^k={}^{\cdot}T_k\cap P^{k-1}$，$T_k={}^{\cdot}P^{k-1}$，$\overline{T}^k=P^{k-1\cdot}-{}^{\cdot}P^{k-1}$.

$P^k=\varnothing$，即 ${}^{\cdot}({}^{\cdot}P^{k-1})=\varnothing$ 或 $P^{k-1}=\varnothing$，由 $N_{P^{k-1}}$ 的构造知 $P^{k-1}=\varnothing$ 不成立.

因为，若 ${}^{\cdot}P^{k-1}=\varnothing$，则 P^{k-1} 内的标志在 $P^{k-1\cdot}$ 的变迁发生之后，P^{k-1} 的标志将丢失，则 $P^{k-1\cdot}$ 将永远不再发生，这与 $N_{P^{k-1}}$ 是活的相矛盾，即 ${}^{\cdot}P^{k-1}\neq$

$\varnothing$；若${}^{\cdot}P^{k-1}\neq\varnothing$，即 $T^k\neq\varnothing$，则 N_{P^k} 是只含有变迁的 Petri 网，${}^{\cdot}T^k$中的标志可以经过 $\overline{T}^k$流到 $N_{P^{k-1}}$之外，进而流到 Q 之外，使得 T^k 中的变迁永远不能发生，这与 $N=(\Re,N_0)$是活的相矛盾. 综上所述，充分性得证.

再证必要性(反证法).

假设 $N=(\Re,N_0)$不是活的，由引理 5 的证明过程知：$P_{Ri}\cup P_{Ro}$外延子网含有空的死锁，而由题设知 $P_{Ri}\cup P_{Ro}$外延子网含的极小死锁中都含有陷阱，由引理 6 和题设知，陷阱被 M 标识$\Rightarrow\forall M'\in R(M)$，陷阱被 M'标识，因此无论变迁怎样发生，都不可能使 $P_{Ri}\cup P_{Ro}$外延子网中的死锁为空，这与题设相矛盾，即必要性得证. 证毕.

定理 6. 共享合成 Petri 网是位置可重写 Petri 网的一个实例.

证明. 只需证明位置可重写 Petri 网能够模拟共享合成 Petri 网，下面我们给出一个构造性证明.

根据共享合成 Petri 网的概念，令 N_1或 N_2为位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$，不防令 $N_1=N_0$，通过构建重写规则，使得重写规则的左手 L 是一个仅含有库所的退化 Petri 网(重写规则 $r=(L,R,{}^{\cdot}\tau,\tau,\tau^{\cdot})$，对 $\forall p\in P_0=P_1\cap P_2$，令 $P_{Li}=\{p\}$，$T_{Li}=\varnothing$，$F_{Li}=\varnothing$)，重写规则的右手 R 是一个 Petri 网 N_2的一个子网，且该子网是含有左手 L 的库所 p，但不含有其它共享库所 $P_0\backslash\{p\}$中任何库所的最大连通子网，用 R 重写 N_0. 令 $N_2=N_2$-R，继续重写规则的构建过程，经过$|P_0|$次($|P_0|$表示集合 P_0元素的个数)重写后得到 N_1和 N_2共享合成 Petri 网 N. 具体构造过程见算法 1.

由上面的构造，可以知道 $N=(\Re,N_0)$是一个退化的位置可重写 Petri 网，经过$|P_0|$个位置重写过程，我们就可以得到 N_1和 N_2共享合成 Petri 网，这是因为位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$在结构上满足：① $P=P_1\cup P_2$，$P_0=P_1\cap P_2\neq\varnothing$；② $T=T_1\cup T_2$，$T_1\cap T_2=\varnothing$；③ $F=F_1\cup F_2$是显然的. 由位置重写 Petri 网标识的定义，同样满足条件：④ $M_0(P)=\begin{cases}\max\{M_{01}(P),M_{02}(P)\}, & 若\ P\in P_1\cap P_2\\ M_{0i}(P), & 若\ P\in P_i-(P_1\cap P_2)\end{cases}$，$i=1,2$；即位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$的重写结果满足共享合成 Petri 网概念，命题得证. 证毕.

算法 1. 通过 Petri 网 N_2构造重写规则的右手 R_i.

1. $i=1$ to $|P_0|$；
2. 初始化，$P_{Ri}=\varnothing$，$T_{Ri}=\varnothing$，$F_{Ri}=\varnothing$，$Y=\varnothing$；
3. 取任意一个 $p\in P_0$；
4. $Y\leftarrow Y\cup\{p\}$ #{构造含有 p，但不含有 $P_0\backslash\{p\}$中任何位置的最大连通子网，从 p 开始遍历 Petri 网 PN_2，直到求得最大子网}
5. 判断是否 $Y=\varnothing$，不为空，执行步 6，若为空，执行步 17；
6. 取 $y\in Y$；
7. $x\leftarrow y$，$Y\leftarrow Y-\{x\}$；
8. 判断是否$(P_2\backslash P_0)\cup T_2=\varnothing$，若为空，则执行步 9，不为空，则执行步 10；
9. 判断是否 $F_2=\varnothing$，不为空，执行步 16，为空，则执行步 18；
10. 取 $y\in(P_2\backslash P_0)\cup T_2$，若$(x,y)\in F$，执行步 11，否则返回步 5；
11. 判断 y 是否标记已访问，若未被访问，则执行步 12，若 y 已被访问，则执行步 14；
12. 如果 $y\in P_2$，则执行步 13；否则，执行步 14；
13. $T_{Ri}\leftarrow T_{Ri}\cup\{x\}$，$P_{Ri}\leftarrow P_{Ri}\cup\{y\}$；
14. $y\in T_2$：$P_{Ri}\leftarrow P_{Ri}\cup\{x\}$，$T_{Ri}\leftarrow T_{Ri}\cup\{y\}$；
15. $F_{Ri}\leftarrow F_{Ri}\cup\{(x,y)\}$，$Y\leftarrow Y\cup\{y\}$，对 y 标记已访问；
16. $F_{Ri}\leftarrow F_{Ri}\cup\{(x,y)\}$，返回步 10；
17. $P_0\leftarrow P_0\backslash\{p\}$；
16. $T_2\leftarrow T_2-T_{Ri}$，$P_2\leftarrow P_2-P_{Ri}$，$F_2\leftarrow F_2-F_{Ri}$；
18. $i\leftarrow i+1$，返回步 1；
19. 算法终止.

4 性质分析示例

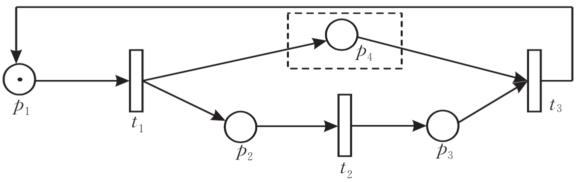
在下面图 2、图 3 的示例中，给出重写规则的右手 R 是非良构的两种不同的重写结果.

由图 2 分析，显然 N_0是活的，R 是非良构的，$N=(\Re,N_0)$是一个退化的位置可重写 Petri 网(R 重写库所 p_4)，位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$是有界的，但不是活的.

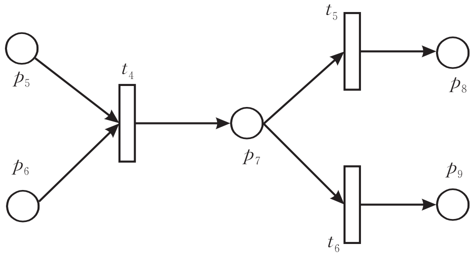
由图 3 分析，显然 N_0是活的，R 是非良构的，$N=(\Re,N_0)$是一个退化的位置可重写 Petri 网(R 重写库所 p_4)，位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$是活的，但不是有界的.

由图 4 分析，显然 N_0是活的，R 是良构的，$N=(\Re,N_0)$是一个退化的位置可重写 Petri 网，位置可重写 Petri 网 $N=(\Re,N_0)$是结构有界的、活的和可重复的.

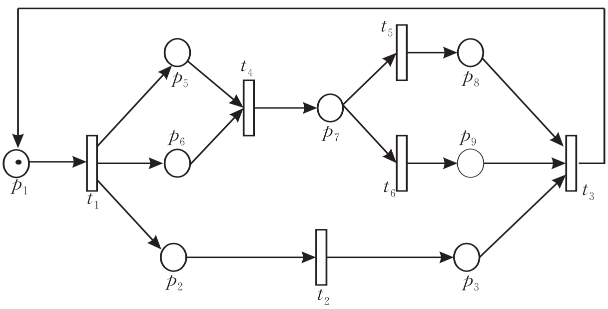
图 5 给出了共享合成 Petri 网的一个示例，图 6 给出了位置可重写 Petri 模拟图 5 的过程.



(a) N_0

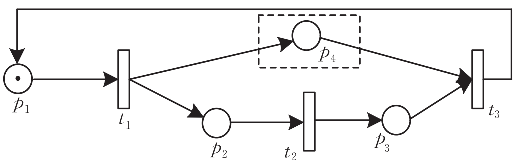


(b) R

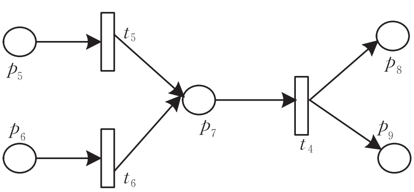


(c) N

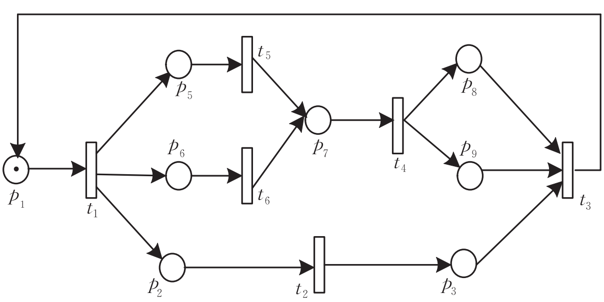
图 2 非活的非良构位置可重写 Petri 网



(a) N_0

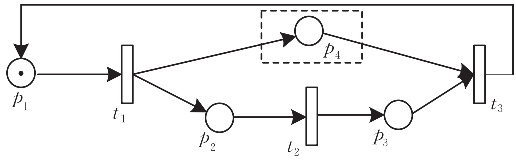


(b) R

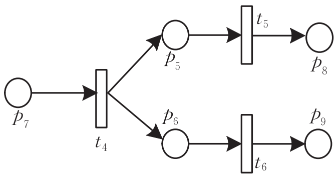


(c) N

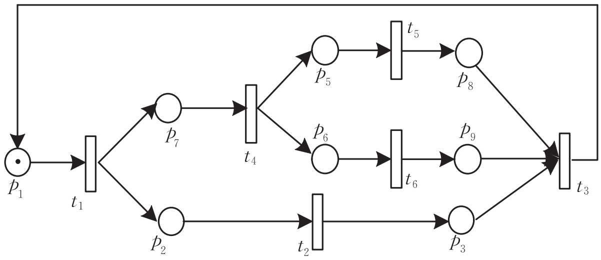
图 3 无界的非良构位置可重写 Petri 网



(a) N_0



(b) R



(c) N

图 4 良构的位置可重写 Petri 网

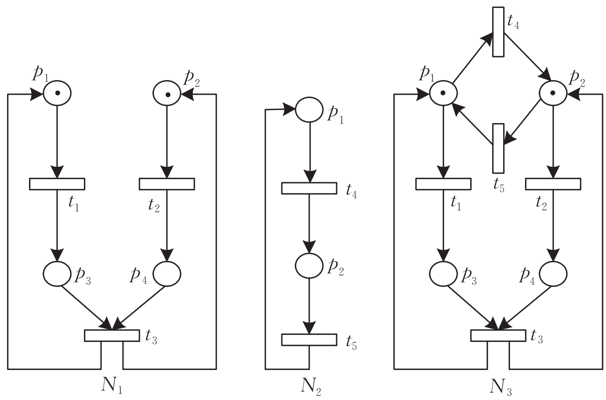


图 5 N_1，N_2 和共享合成网 N_3

5 总 结

本文在文献[2-7]等研究的基础上，提出了可重写 Petri 网和位置可重写 Petri 网的概念，分析了位置可重写 Petri 网保持有界性(保守性)、可重复性(协调性)及活性等的性质，给出了位置可重写 Petri 网保持活性的一个充要条件，建立了退化的位置可重写 Petri 网模拟共享合成 Petri 网的算法，证明了共享合成 Petri 网是位置可重写 Petri 网的一个实例. 该结果能够为 Petri 网对动态重构系统的形式化建模提供理论方法，为大规模动态分布式系统的形式化建模和验证提供有效途径. 今后我们将进一步研究可重写 Petri 网的其它子类的概念和性质，

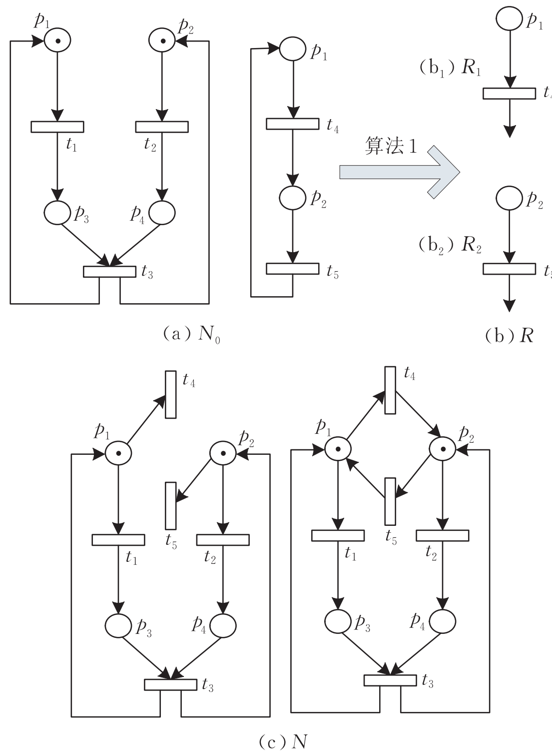


图 6　位置可重写 Petri 网模拟共享合成 Petri 网

不断丰富可重写 Petri 网的理论成果.

参　考　文　献

[1] Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541-580

[2] Llorens M, Oliver J. Structural and dynamic changes in concurrent systems: reconfigurable Petri nets. IEEE Transaction Computers, 2004, 53(9): 1147-1158

[3] Badouel E, Llorens M, Oliver J. Modelling concurrent systems: Reconfigurable nets//Proceedings of the International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications (PDPTA 2003). Las Vegas, USA, 2003: 1568-1574

[4] Dai Xianzhong, Li Jun, Meng Zhengda. Hierarchical Petri net modeling of reconfigurable manufacturing systems with improved net rewriting systems. International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 2009, 22(2): 158-177

[5] Li Jun, Dai Xianzhong, Meng Zhengda. Improved net rewriting system-extended Petri nets to supporting dynamic changes. Journal of Circuits, Systems, and Computers, 2008, 17(6): 1027-1052

[6] Li Jun, Dai Xianzhong, Meng Zhengda. Automatic reconfiguration of Petri net controllers for reconfigurable manufacturing systems with an improved net rewriting system-based approach. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2009, 6(1): 156-167

[7] Pang Shanchen, Li Yin, He Hua, Lin Chuang. A model for dynamic business processes and process changes. Chinese Journal of Electronics, 2011, 20(4): 632-636

[8] Murata T, Koh J Y. Reduction and expansion of live and safe marked graphs. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1980, 27(1): 68-71

[9] Lee K H, Favrel J. Hierarchical reduction method for analysis and decomposition of Petri nets. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15(2): 272-280

[10] Ehrig H, Hoffmann K, Padberg J. Transformations of Petri nets. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2006, 148(1): 151-172

[11] Luo Jun-Zhou, Gu Guan-Qun, Xie Jun-Qing. Petri net based protocol analyzer. Chinese Journal of Computers, 1997, 20(3): 206-212(in Chinese)
(罗军舟，顾冠群，谢俊清. Petri 网协议分析器. 计算机学报，1997，20(3)：206-212)

[12] Lin Chuang. On refinement of model structure for stochastic Petri nets. Journal of Software, 2000, 11(1): 104-109(in Chinese)
(林闯. 随机 Petri 网模型的精化设计. 软件学报，2000，11(1)：104-109)

[13] Xu Jing, Lu Wei-Ming. Liveness and boundedness of decomposable asymmetric choice nets. Journal of Software, 2002, 13(11): 2142-2148(in Chinese)
(徐静，陆维明. 可分解非对称选择网的活性和有界性. 软件学报，2002，13(11)：2142-2148)

[14] Yao Shu-Zhen, Jin Mao-Zhong. Strategy of state transition in UML based on Petri net. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 3(1): 70-83(in Chinese)
(姚淑珍，金茂忠. 基于 Petri 网的 UML 状态迁移策略. 北京航空航天大学学报，2008，3(1)：70-83)

[15] Hao Ke-Gang, Ding Jian-Jie. Hierarchical Petri nets. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2008, 2(2): 123-130(in Chinese)
(郝克刚，丁剑洁. 层次结构的 Petri 网. 计算机科学与探索，2008，2(2)：123-130)

[16] Zhao Wen, Yuan Chong-Yi, Liu Gang, Zhang Shi-Kun, Wang Li-Fu. Workflow process model verification using reduction method based on P/T system. Journal of Software, 2004, 15(10): 1423-1430(in Chinese)
(赵文，袁崇义，刘刚，张世琨，王立福. 基于 P/T 系统化简方法的工作流过程模型验. 软件学报，2004，15(10)：1423-1430)

[17] Ding Zhi-Jun, Jiang Chang-Jun, Zhou Meng-Chu, Zhang Ya-Ying. Preserving languages and properties in stepwise refinement-based synthesis of Petri nets. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2008, 38(4): 791-801

[18] Jensen K. EATCS Monographs in Theoretical Computer Science. Colored Petri nets: Basic Concepts, Analysis Methods and Pratical Use. 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag, 1997

[19] Betous-Almeida C, Kanoun K. Construction and stepwise refinement of dependability models. Performance Evaluation, 2004, 56(1): 277-306

[20] Suzuki L, Murata T. A method for stepwise refinement and abstraction of Petri nets. Journal of Computer and System Sciences, 1983, 27(1): 51-76

[21] Huang H J, Cheung T Y, Mak W M. Structure and behavior preservation by Petri-net-based refinements in system design. Theoretical Computer Science, 2004, 328(3): 245-269

[22] Sadiq Wasim, Orlowska Maria E. Analyzing process models using graph reduction techniques. Information Systems, 2000, 25(2): 117-134

[23] Li Peiwu, Lu Zhengding, Fu Xianglin. Reduction techniques of workflow verification and its implementation. Journal of Harbin Institute of Technology, 2004, 11(1): 109-113

[24] Llorens M, Oliver J, Silva J, Tamarit S, Vidal G. Dynamic slicing techniques for Petri nets. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2008, 223: 153-165

[25] Rakow A. Slicing Petri nets with an application to workflow verification//Proceedings of the 34th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM 2008). Novy Smokovec, Slovakia, 2008: 436-447

[26] Murata T, Shenker B, Shatz S M. Detection of Ada static deadlocks using Petri net invariants. IEEE Transactions on Software Engineering, 1989, 15(3): 314-326

[27] Zhou M C, McDermott K, Patel P A. Petri net synthesis and analysis of a flexible manufacturing system cell. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 523-531

[28] Lu Wei-Ming. Alternative action properties of C/E system. Science in China (Series A), 1993, 23(3): 219-224

[29] Bergenthum R, Desel J, Lorenz R, Mauser S. Synthesis of Petri nets from finite partial languages. Fundamenta Informaticae, 2008, 88(4): 437-468

[30] Koutny M, Pietkiewicz-Koutny M. Synthesis of Petri nets with localities. Scientific Annals of Computer Science, 2009, 19: 1-23

[31] Xia Chuanliang. A Petri net synthesis method. Journal of Networks, 2010, 5(6): 699-707

[32] Souissi Y. On liveness preservation by composition of nets via a set of places//Proceedings of the 11th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets. Paris, France, 1990: 277-295

[33] Jeng M D. A Petri net synthesis theory for modeling flexible manufacturing systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 1997, 27(2): 169-183

[34] Jiang Changjun, Wu Zhehui. Net operations. Journal of Computer Science and Technology, 1992, 7(4): 333-334

[35] Jiang Changjun. Dynamic invariance of Petri net. Science in China Series E: Technological Sciences, 1997, 40(6): 605-611

[36] Jiao L, Cheung T Y, Lu W. On liveness and boundedness of a symmetric choice nets. Theoretical Computer Science, 2004, 311(1): 165-197

[37] Badouel E, Darondeau Ph. The synthesis of Petri nets from path-automatic specifications. Information and Computation, 2004, 193(2): 117-135

[38] Chen H X. Control synthesis of Petri nets based on S-decreases. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 2000, 10(3): 233-249

[39] Xia Chuan-Liang, Jiao Li, Lu Wei-Ming. Property analysis of synthesis of Petri nets shared PP-Type subnets. Journal of Software, 2007, 18(1): 22-31(in Chinese)
(夏传良，焦莉，陆维明. Petri 网共享 PP-型子网合成性质分析. 软件学报，2007，18(1)：22-31)

[40] Wang H Q, Jiang C J, Liao S Y. Behavior relations in synthesis process of Petri net models. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2000, 16(4): 400-406

[41] Pu Fei, Lu Wei-Ming, Song Wen. Language recursiveness and liveness in sharing synthesis of Petri net systems. Journal of Software, 2004, 15(3): 317-326(in Chinese)
(蒲飞，陆维明，宋文. 共享合成 Petri 网系统的语言递归性与系统活性. 软件学报，2004，15(3)：317-326)

[42] Pang Shan-Chen, Jiang Chang-Jun, Sun Ping, Zhou Chang-Hong. Property analysis of shared composition Petri nets. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(6): 944-948(in Chinese)
(庞善臣，蒋昌俊，孙萍，周长红. 共享合成 Petri 网的性质分析. 自动化学报，2004，30(6)：944-948)

[43] Jiao Li, Lu Wei-Ming. Synthesis and property-preservation of Petri net systems based on shared places. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(3): 352-360(in Chinese)
(焦莉，陆维明. 基于共享位置的 Petri 网系统综合与保性. 计算机学报，2007，30(3)：352-360)

[44] Berthelot G. Transformations and decompositions of nets//Proceedings of the Advanced Course on Petri Nets. Bad Honnef, Germany, 1986: 359-376

[45] Aybar A, Ifar A. Overlapping decompositions and expansions of Petri nets. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(3): 511-515

[46] Li Jian-Qiang, Fan Yu-Shun. Timing boundedness verification and analysis of workflow model. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2002, 8(10): 770-775(in Chinese)
(李建强，范玉顺. 工作流模型时间有界性验证与分析研究. 计算机集成制造系统，2002，8(10)：770-775)

[47] Li Jianqiang, Fan Yushun, Zhou Mengchu. Timing constraint workflow nets for workflow analysis. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part A: System and Humans, 2003, 33(2): 179-193

[48] Pang Shan-Chen, Jiang Chang-Jun. Workflow performance analysis based on invariant decomposition algorithm. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(5): 908-918(in Chinese)
(庞善臣，蒋昌俊. 一种基于不变量结构分解的工作流性能分析. 计算机学报，2010，33(5)：908-918)

[49] Pang Shanchen, Lin Chuang, Zhou Mengchu, Li Yin. A workflow decomposition algorithm based on invariants. Chinese Journal of Electronics, 2011, 20(1): 1-5

[50] van der Aalst W M P. The application of Petri nets to workflow management. The Journal of Circuit, System and Computers, 1998, 8(1): 21-66

PANG Shan-Chen, born in 1974, Ph. D., associate professor. His current main research area is the Petri nets, formal methods, service computing and trusted computing.

LIN Chuang, born in 1948, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include computer networks and performance evaluation.

Background

Petri nets are powerful in modeling, analysis, verification, simulation, performance evaluation and control of discrete dynamic systems such as automated manufacturing systems and workflow systems. The fundamental advantages of Petri nets are their graphical semantics, mathematical analysis methods, and their capacity to systematically investigate many properties and characteristics of the modeled systems. The behavioral properties of Petri nets, e. g., liveness, boundedness (or safety), and reversibility, are very vital to operating and control of practical systems modeled.

However, this formalism does not offer a direct way to address some modeling issues such as dynamic changes, multiple operating modes of operations, etc. Moreover due to the state space explosion problem when synthesizing and analyzing a large scale formal model, the method is likely has a higher analysis complexity, or to make analysis impossible. To avoid and solve the problems, rewritable Petri nets (RWPN) and rewritable place of Petri nets (RWPPN) is presented in this paper. Some properties of the rewritable place of Petri nets, such as structural boundedness, conservation, repetitiveness, and liveness are analyzed and verified. A necessary and sufficient condition for the liveness of the rewritable place of Petri nets is presented, and a simulation algorithm that degeneration rewritable place of Petri nets simulate sharing synthesis Petri nets is established. The paper shows that the sharing synthesis Petri net is an instance of rewritable place of Petri nets. The results provide a theoretical method for Petri net formal modeling of dynamic reconfiguration systems, and provide an effective way for the formal verification of large-scale dynamic distributed systems.

This work is supported by the National Basic Research Program of China (973 Program) of China (No. 2010CB328105), the National Natural Science Foundation of China (Nos. 91018007, 60970001, 60874036, 61170183), the Scientific Research Foundation for the Excellent Middle-Aged and Youth Scientists of Shandong Province of China (No. BS2011DX027, BS2011SW025), the Technology Development projects of Qingdao City of China (No. 12-1-4-6-(7)-jch).