

基于张量的取向估计方法的理论框架

邵晓芳 李淑华

(海军航空工程学院青岛分院 山东 青岛 266041)

摘 要 取向估计的主要目的是计算出图像等多维信号各点的取向信息,在图像处理和机器视觉的底层处理中具有广泛的应用.在总结现有基于张量的取向估计方法的基础上,文中提出了基于张量的取向估计方法的理论框架,并从取向张量的构造这一核心问题入手证明各种基于张量的取向估计方法都可以统一到这一理论框架之下,从而有利于对这类方法进行深入研究或设计更准确的取向估计方法.

关键词 取向;取向估计;取向张量

中图法分类号 TP391 **DOI号**: 10.3724/SP.J.1016.2011.01726

A Computation Framework for Orientation Tensor Estimation

SHAO Xiao-Fang LI Shu-Hua

(Qingdao Branch of Naval Aeronautical Engineering Institute, Qingdao, Shandong 266041)

Abstract Orientation estimation aims to compute the orientation angles of multi-dimensional signals and can be applied to many basic tasks in image processing and computer vision. This paper gives a short review of three methods for estimating local orientation tensors. The signal models being used are rather different, but they produce similar result which motivates the existence of a common computation framework for estimating orientation tensors. Such a framework is proposed and proved by investigating the key problem of how to construct the orientation tensors to facilitate further research work and design more accurate orientation estimation methods.

Keywords orientation; orientation estimation; orientation tensors

1 引 言

一般情况下,多维信号是用矢量表示的,而矢量是带有方向性的,对于图像信息而言,这种方向性成为区分多维信号和一维信号的基本特征之一,本文将多维信号所具有的方向性定义为“取向”.首先区分一下取向(orientation)和方向(direction).举例说来,在二维情况下,一条直线有其特定的取向,但是没有唯一确定的方向,矢量具有唯一确定的方向,但是没有取向;在三维空间中的平面也是只有唯一确

定的取向而没有唯一确定的方向,其取向可以用矢量表示,但是夹角为 π 的矢量被认为是表示同一取向.

取向估计的主要目的是计算出图像等多维信号各点的取向信息,在边缘提取、图像分割、纹理分析、自适应滤波、立体视差估计、图像增强和运动分析中都有直接应用,对位移和光流场的计算也是对信号在三维空间中进行取向估计.如果把视觉分为三个层次:底层视觉、中层视觉和高层视觉,那么底层视觉的主要任务就是提取不同尺度下的边缘及其取向信息.

根据现有的取向估计方法对取向的表示方法不同, 可以将这些方法分为基于通道表示的方法、基于自相关函数的方法和基于张量的方法. 基于通道表示的方法^[1]实际上是选择适当的核函数对信号在不同尺度下的梯度分别作一个映射, 然后通过特定核函数的编解码过程来进行取向估计. 基于自相关函数的方法^[2]直接计算信号的自相关函数, 然后用抛物线拟合自相关函数的一小部分中心值, 最后根据所得抛物线的主曲率推导所要估计的取向. 基于张量的方法^[3-10]用二阶张量表示取向, 通过构造取向张量来计算取向信息, 算法简单有效, 是目前应用最为广泛的一种方法.

本文的主要工作是为基于张量的取向估计方法建立统一的理论框架, 使得各种基于张量的取向估计方法可以在这一理论框架中得到统一的解释. 由于基于通道表示的方法和基于自相关函数的方法只是在取向表示方法和相应的计算过程上与基于张量的方法有所差别, 因此本文的理论框架对其它两类方法也具有借鉴意义.

2 基于张量的取向估计方法

根据取向张量的计算方法不同, 基于张量的取向估计方法可以进一步细分为梯度张量法^[3-6]、多项式张量法^[7]和正交张量法^[8-10].

2.1 梯度张量法

梯度张量法与以往一些文献中提到的结构张量(structure tensor)的计算方法相同, 主要是采用某种微分算子计算图像的灰度梯度, 然后根据梯度方向矢量构造张量. 具体计算公式如下^[5]:

$$\mathbf{T}_g = \int \omega(|\mathbf{x}|) \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中, \mathbf{x} 为矢量空间坐标, $\omega(|\mathbf{x}|)$ 为该点的高斯加权值, $\nabla f(\mathbf{x})$ 为该点的梯度.

2.2 多项式张量法

基于多项式张量的方法^[7]是采用正则化卷积(normalized convolution)的信号分析方法, 综合考虑信号的不确定性和信号分析函数, 首先选择一组信号分析函数构成一组基, 然后通过正则化卷积获得这组基的系数, 这组系数与信号的泰勒展开式具有对应关系, 最后采用多项式近似构造取向张量.

基于多项式张量的方法对信号建立了一个多项式近似框架:

$$f(\mathbf{x}) \sim \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad (2)$$

式中, \mathbf{x} 为待估计信号, \mathbf{A} , \mathbf{b} , c 分别为二次项、一次项和零次项的系数矩阵, 基于多项式张量的方法就是通过正则化卷积针对这一信号框架进行取向估计.

多项式张量主要针对式(2)所示的信号框架, 通过多项式近似的框架参数构造张量^[7]:

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{A} \mathbf{A}^T + \gamma \mathbf{b} \mathbf{b}^T \quad (3)$$

式中, γ 为奇偶滤波器之间的加权系数, 如果令 f_{model} 表示信号框架, f 表示信号, ω_a 表示加权系数, 则 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, c] = \arg \min \|f_{\text{model}} - f\|_{\omega_a}^2$. 其中 \mathbf{A} , \mathbf{b} 的计算公式分别为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \omega_a(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{I} \cdot \omega_a(\mathbf{x}) \right] * f(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x} \omega_a(\mathbf{x}) \right] * f(\mathbf{x}) \quad (5)$$

式中, $\omega_a(\mathbf{x})$ 为归一化的高斯加权函数, 且 $\omega_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}}$.

2.3 正交张量法

基于正交张量的方法一般是设计一组频域正交滤波器, 对信号进行滤波, 最后根据滤波器组的输出结果构造张量, 用于估计取向.

正交张量的构造公式如下^[8]:

$$\mathbf{T}_q = \sum_k \| \mathbf{q}_k \| \tilde{\mathbf{N}}_k \quad (6)$$

式中, \mathbf{q}_k 为第 k 个方向的滤波结果, $\| \mathbf{q}_k \|$ 代表 \mathbf{q}_k 的模值, 如果 \mathbf{n}_k 是滤波器引导矢量, 则要求 $\{\mathbf{n}_k\}$ 张成矢量空间的一组基或一组框架, 而 $\{\tilde{\mathbf{n}}_k\}$ 则为 $\{\mathbf{n}_k\}$ 的对偶基或对偶框架, $\tilde{\mathbf{N}}_k = \tilde{\mathbf{n}}_k \tilde{\mathbf{n}}_k^T$. 一般地,

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\boldsymbol{\omega}) H_k(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (7)$$

式中, $F(\boldsymbol{\omega})$ 为信号 $f(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换, $H_k(\boldsymbol{\omega})$ 为第 k 个方向的正交滤波器.

一般地,

$$H_k(\boldsymbol{\omega}) = \rho(\boldsymbol{\omega}) d_k(\hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{n}_k), \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{n}_k > 0 \quad (8)$$

式中, ρ 为径向函数; d 为方向函数; $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} / \|\boldsymbol{\omega}\|$; \mathbf{n}_k 是滤波器引导矢量.

3 理论框架

基于张量的取向估计方法进行取向估计的过程可以分解为两个主要步骤:

1. 构造计算取向信息的张量;
2. 根据张量计算取向信息.

其中, 构造计算取向信息的张量是最关键的一步, 也

是不同方法的主要区别所在. 下面首先就张量的构造建立统一的计算框架.

3.1 张量的构造

张量的构造主要是计算表示与取向张量相关的矩阵. 本文从正交张量的构造方法中获得启发, 对于信号中任一点, 根据信号在该点的滤波结果来计算其取向张量. 另外, 也可以从正交张量的构造中得出取向张量和取向张量矩阵中的各分量之间的关系, 即它们的滤波结果是相同的, 只是取向张量求和时是乘上相应滤波器引导矢量的对偶矢量构成的张量 $\tilde{\mathbf{N}}_k$, 而取向张量矩阵的各分量乘的是 $\tilde{\mathbf{N}}_k$ 中相应的分量.

在频域中, 信号与滤波器的卷积可以转化为乘积计算, 于是, 各种取向张量的构造方法可统一用式(9)表示, 而其分量可统一用式(10)表示:

$$\mathbf{T} = \int S(\boldsymbol{\omega}) \cdot H(\boldsymbol{\omega}) \cdot D(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (9)$$

$$T_{ij} = \int S(\boldsymbol{\omega}) \cdot H(\boldsymbol{\omega}) \cdot D_{ij}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

上式中, $S(\boldsymbol{\omega})$ 表示信号项; $H(\boldsymbol{\omega})$ 为进行取向估计所选用的滤波器; $D(\boldsymbol{\omega})$ 与式(6)中 $\tilde{\mathbf{N}}_k$ 的含义相同; $D_{ij}(\boldsymbol{\omega})$ 为 $D(\boldsymbol{\omega})$ 中第 i 行第 j 列的分量; $\int(\cdot)$ 代表与 $\boldsymbol{\omega}$ 的维数相对应的积分运算. 不同的取向张量计算方法主要是滤波器 $H(\boldsymbol{\omega})$ 的设计以及与滤波器的阶数有关的信号项 $S(\boldsymbol{\omega})$ 有所差别, 但是滤波器均需要具备以下性质:

(1) 对称性

令 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 则

$$H(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = H(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1).$$

(2) Hermitian 共轭性

令 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 则

$$H(-\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n) = \overline{H(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1)}.$$

(3) 张量矩阵的非负性

$$\text{即 } \mathbf{T} = \int S(\boldsymbol{\omega}) \cdot H(\boldsymbol{\omega}) \cdot D(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}.$$

本文将在下一小节通过理论推导证明, 基于张量的取向估计方法尽管在具体计算方法上有所差别, 但均可统一到这一框架之下.

3.2 根据张量计算取向信息

完成了对图像中各点与取向信息相关的张量的计算, 就可以计算相应的取向信息. 根据前面分析的取向估计原理, 如果该张量是通过梯度张量法求得的, 则可对其进行特征值分解, 取最小特征值对应的特征向量为信号的取向矢量; 如果该张量是通过多

项式张量法或者正交张量法求得的, 由于此时求得的张量与梯度张量法求得的张量是正交的关系, 因而取最大特征值对应的特征向量为信号的取向矢量. 进一步, 相应的取向角信息可由取向矢量求出.

如令取向张量为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

张量的特征值分解如下式所示:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_k^T \quad (12)$$

式中, \mathbf{T} 为张量, $\{\lambda_k\}$ 表示张量矩阵的特征值, $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}$ 为相应的特征矢量, 根据张量的计算方法及其特征值分解结果, 选择最小或最大特征值对应的特征矢量作为取向矢量, 假定 $\hat{\mathbf{e}}_k = (e_{2,k}, e_{1,k})$ 为选取的取向矢量, 则相应的取向角为

$$\arctan(e_{2,k}, e_{1,k}) \quad (13)$$

4 理论框架的证明

下面就通过理论推导证明各种基于张量的取向估计方法可以统一到本文建立的理论框架之中.

4.1 梯度张量

在实际计算过程中, 梯度的计算可以转化为信号与高斯微分函数的卷积, 即

$$\nabla(g * f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) * \nabla g \quad (14)$$

于是, 梯度张量的计算结果为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_g &= \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) [\nabla(f * g)(\mathbf{x})] \cdot [\overline{\nabla(f * g)(\mathbf{x})}]^T d\mathbf{x} \\ &= \iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) [(f * \nabla g)(\mathbf{y})] \cdot [\overline{(f * \nabla g)(\mathbf{z})}]^T \cdot \\ &\quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \\ &= \iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) [(f * \nabla g)(\mathbf{y})] \cdot [\overline{(f * \nabla g)(\mathbf{z})}]^T \cdot \\ &\quad \left[\iint e^{-j\boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{j\boldsymbol{\omega}_2(\mathbf{x}-\mathbf{z})} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \right] d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \\ &= \iiint \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) e^{-j\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)} d\mathbf{x} \int (f * \nabla g)(\mathbf{y}) e^{j\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{y}} d\mathbf{y} \cdot \\ &\quad \int [\overline{(f * \nabla g)(\mathbf{z})}]^T e^{j\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{z}} d\mathbf{z} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= (2\pi)^{-2n} \iint W(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} \cdot \\ &\quad G(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{G(\boldsymbol{\omega}_2)} \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^T d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= -(2\pi)^{-2n} \iint W(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} \cdot \\ &\quad G(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{G(\boldsymbol{\omega}_2)} \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^T d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $W(\cdot)$ 、 $F(\cdot)$ 、 $G(\cdot)$ 分别为 $\boldsymbol{\omega}(\cdot)$ 、 $f(\cdot)$ 、 $\nabla g(\cdot)$

的 Fourier 变换.

一般地,

$$W(\cdot) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_w)^n} e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2\sigma_w^2}} \quad (16)$$

$$G(\cdot) = e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{2\sigma_\Delta^2}} \quad (17)$$

式中, σ_w 和 σ_Δ 分别为高斯加权函数和高斯微分函数的方差.

由式(15)可知, 对于梯度张量,

$$S(\boldsymbol{\omega}) = F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} \triangleq S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (18)$$

$$H(\boldsymbol{\omega}) = -W(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) G(\boldsymbol{\omega}_2) \overline{G(\boldsymbol{\omega}_2)} \triangleq H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (19)$$

$$D(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^\top \triangleq D(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (20)$$

由式(20)可知, $H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ 满足

$$H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = H(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1) \quad (21)$$

$$H(-\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_2) = \overline{H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)} \quad (22)$$

即滤波器满足对称性和 Hermitan 共轭性.

同时,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_g &= \iint S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \cdot H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \cdot D(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= -\iint W(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} \cdot \\ &\quad G(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{G(\boldsymbol{\omega}_2)} \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^\top d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \iiint \tau(\mathbf{x}) e^{-j\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)} d\mathbf{x} \cdot \\ &\quad F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} G(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{G(\boldsymbol{\omega}_2)} \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^\top d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \int \tau(\mathbf{x}) \left[\int \boldsymbol{\omega}_1 F(\boldsymbol{\omega}_1) G(\boldsymbol{\omega}_1) e^{-j\mathbf{x}\boldsymbol{\omega}_1} d\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \right. \\ &\quad \left. \int \boldsymbol{\omega}_2 F(\boldsymbol{\omega}_2) G(\boldsymbol{\omega}_2) e^{-j\mathbf{x}\boldsymbol{\omega}_2} d\boldsymbol{\omega}_2 \right] d\mathbf{x} \quad (23) \end{aligned}$$

令 $a(\mathbf{x}) = \int \boldsymbol{\omega} F(\boldsymbol{\omega}) G(\boldsymbol{\omega}) e^{-j\mathbf{x}\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega}$, 则

$$\mathbf{T}_g = \int \tau(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \overline{a(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int \tau(\mathbf{x}) \|a(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} \geq 0 \quad (24)$$

由式(24)可知, 梯度张量满足非负性.

综上, 梯度张量的构造方法可以统一到式(9)的理论框架下, 且满足滤波器的各项性质.

4.2 多项式张量

对多项式张量的构造而言, 如果只考虑信号的局部特性, 则式(4)、式(5)可变换为

$$A_{ij} = \int \left[\frac{1}{2\sigma^4} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^\top \tau_a(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma^2} \delta_{ij} \cdot \tau_a(\mathbf{x}) \right] * f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (25)$$

$$b_i = \int \left[-\frac{1}{\sigma^2} x_i \tau_a(\mathbf{x}) \right] * f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (26)$$

式中, A_{ij} 代表局部信号 \mathbf{x}_i 、 \mathbf{x}_j 的二次项拟合系数, b_i 表示信号 \mathbf{x}_i 的一次项拟合系数.

根据 Parseval 定理, 式(25)、式(26)可以变换为

$$A_{ij} = -\frac{1}{2(2\pi)^n} \int \omega_i \omega_j W_a(\boldsymbol{\omega}) F(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (27)$$

$$b_i = \frac{j}{(2\pi)^n} \int \omega_i W_a(\boldsymbol{\omega}) F(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (28)$$

式中, $W_a(\cdot) = e^{-\frac{\sigma^2 \|\cdot\|^2}{2}}$, 为式(25)中数据项 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^\top \tau_a(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换.

于是,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \sum_k A_{ik} A_{jk} + \gamma b_i b_j \\ &= (2\pi)^{-2n} \iint \omega_{1,i} \omega_{2,j} \left[\frac{1}{4} \sum_k \omega_{1,k} \omega_{2,k} - \gamma \right] \cdot \\ &\quad W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= (2\pi)^{-2n} \iint \omega_{1,i} \omega_{2,j} \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\omega}_1^\top \boldsymbol{\omega}_2 - \gamma \right] \cdot \\ &\quad W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \quad (29) \end{aligned}$$

由式(29)可得, 在式(10)的统一计算框架下, 计算多项式张量的信号项、滤波器项及表示信号方向的分量分别为

$$S(\boldsymbol{\omega}) = F(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_2) \triangleq S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (30)$$

$$H(\boldsymbol{\omega}) = \left[\frac{1}{4} \boldsymbol{\omega}_1^\top \boldsymbol{\omega}_2 - \gamma \right] W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) \triangleq H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (31)$$

$$D_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2 \triangleq D_{ij}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (32)$$

于是,

$$D(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2^\top \triangleq D(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (33)$$

由式(31)可知, $H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ 满足对称性和 Hermitan 共轭性.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_p &= \iint S(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \cdot H(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \cdot D(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \frac{1}{4} \iint \boldsymbol{\omega}_1^\top \boldsymbol{\omega}_2^\top W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 - \\ &\quad \gamma \iint \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2 W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \frac{1}{4} \iint \boldsymbol{\omega}_1^\top \boldsymbol{\omega}_2^\top W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 + \\ &\quad \gamma \iint \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2 W_a(\boldsymbol{\omega}_1) W_a(\boldsymbol{\omega}_2) F(\boldsymbol{\omega}_1) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \frac{1}{4} \int \boldsymbol{\omega}_1^\top W_a(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_1) d\boldsymbol{\omega}_1 \int \boldsymbol{\omega}_2^\top W_a(\boldsymbol{\omega}_2) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} d\boldsymbol{\omega}_2 + \\ &\quad \gamma \int \boldsymbol{\omega}_1 W_a(\boldsymbol{\omega}_1) F(\boldsymbol{\omega}_1) d\boldsymbol{\omega}_1 \int \boldsymbol{\omega}_2 W_a(\boldsymbol{\omega}_2) \overline{F(\boldsymbol{\omega}_2)} d\boldsymbol{\omega}_2 \quad (34) \end{aligned}$$

令 $\mathbf{a}_1 = \int \boldsymbol{\omega}^\top W_a(\boldsymbol{\omega}) F(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}_2 = \int \boldsymbol{\omega} W_a(\boldsymbol{\omega}) \overline{F(\boldsymbol{\omega})} d\boldsymbol{\omega}$,

则式(34)可以转化为

$$\mathbf{T}_p = \frac{1}{4} \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma \mathbf{a}_2 \bar{\mathbf{a}}_2 = \frac{1}{4} \|\mathbf{a}_1\|^2 + \gamma \|\mathbf{a}_2\|^2 \quad (35)$$

因而,对于 $\gamma \geq 0$, $\mathbf{T}_p \geq \mathbf{0}$, 即多项式张量满足非负性.

4.3 正交张量

在式(9)的统一计算框架下,正交张量的计算为信号在频域中通过一组正交滤波器进行滤波,即

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q &= \sum_k \|\mathbf{q}_k\| \tilde{\mathbf{N}}_k \\ &= \sum_k \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\boldsymbol{\omega}) H_k(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \right\| \tilde{\mathbf{N}}_k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|F(\boldsymbol{\omega})\| \sum_k \|H_k(\boldsymbol{\omega})\| \tilde{\mathbf{N}}_k d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|F(\boldsymbol{\omega})\| \sum_k \|\rho(\boldsymbol{\omega}) d_k(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n_k})\| \tilde{\mathbf{N}}_k d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \|F(\boldsymbol{\omega})\| \rho(\boldsymbol{\omega}) \sum_k \|d_k(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n_k})\| \tilde{\mathbf{N}}_k d\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (36)$$

由式(36)可得,在式(9)的统一计算框架下,对于正交张量:

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \|F(\boldsymbol{\omega})\| \quad (37)$$

$$H(\boldsymbol{\omega}) \cdot D(\boldsymbol{\omega}) = \rho(\boldsymbol{\omega}) \sum_k \|d_k(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{n_k})\| \tilde{\mathbf{N}}_k \quad (38)$$

由式(38)可知, $H(\boldsymbol{\omega})$ 满足对称性和 Hermitian 共轭性. 另外,由于正交滤波器 $H(\boldsymbol{\omega})$ 的一个重要特点就是在半个频域上值为 0, 一般情况下都令正交滤波器在负半频域上值为 0, 因而正交张量满足非负性.

综上,各种基于张量的取向估计方法均可统一在本文提出的理论框架之下.

5 正交张量法的改进及实验结果

根据前面建立的理论框架可以知道,基于张量的取向估计方法的关键在于滤波器的设计. 鉴于正交张量法算法简单、应用广泛,我们选择对这一种方法的滤波器进行了重新的设计,以提高其估计的准确性和鲁棒性.

算法改进的主要思想是在正交滤波的基础上进行非线性扩散滤波,也就是将正交滤波器和非线性扩散滤波结合起来构成新的滤波器,由于非线性扩散能够在抑制噪声的同时保持图像原有的特征点,因此这两者结合之后就能够达到我们的设计目的^[11].

实验方法是应用上述方法对已知取向信息的测

试图像进行取向估计得到进行取向估计的平均误差,并添加方差为 0.1 的高斯噪声比较了方法改进前后对噪声的鲁棒性. 这里,测试图像如图 1 所示,其中图 1(a)为原始测试图像(大小为 256×256),由各种倾角的直线组成,这里选取对各种倾角的直线进行估计的原因是不同倾角的直线离散化的误差不同,只有某些特定的方向(如水平、垂直和 45° 方向)不存在离散化误差;图 1(b)为测试图 1(a)被添加了方差为 0.1 的高斯噪声的结果.

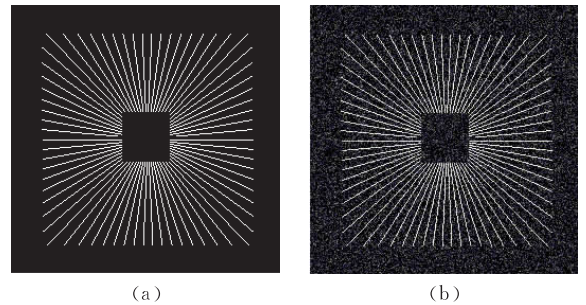


图 1 取向估计的测试图像

对不同倾角的直线分别计算平均估计误差,可以得到改进后的方法对不同角度的直线进行取向估计与原方法的误差比较曲线,如图 2 所示. 从该图中可以看出,改进措施不但减小了估计误差,而且减小了估计误差的起伏变化幅度. 实验中,正交滤波器的参数为 $B=3$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, 非线性滤波过程中的高斯平滑函数的方差为 $\sigma = 0.01$, 非线性滤波的参数 $t=20$ ^[11].

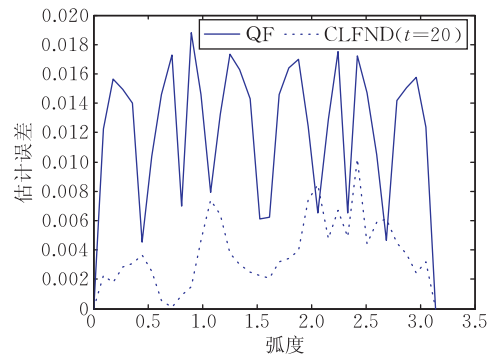


图 2 本文方法与基于正交滤波的方法的估计误差曲线

为测试改进后的方法与原方法相比对噪声的鲁棒性,我们对图 1(a)依次添加方差为 0~1 的高斯噪声,比较了原方法和本文方法分别进行非线性扩散迭代 20 次、100 次的平均估计误差变动曲线. 从图 3 中可以看出,本文的方法减小了噪声对估计精度的影响,而且随着迭代次数 t 的增加,可以进一步减小估计误差^[11].

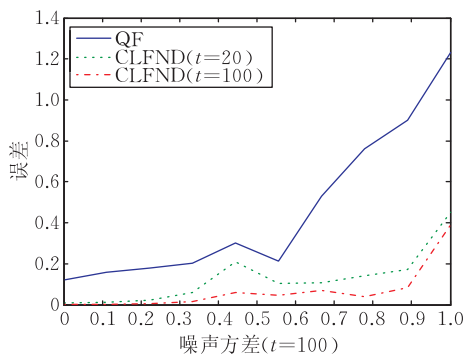


图 3 对图 1(a)添加高斯噪声情况下的估计误差变动曲线

6 结束语

本文在总结分析现有取向估计方法的基础上,建立了基于张量的取向估计方法的理论框架,从而使现有的基于张量的取向估计方法在此理论框架下得到统一的解释。建立这一理论框架既方便于比较和分析现有的方法,也有利于设计出新的取向估计方法。

参 考 文 献

- [1] Spies Hagen. Gradient channel matrices for orientation estimation. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden; Technical Report LiTH-ISY-R-2540, 2003
- [2] Mester Rudolf. Orientation estimation: Conventional tech-

niques and a new non-differential approach//Proceedings of the 10th European Signal Processing Conference. Tampere, Finland, 2000, 2: 921-924

- [3] Zhou X, Baird J P, Arnold J F. Fringe-orientation estimation by use of a gaussian gradient filter and neighboring-direction averaging. *Applied Optics*, 1999, 38(5): 795-804
- [4] Ratha N K, Chen S Y, Jain A K. Adaptive flow orientation based feature extraction in fingerprint images. *Pattern Recognition*, 1995, 28(11): 1657-1672
- [5] Maltoni Davide, Maio Datio. *Handbook of Fingerprint Recognition*. Berlin: Springer, 2003
- [6] Zhou Jie, Gu Jinwei. A model-based method for the computation of fingerprints' orientation field. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(6): 821-835
- [7] Farneback Gunnar. Spatial domain methods for orientation and velocity estimation[Ph. D. dissertation]. Department of Electrical Engineering, Linköpings University, Linköping, Sweden, 1999
- [8] Granlund G H, Knutsson H. *Signal Processing for Computer Vision*. London: Kluwer Academic Publishers, 1995
- [9] Wilson R, Bhalerao A H. Kernel designs for efficient multi-resolution edge detection and orientation estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(3): 384-389
- [10] Klimanee C, Nguyen D T. On the design of 2-D Gabor filtering of fingerprint images//Proceedings of the 1st IEEE Consumer Communications and Networking Conference. Las Vegas, Nevada USA, 2004: 430-435
- [11] Shao Xiao-Fang, Sun Ji-Xiang, Chen Hai-Xin. Nonlinear diffusion for orientation estimation. *Journal of Electronics (China)*, 2006, 23(4): 610-614



SHAO Xiao-Fang, born in 1977, Ph. D., lecturer. Her main research interests include computer vision and intelligent pattern recognition.

LI Shu-Hua, born in 1962, professor. His main research interests include electromagnetics theory and microwave technology.

Background

This paper focuses on the theory analysis of tensor-based orientation estimation methods which are widely used in image processing and computer vision. The main contributions of this paper are: (1) Give a classification for existing orientation estimation algorithms; (2) Give a computation framework for the most popular tensor-based methods, which is proposed and proved by investigating the key problem of how constructe the orientation tensors.

The work is supported by a Natural Science Fund of Shandong province under grant No. 2009BSB02003. The pro-

ject aims to improve the research work on tensor-based image processing methods and to apply tensor voting to extract meaningful curves in noisy images which are captured at the end of a production line. Over the last three years we have published 12 papers on this subject. The first issue of the project is image preprocessing and orientation estimation is a key technology adopted to complete the basic task. This paper is to address such issue. The computation framework will help to design more accurate orientation estimation algorithms.