

# 图像超分辨率重建的非局部正则化模型与算法研究

肖 亮 韦志辉

(南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)

**摘 要** 利用图像非局部不连续性测度的概念,建立了面向图像超分辨的非局部正则化能量泛函和相应的变分框架.理论分析了该框架与目前关于双边滤波等一类广义邻域滤波器和经典的变分偏微分方程模型之间的联系.推导了该非局部泛函约束的变分模型最优解满足的积分形式欧拉-拉格朗日方程,并研究了其最速下降流满足的若干重要性质.基于图理论,设计了图像超分辨的自适应加权迭代算法.最后通过选择不同势函数的非局部正则化泛函进行图像去噪、去马赛克效应和图像超分辨率处理,性能分析表明:相同势函数下,非局部正则化方法优于同类局部正则化方法,峰值信噪比提高 0.5~1.0dB.

**关键词** 图像超分辨;非局部正则化;变分方法;积分方程;尺度空间

**中图法分类号** TP391 **DOI号**: 10.3724/SP.J.1016.2011.00931

## Research on Non-Local Regularization Model and Algorithms for Image Super-Resolution Reconstruction

XIAO Liang WEI Zhi-Hui

(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

**Abstract** A non-local regularization energy functional and variational framework for image super-resolution reconstruction is proposed using the conception of non-local discontinuity of image. The fundamental relationships between a class of generalized neighborhood filter, such as bilateral filter, and the classical variational PDE models are theoretically analyzed in this framework. The Euler-Lagrange Equation with integral formulation is derived for nonlocal variational minimizations. Some important properties of the steepest descent flow in this framework are also proved. Based on the graph theory, the authors give a novel adaptive and weighted iterative algorithms for image super-resolution. In the end of paper, different examples of non-local regularization energy functional is used to image de-noising, image de-mosaic, and image super-resolution. Experiments show that the non-local regularization functional has better performance than the classical regularization functional under the same potential function, and the Peak SNR values are averagely increased by about from 0.5 to 1.0 dB.

**Keywords** image super-resolution; non-local regularization; variational method; integral equation; scale space

收稿日期:2007-10-25;最终修改稿收到日期:2009-10-14. 本课题得到国家自然科学基金(60802039,60672074)、国家“八六三”高技术研究发展计划项目基金(2007AA12Z142)、高等学校博士学科点专项科研基金(20070288050)资助. 肖 亮,男,1976年生,博士,副教授,中国计算机学会会员,主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用、高维图像分析与数据挖掘、虚拟现实与系统仿真. E-mail: xtxiaoliang@163.com; xiaoliang@mail.njust.edu.cn. 韦志辉,男,1963年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为小波分析、模式识别与图像处理.

## 1 引 言

各种光学传感器成像过程中,由于相机的运动姿态不稳定、成像环境变化、图像传输的信道干扰等,图像的像质都会引起不同程度下降.图像超分辨率重建是对像质下降观测图像进行处理,在保证通频带内信息复原的基础上,对截止频率以上的高频信息进行复原而完善图像细节和低频信息的视觉质量提升过程.图像超分辨率属于反问题研究范畴,近几年来基于能量泛函正则化的图像超分辨率重建因其高质量处理效果已引起国内外研究者的广泛关注<sup>[1-4]</sup>.Kim 等人<sup>[5]</sup>提出了基于边缘增强和各向异性扩散的超分辨率复原正则化方法;Capel 等人<sup>[6]</sup>提出了基于全变差正则化的文本图像序列超分辨率复原算法;Farsiu 等人<sup>[7]</sup>提出基于双边滤波(bilateral filtering)思想和  $l^1$  范数耦合的超分辨率复原算法.国内韩玉兵等人提出了全变差正则化超分辨率复原的多重网格算法<sup>[8]</sup>,取得了较好的效果.

考虑退化图像数据  $u_0$  中恢复理想的未知图像  $u$ ,大多数文献<sup>[1-8]</sup>中基于退化过程

$$u_0 = Ru + n \quad (1)$$

其中,  $n$  为随机变量,表示具有某种概率分布的噪声,  $R$  为图像模糊、降采样等降质因素的综合算子.例如:当  $u$  为数字图像时,  $R$  可由模糊卷积矩阵  $B$  和降采样矩阵  $D$  组成,  $R = BD$ .

图像超分辨率重建问题实质上从  $u_0$  中估计合适的  $u$ ,显然最直接的方法是最小二乘估计,即  $u^* = \arg \min_u \|u_0 - Ru\|_2^2$ ,其 Euler-Lagrange 方程为  $R^*u_0 - R^*Ru = 0$ ,这是一个高度病态的不适定问题.解决该问题的一条有效途径是通过正则化方法,转化为如下能量泛函的变分问题:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx + \lambda \cdot \|u_0 - Ru\|_2^2 \right\} \quad (2)$$

其中:第 1 项为图像的正则化项;第 2 项为数据保真项.正则化项中,  $\varphi: R^+ \rightarrow R$  为特定的光滑函数,按照马尔可夫随机场与局部正则化泛函的关系<sup>[9]</sup>,人们称之为位势函数.式(2)中的正则化项是基于图像梯度(或分布意义下)的,作为一种图像不连续性刻画,图像梯度是一种局部甚至“点态”的不连续性几何特征.当观测图像受到噪声干扰、空间分辨率下降和存在边缘锯齿效应时,图像梯度场和曲率会发生明显变化,缺乏鲁棒性.因此,虽然上述模型能够有

效去除图像的噪声,却不能够很好地克服边缘锯齿效应.

在图像去噪领域,双边滤波等一类广义邻域滤波<sup>[10-11]</sup>由于采用具有距离与灰度各向异性的双重加权机制,使得滤波过程具有更优的噪声抑制性和鲁棒的边缘保持性<sup>[12-13]</sup>.国内邵文泽等人系统分析了双边滤波框架下 17 种非线性滤波器的性能比较,但是并没有从理论上严格证明该类滤波器与能量函数最优的内在关系和相关性质<sup>[14]</sup>.Chen Ke 也注意到图像的空间梯度在表征图像不连续性特征的缺陷,通过同时考虑像素邻域和邻域周边区域之间的不连续性测度,设计了非线性自适应算法,并且给出了对应的能量泛函<sup>[15]</sup>.目前国际上关于非局部滤波算法<sup>[16]</sup>的研究如火如荼.除继承双边滤波的优点之外,非局部滤波采取了较大范围内基于相似度模板匹配的加权机制,具有更好的边缘和纹理保持能力.文献<sup>[17]</sup>的研究表明非局部化思想在图像去噪和超分辨率重建中能够取得很好的效果.Gilboa 和 Osher 等系统地研究了非局部滤波算法的处理机制,提出了两类非局部正则化模型<sup>[18-19]</sup>:其一为基于加权梯度模的非局部正则化模型,其二为基于加权差分模的非局部正则化模型,并提出非局部算子理论建立新的图像处理模型的理论框架.在文献<sup>[18]</sup>中,他们提出基于加权差分模的非局部正则化泛函

$$J(u) = \iint_{\Omega \times \Omega} \varphi(|u(x) - u(y)|) \omega(x, y) dy dx \quad (3)$$

其中加权函数  $\omega(x, y)$  为对称正函数.他们讨论了位势函数  $\varphi(s)$  满足  $\varphi(0) = 0$  的非负凸函数情形,在文献<sup>[19]</sup>中特别考虑了  $\varphi(s) = s^2$  时变分导出的非局部线性算子以及文献<sup>[20]</sup>中考虑  $\varphi(s) = \sqrt{s^2 + \epsilon}$  时变分导出的非局部算子在图像处理中的应用,但对于如何进一步构造适合超分辨率重建的位势函数没有系统研究.文献<sup>[21]</sup>考虑了  $\varphi(s) = s^2$  时选取具有旋转和平移匹配特性权值函数  $\omega(x, y)$  的情形,在图像去噪中得到很好的效果.

本文在 Gilboa 和 Osher 的研究基础上展开工作,基于邻域相关性的非局部不连续性测度的概念,建立了面向图像超分辨的非局部正则化变分模型.分析了该模型与双边滤波等一类邻域滤波器和经典变分偏微分方程模型的联系,确定了变分模型中位势函数的选取原则.理论推导了最优解满足的积分形式欧拉-拉格朗日方程.在本文给出的一类位势函数下,系统研究了对应非局部正则化泛函的最速下降流及其相关性质.基于图理论,建立了该连续变分

模型的离散模型以及相应的自适应加权数字滤波算法.最后通过选择不同势函数的非局部正则化泛函进行图像去噪、去马赛克效应和图像超分辨处理,性能分析表明:相同势函数下,非局部正则化方法大大优于同类局部正则化方法.

## 2 非局部正则化泛函的提出与相关性质研究

### 2.1 非局部正则化泛函的导出

事实上当观测图像的边缘存在锯齿效应时,不连续性特征应该是像素的某个邻域范围内不连续性的一种稳健性估计.考虑到超分辨率复原中观测图像的锯齿效应、噪声污染和模糊效应等几方面的降质因素,本文定义一个具有邻域相关性的非局部不连续性测度

$$|\widetilde{Du}|(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x})} \varphi(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))g(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (4)$$

其中位势函数  $\varphi: R \rightarrow R^+$  为特定的非负光滑函数,目的是对灰度差进行提升.  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega_r$  为图像中某个像素  $\mathbf{x}$ , 与其邻域像素  $\mathbf{y}$  之间的几何相似性测度,同文献[19]定义,满足如下性质:(1)非负性,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ ; (2)对称性,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ; (3)有界性,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq M$ ; (4)等值极大性,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

不妨令

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}) \\ 0, & \mathbf{y} \in \Omega \setminus \Omega(\mathbf{x}) \end{cases}$$

则利用上述非局部不连续性测度的概念,基于 Gilboa 和 Osher 的非局部正则化理论,可定义一个图像非局部正则化模型,

$$E_{\text{regular}}(u) = \iint_{\Omega} \varphi(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} \quad (5)$$

该能量泛函比局部的能量泛函具有更好的一般性.例如如果  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  取为  $e^{-s^2}$  函数,而  $\varphi(s) = s^2$ ,则上述泛函可以对应 Tomasi 和 Manduchi 等人<sup>[11-12]</sup>提出的双边滤波方法.又如,取  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  为  $\delta$ -冲击函数,而  $|\Omega(\mathbf{x})| \rightarrow 0$ ,能量泛函(5)为式(2)的形式.

### 2.2 非局部正则化泛函中位势函数的选取

由于式(5)一方面是式(2)的正则化泛函的推广,另一方面与非局部邻域滤波<sup>[11-13]</sup>存在理论上的联系,因此函数  $\varphi(\cdot)$  的选择完全可以参照局部能量泛函和邻域滤波机制的选取规则进行.选取的基本原则包括:(A1)能量最优基本条件,主要确保正则

化泛函的正则性,能够进行能量最小化;(A2)如果希望得到全局最优的唯一解,需要确保泛函的凸性;(A3)边缘保持条件,从图像处理角度来看,希望能够有效保持图像的边缘、纹理等重要的视觉特征.

为了给出位势函数的边缘保持条件,首先从 Perona 等人<sup>[22]</sup>提出的各向异性扩散方程(PM 方程)来分析,该方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (h(|\nabla u|)\nabla u) \quad (6)$$

其中,  $h(t)$  称为边缘保持函数,图像  $u(\alpha, t): \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow R$ . 为了有效去除噪声并保持图像的边缘结构,PM 方程的思想是在弱梯度区域( $|\nabla u|$  较小)采取各向同性平滑;相反,在采取强梯度区域各向异性增强.因此  $h(t)$  一般取单调递减的函数,如  $h(t) = 1/(1+t^2/\sigma^2)$ ,  $\sigma$  为正常数.事实上如果存在函数  $\varphi$  满足  $h(t) = \varphi'(t)/t$  时,并令  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  为图像局部坐标系下当前等照度线(Isophote Line)的切线方向和法线方向,  $u_{\mathbf{TT}}$  和  $u_{\mathbf{NN}}$  分别为切线和法线方向的 2 阶导数,则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (h(|\nabla u|)\nabla u) = \nabla \cdot \left( \frac{\varphi'(|\nabla u|)\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ &= \frac{\varphi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\mathbf{TT}} + \varphi''(|\nabla u|) u_{\mathbf{NN}}. \end{aligned}$$

不难发现 Perona 等人给出的  $h(t)$  使得函数  $\varphi$  满足  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi'(s) < \infty, \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi'(s) < \infty; \lim_{s \rightarrow 0} \varphi'(s)/s = M > 0, \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi'(s)/s = 0; \varphi'(s)/s, s \in [0, +\infty)$  单调下降,从而能够分别控制切线和法线方向的扩散速度达到保持边缘的目的,并且可看作是能量函数  $\int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|)d\mathbf{x}$  的最速下降求解.

另一方面,稳态 PM 方程  $\nabla \cdot (h(|\nabla u|)\nabla u) = 0$  的离散化形如下面的非线性滤波<sup>[13]</sup>

$$u^{\mathbf{n}+1}(\alpha) = \frac{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u^{\mathbf{n}}(\alpha) - u^{\mathbf{n}}(\beta)) \cdot u^{\mathbf{n}}(\beta)}{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u^{\mathbf{n}}(\alpha) - u^{\mathbf{n}}(\beta))} \quad (7)$$

式中,  $\beta \sim \alpha$  为像素点  $\alpha$  的最邻近 4 邻域.如果在式(7)的基础上加入几何距离相似性度量  $\omega$ ,得到

$$u^{\mathbf{n}+1}(\alpha) = \frac{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u^{\mathbf{n}}(\alpha) - u^{\mathbf{n}}(\beta)) \cdot \omega(\alpha, \beta) \cdot u^{\mathbf{n}}(\beta)}{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u^{\mathbf{n}}(\alpha) - u^{\mathbf{n}}(\beta)) \cdot \omega(\alpha, \beta)}, \quad \alpha \in \Omega \quad (8)$$

当函数  $\omega$  定义为欧式距离的高斯核函数时,可以看到上述改进的滤波格式是 Tomasi 和 Manduchi 提出的双边滤波<sup>[11]</sup>.假设迭代过程(8)收敛,即满足

$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(\alpha) = u(\alpha), \forall \alpha \in \Omega$ , 从而下式成立

$$u(\alpha) = \frac{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u(\alpha) - u(\beta)) \cdot \omega(\alpha, \beta) \cdot u(\beta)}{\sum_{\beta \sim \alpha} h(u(\alpha) - u(\beta)) \cdot \omega(\alpha, \beta)} \quad (9)$$

将式(9)展开, 得

$$\sum_{\beta \sim \alpha} h(u(\alpha) - u(\beta)) \cdot (u(\alpha) - u(\beta)) \cdot \omega(\alpha, \beta) = 0 \quad (10)$$

当存在函数  $\varphi$  满足  $h(t) = \varphi'(t)/t$  时, 显然上述离散迭代格式可看作是如下离散能量泛函的求解

$$u = \arg \min_u \left\{ \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\beta \sim \alpha} \omega(\alpha, \beta) \cdot \varphi(u(\alpha) - u(\beta)) \right\} \quad (11)$$

将上述离散目标函数推广至连续情形, 可得到非局部正则化泛函

$$u = \arg \min_u \left\{ \iint_{\Omega \times \Omega} \varphi(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \right\}.$$

综合上述分析, 注意到 P-M 方程中的函数特性以及该边缘保持函数  $h(\cdot)$  与非局部正则化泛函(5)中位势函数的关系, 即  $h(t) = \varphi'(t)/t$ , 本文建议位势函数具有如下 9 条性质.

A1. 能量泛函的基本条件:

(1) 非负性.  $\varphi(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$  且  $\varphi(0) = 0$ ;

(2) 对称性.  $\varphi(s) = \varphi(-s), \forall s \in \mathbb{R}$ ;

(3) 可微性.  $\varphi(s)$  几乎处处可微;

(4) 单调性.  $\varphi'(s) \geq 0, \forall s \geq 0$ ;

(5) 导函数 1, 3 象限有界反对称性.  $\varphi'(s) = -\varphi'(-s), \varphi'(s) \cdot s \geq 0$ ;

A2. 泛函的凸性条件:

(6)  $\varphi''(s)$  存在,  $\varphi''(s) \geq 0$ ;

A3. 边缘保持条件:

(7)  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi'(s) < \infty, \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi'(s) < \infty$ ;

(8)  $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi'(s)/s = M > 0, \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi'(s)/s = 0$ ;

(9)  $\varphi'(s)/s, s \in [0, +\infty)$  单调下降.

满足上述条件的位势函数有很多. 在形如(2)的经典正则化模型中, 不同的位势函数对应不同的正则化模型. 例如: Tikhonov 正则化方法中  $\varphi(s) = s^2$ ; Rudin 和 Osher 等人提出的全变差正则化方法<sup>[23]</sup>中  $\varphi(s) = |s|$ . 研究表明: Tikhonov 正则化适合于图像中的平坦区域, 容易模糊边缘等重要的视觉特征, 而全变差图像模型能够较好保持图像边缘<sup>[24]</sup>. 由于图像被认为是包含边缘曲线的分片平坦区域组成, 因此文献<sup>[25]</sup>根据稳健性统计理论构造了 Huber 位势函数,

$$\varphi(s) = \begin{cases} s^2/2, & |s| \leq k \\ k|s| - k^2/2, & |s| > k \end{cases}$$

而利用最大熵原理, 构造的位势函数为

$$\varphi(s) = \begin{cases} |s|, & |s| \leq k \\ |s| \ln |s| + k - k \ln k, & |s| > k \end{cases}.$$

上述两个位势函数都包含 TV 势函数, 是介于一次线性和二次非线性函数之间的一种分段耦合函数, 并且满足 A1~A3 三个条件, 因此在图像平坦区域能够执行各向同性的扩散、而在边缘区域的扩散机制是各向异性的, 具有边缘结构保持特性, 因此是本文推荐使用的位势函数.

### 2.3 非局部正则化泛函的最速下降流的若干性质

基于能量泛函最优的图像超分辨率算法往往通过变分法导出 Euler-Lagrange 方程, 然后通过最速下降流所表示的演化方程进行求解, 因此分析非局部正则化泛函的最速下降流的性质, 对于研究该非局部泛函的图像超分辨率处理机制非常重要.

下面, 给出的定理 1 揭示了该非局部泛函最优化对应的 Euler-Lagrange 方程, 该 Euler-Lagrange 方程不再是偏微分方程形式, 而是一个积分方程.

**定理 1.** 如果  $\varphi(s)$  满足 A1: 基本条件, 相似性函数  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0$ , 则非局部正则化泛函

$$E_{\text{regular}}(u) = \iint_{\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x})} \varphi(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x}$$

的欧拉-拉格朗日方程为  $-Lu = 0$ , 其中,

$$Lu = \int_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (12)$$

如果  $\varphi(s)$  满足 A2: 凸性条件, 则非局部正则化泛函是全局凸的.

证明.

(1) 利用 A1 中的条件及变分法进行证明: 由于

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} E(u + \tau v)|_{\tau=0} \\ &= \iint_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) (v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= \iint_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) v(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \\ & \quad \iint_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) v(\mathbf{y}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= \iint_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) v(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \\ & \quad \iint_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) v(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

由于  $\varphi'(s) = -\varphi'(-s), \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} E(u + \tau v)|_{\tau=0} \\ &= -2 \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} \varphi'(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right] v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

因此由变分引理

$$\frac{d}{d\tau}E(u+\tau v)|_{\tau=0}=0 \Leftrightarrow -Lu=0.$$

(2) 另一方面,

$$\frac{d^2}{d\tau^2}E(u+\tau v)=\iint_{\Omega\Omega}\varphi''(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})+\tau(v(\mathbf{x})-v(\mathbf{y})))\cdot(v(\mathbf{x})-v(\mathbf{y}))^2\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}.$$

因此当  $\varphi''(s)\geq 0$  时,  $\frac{d^2}{d\tau^2}E(u+\tau v)\geq 0$ , 则能量

泛函是全局凸的.

证毕.

下面考察积分方程中积分算子的性质, 进而分析最速下降流的性质. 文献[18-20]讨论了非局部正则化泛函(3)及其最速下降流的基本性质, 他们给出的证明方法对位势函数满足 A1、A2、A3 等 3 个条件下对应的  $L$  算子(5)同样适应. 因此本文利用 Gilboa 和 Osher 的思想给出最速下降流的若干性质并重新给出证明.

**定理 2.** 如果  $\varphi(s)$  满足 A1: 正则性条件, 相似性函数  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})\geq 0$ , 由式(12)定义的  $L$  算子满足如下性质.

性质 1.  $u(\mathbf{x})\equiv C \Leftrightarrow Lu(\mathbf{x})\equiv 0$ .

性质 2.  $u(\mathbf{x}_0)\leq(\geq)u(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}\in\Omega \Rightarrow Lu(\mathbf{x}_0)\geq(\leq)0$ .

性质 3.  $-L$  为非负半正定算子, 即  $\langle -Lu(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})\rangle\geq 0$ .

性质 4.  $\int_{\Omega}Lu(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0$ .

证明. 性质 1 和性质 2: 由  $\varphi(s)\geq 0, \forall s\in R$  且  $\varphi(0)=0$  及  $L$  算子的定义易证. 性质 3 的证明: 利用  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})\geq 0, \varphi'(s)=-\varphi'(-s), \varphi'(s)\cdot s\geq 0$  可证

$$\begin{aligned} \langle -Lu(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})\rangle &= \\ &= -\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \varphi'(-s)\equiv -\varphi(s)\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))u(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}+ \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))u(\mathbf{y})\omega(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &\stackrel{\substack{\varphi'(s)\cdot s\geq 0, \\ \omega(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq 0}}{\geq 0}. \end{aligned}$$

性质 4 的证明: 利用积分与积分符号无关, 及

$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\omega(\mathbf{y}, \mathbf{x})\geq 0, \varphi'(s)=-\varphi'(-s)$  可证

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}Lu(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}+ \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}+ \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}\varphi'(u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y}))\omega(\mathbf{y},\mathbf{x})d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega\Omega}(\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x}))-\varphi'(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})))\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕.

**定理 3.** 最速下降流  $\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}=Lu(\mathbf{x}), u(\mathbf{x},$

$0)=u_0$  满足如下性质.

性质 1. 均值保持性

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

性质 2. 极值原理

$$\min_x u_0(\mathbf{x}, t)\leq u(\mathbf{x}, t)\leq \max_x u_0(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x}\in\Omega, \forall t\geq 0.$$

性质 3. 演化过程中的能量下降性

$$\frac{d}{dt}\|u(\mathbf{x}, t)\|_{L^2}^2\leq 0.$$

性质 4. 方差递减性, 令

$$\text{Var}(u(\mathbf{x}, t)):=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\left(u(\mathbf{x}, t)-\int_{\Omega}u(\mathbf{y}, t)d\mathbf{y}\right)^2d\mathbf{x},$$

则  $\frac{d}{dt}\text{Var}(u(\mathbf{x}, t))\leq 0$ .

性质 5. 当算子  $L$  仅具有 1 重零特征值, 则最速下降流收敛于一个常数

$$u(\mathbf{x}, t\rightarrow\infty)\equiv C=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

证明. 利用定理 2 容易给出定理 3 的证明, 可参照文献[18]中性质 3 的证明进行. 证毕.

**定理 4.** 若  $\varphi(s)$  同时满足 A1、A3 条件, 最速下降流  $\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}=Lu(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}, 0)=u_0$  在局部邻域具有各向异性扩散性质.

证明. 若  $\varphi(s)$  同时满足 A1、A3 条件, 则  $\varphi'(s)/s=h(s)$  且为正函数. 如果图像  $u(\mathbf{x}, t)$  在  $\mathbf{x}$  点为边缘点  $|\nabla u(\mathbf{x})|>M$ , 其邻域为  $N(\mathbf{x})$ . 设通过该边缘点的光滑边缘曲线  $C=\{\mathbf{x}||\nabla u(\mathbf{x})|>M\}$ , 则该曲线将邻域  $N(\mathbf{x})$  分为两部分  $N(\mathbf{x})=C\cup\Omega\setminus C$ , 则

由微分中值定理

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \int_C \varphi'(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \\ &\int_{\Omega \setminus C} \varphi'(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_C h((u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}))) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \\ &\int_{\Omega \setminus C} h((u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}))) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= h(\xi) \int_C (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \\ &h(\zeta) \int_{\Omega \setminus C} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

令  $\mathbf{T} = \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|}$  和  $\mathbf{N} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  为图像局部坐标系下当前等照度线的切线方向和法线方向,  $u_T, u_N, u_{TT}$  和  $u_{NN}$  分别为切线和法线方向的 1 阶和 2 阶导数, 则局部坐标系下  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (e_1, e_2)$ ,  $|e| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$ , 由 2 维泰勒公式展开

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= u(\mathbf{x}) + e_1 u_T + e_2 u_N + \frac{1}{2} u_{TT} e_1^2 + \frac{1}{2} u_{NN} e_2^2 + \\ &u_T u_N e_1 e_2 + o(|e|^3) \end{aligned} \quad (13)$$

令  $C(u) = \int_C (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ ,  $R(u) = \int_{\Omega \setminus C} (u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , 前者为线积分, 而后者为区域积分. 将式(13)代入  $C(u)$  和  $R(u)$  转化为关于变量  $e_1, e_2$  的积分, 考虑  $h(s)$  单调下降, 可看出: ① 当  $\mathbf{y} \in C$ , 则  $\xi \approx 0$ ,  $h(\xi) \rightarrow M > 0$  且  $C(u) \propto u_{TT}$ ,  $R(u) = 0$ ; ② 而当  $\mathbf{y} \in \Omega \setminus C$ , 则  $\zeta \gg 0$ ,  $h(\zeta) \ll M$  且  $C(u) \propto u_{TT}$ ,  $R(u) \propto u_{NN}$ . 从而  $h(\xi)$  可看作是切线方向的扩散速度,  $h(\zeta)$  可看作是法线方向的扩散速度. 因此最速下降流在局部邻域具有各向异性扩散性质. 证毕.

定理 3 中性质 1 表明非局部泛函所导出的最速下降流能够确保图像滤波过程中平均亮度不变, 性质 2 表明滤波过程是稳定的; 而性质 3~5 表明图像的滤波过程中噪声等非结构性信息被不断去除; 同时随着演化的进行, 图像的高频细节不断减少, 图像越来越平坦, 最终收敛到一个常数图像. 而定理 4 表明, 非局部能量泛函在局部邻域具有各向异性扩散性质. 作为一个验证的例子: 本文取  $\varphi(s) = |s|$ ,  $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的定义见第 3 节, 则局部正则化模型为 TV 模型<sup>[26]</sup>:

$$E_{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\mathbf{x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

而相应的非局部正则化泛函为

$$\begin{aligned} E_{NLTV}(u) &= \iint_{\Omega \times \Omega} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \int_{\Omega} \text{sgn}(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

图 1 是两者最速下降流对“House”图像去噪(均值为 0、方差为 20 高斯噪声)的对比实验, 实验中滤波终止时间以滤波图像峰值信噪比达到 PSNR 最大为止. 由图 1 可知, 虽然经典 TV 滤波能大部分保持图像边缘, 但是在阶跃边缘附近产生了部分“阶梯效应”, 同时树木细小枝干区域不是特别清晰; 而非局部 TV 滤波较好地克服了上述问题.



(a) 含噪“House”图像



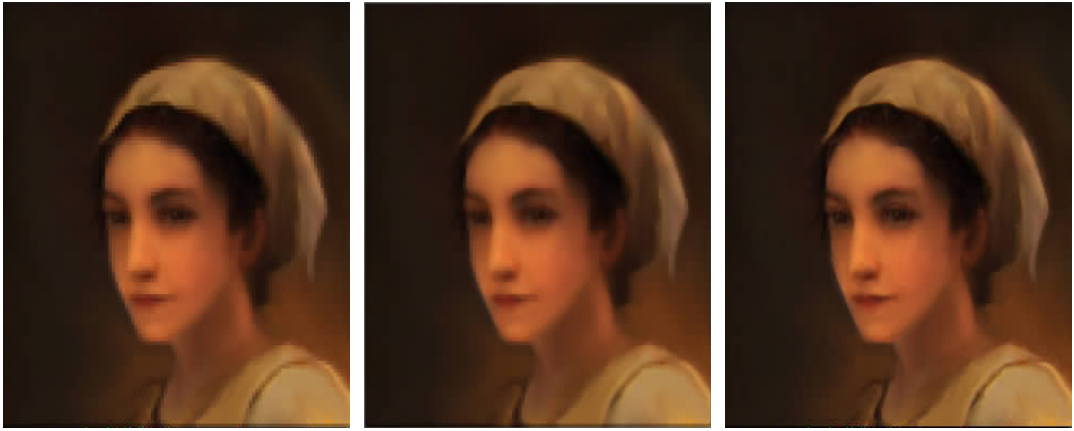
(b) 经典 TV 滤波图像



(c) 非局部 TV 滤波图像

图 1 去噪效果

图 2 是对一幅加入  $3 \times 3$  窗口大小马赛克效应的“Girl”图像分别应用经典 TV 滤波和非局部 TV 滤波(RGB 三通道逐次处理)30 次的效果对比图. 从视觉效果来看, 加入马赛克的“Girl”图像边缘锯齿效应非常明显, 滤波后两者都具有去边缘锯齿的能力, 但是非局部 TV 滤波图像边缘光滑度更好, 轮廓线更加清晰.



(a) 含马赛克的“Girl”图像

(b) 经典TV滤波图像

(c) 非局部TV滤波图像

图2 去马赛克效应

### 3 图像超分辨非局部变分模型及算法

上述理论分析和实验表明,非局部能量泛函具备很好的去噪、去模糊和去马赛克能力. 本文将其作为正则化项应用于图像的超分辨率重建,建立如下带约束最优化模型

$$u := \arg \min_u E_{\text{regular}}(u), \text{ s. t. } \|u_0 - Ru\|_2^2 = |\Omega| \sigma_n^2.$$

利用拉格朗日乘子法,该带约束最优化问题转化为如下变分问题

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_u \{E(u) = E_{\text{regular}}(u) + \lambda E_{\text{Data}}(u, u_0)\} \\ &= \arg \min_u \left\{ \iint_{\Omega} \varphi(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u_0(\mathbf{x}) - Ru(\mathbf{x}))^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

**推论 1.** 如果变分问题存在最小解,则该最小解满足 Euler-lagrange 方程

$$-Lu + \lambda(R^*Ru - R^*u_0) = 0 \quad (15)$$

特别的,当  $\varphi''(s)$  存在且  $\varphi''(s) \geq 0$ , 该能量泛函是全局凸的,最小解唯一存在.

证明. 由定理 1 及最小二乘数据项的凸性易证.

下面考虑 Euler-Lagrange 方程(15)对应最速下降流的离散化. 由于数字图像可看作是图上的数据,运用图的数据结构来描述数字图像非常自然<sup>[24,26]</sup>. 图  $G$  是指一个有序的三元组  $(\Omega, E, \phi)$ , 其中  $\Omega$  称为结点集(非空),  $E$  称为边集,  $\phi$  称为关联函数,它使  $G$  的每条边对应于  $G$  的无序结点对(不必相异). 若  $e \in E, \phi(e) = (\alpha, \beta)$ , 称边  $e$  连接结点  $\alpha$  和  $\beta$ ; 结点  $\alpha$  和  $\beta$  称为边  $e$  的端点; 若  $\alpha = \beta$ , 边  $e$  称为环. 当在边集  $E$  上定义方向, 此时方向边  $e$  称为弧, 图  $G$  称为有向图. 当在有向图  $G$  的每条弧  $e$  上定义

权指标  $\omega(e)$ , 则称有向图  $G$  为赋权有向图.

用赋权有向图结构简单描述图像  $u$ : 灰度图像  $u$  定义在非空结点集  $\Omega$  上, 每个结点  $\alpha$  处的值为  $u(\alpha)$ ; 对每个结点  $\alpha \in \Omega$ , 可定义相应的邻域系统  $\Omega_\alpha$ ; 对每个结点  $\alpha \in \Omega$ , 都有一条由结点  $\beta$  指向结点  $\alpha \in \Omega$  的弧; 每条弧上可定义相应的权函数  $\omega_{\alpha\beta}$ .

则方程(15)对应的最速下降流可以通过时间步进阶法进行逼近:

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(\alpha) &= u^{(n)}(\alpha) + \Delta t \sum_{\beta \in \Omega_\alpha} \varphi'(u^{(n)}(\beta) - u^{(n)}(\alpha)) \omega_{\alpha\beta} + \\ &\quad \lambda \Delta t (R^*u_0(\alpha) - R^*Ru^{(n)}(\alpha)) \end{aligned} \quad (16)$$

上述自适应加权迭代滤波过程中相似度  $\omega_{\alpha\beta}$  计算涉及  $g(\alpha, \beta)$  函数和邻域窗口的选择. 关于  $g(\alpha, \beta)$  函数的选择可以非常灵活, 仅需满足第 2 节的条件即可, 按照文献[13, 19]模板距离(Patch-distance)方法, 本文取

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta) &= \frac{1}{c(\alpha)} \exp\{-d(u(B_\alpha), u(B_\beta))/h^2\}, \\ \omega_{\alpha\beta} &= \begin{cases} g(\alpha, \beta), & \beta \in \Omega_r(\alpha) \\ 0, & \beta \in \Omega \setminus \Omega_r(\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $\Omega_{\alpha,r} = \{\beta \mid \|\beta - \alpha\| < r\}$ ,  $c$  为归一化参数,  $h$  为相似度调整性参数,  $u(B_\alpha) = \{u(\gamma) : \gamma \in B_\alpha\}$ ,  $B_\alpha$  为像素  $\alpha$  处的邻域窗口.  $d(u(B_\alpha), u(B_\beta))$  为两邻域模板的距离, 取  $d(u(B_\alpha), u(B_\beta)) = \sum G_\alpha(t) [u(\alpha + t), u(\beta + t)]$ ,  $G_\alpha$  为标准差为  $\alpha$  的高斯核. 本文实验中搜索区域  $\Omega_{\alpha,r}$  大小为  $11 \times 11$  的邻域窗口, 而距离计算的邻域模板尺寸为  $5 \times 5$ .

不妨假设  $\varphi'(s)/s = h(s)$ , 则

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(\alpha) &= u^{(n)}(\alpha) + \\ &\quad \Delta t \sum_{\beta \in \Omega_\alpha} h(u^{(n)}(\beta) - u^{(n)}(\alpha)) (u^{(n)}(\beta) - u^{(n)}(\alpha)) \omega_{\alpha\beta} + \\ &\quad \lambda \Delta t (R^*u_0(\alpha) - R^*Ru^{(n)}(\alpha)) \end{aligned} \quad (17)$$

分析上述迭代格式不难发现:(1)滤波过程与灰度相似性相关,当邻域像素与当前像素的灰度差相差很大时,则该邻域像素对当前像素的贡献要小;相反,当邻域像素与当前像素的灰度差相差很小时,则该邻域像素对当前像素的贡献要大。(2)类似的滤波过程与几何相似性相关.因此这种滤波过程同时很好地继承了双边滤波机制.

## 4 实验结果与性能分析

下面,给本文实验中选择文献[12]中局部模型的若干位势函数,表1中第1列列出了函数形式.为了很好地区分局部模型和本文提出的非局部模型,本文将其分别给出如表中第3列和第4列的称谓.

表 1 实验中采用的局部和非局部模型

势函数	势函数性质	局部模型称谓	本文非局部模型称谓
$\varphi(s) = s^2$	满足 A1 和 A2, 不满足 A3	Tikhonov 模型	NL-Tikhonov 模型
$\varphi(s) =  s $	满足 A1, A2, A3	TV 模型	NL-TV 模型
$\varphi(s) = \begin{cases} s^2/2, & s \leq k \\ k s  - k^2/2, & s > k \end{cases}$	满足 A1, A2, A3	Huber 模型	NL-Huber 模型
$\varphi(s) = \begin{cases}  s  \ln  s , &  s  \geq 1 \\ 0, &  s  < 1 \end{cases}$	满足 A1, A2, A3	Entropy 模型	NL-MEntropy 模型
$\varphi(s) = \begin{cases}  s , &  s  \leq k \\  s  \ln  s  + k - k \ln k, &  s  > k \end{cases}$	满足 A1, A2, A3	MEntropy 模型	NL-MEntropy 模型

局部模型<sup>[12]</sup>:

$$\hat{u} = \arg \min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla u|) dx + \frac{\lambda}{2} \|Ru - u_0\|_2^2 \right\}.$$

非局部模型:

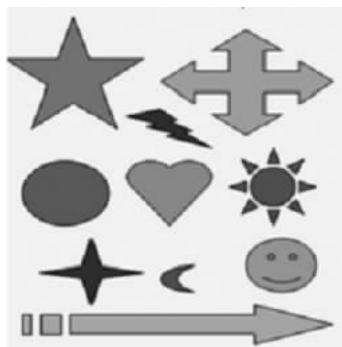
$$u^* = \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(u(x) - u(y)) \omega(x, y) dy dx + \frac{\lambda}{2} \|Ru - u_0\|_2^2 \right\}.$$

为了定量分析局部正则化模型和本文提出非局部模型的图像超分辨率重建效果,本文以峰值信噪比

(PSNR)作为度量指标,定义为

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{u_{\max}^{*2}}{\frac{1}{(M \cdot N)^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u(i, j) - u^*(i, j))^2}.$$

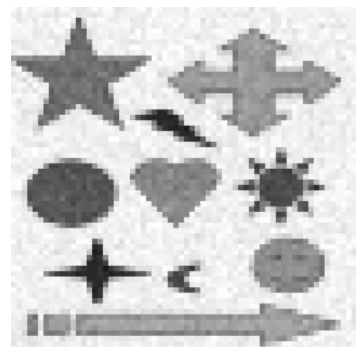
**第 1 组仿真实验.**采用人工图像为测试图像(图 3(a)),大小为  $512 \times 512$ ,取方差为 1,  $3 \times 3$  窗口大小的高斯核模糊,降采样因子为 4,并加入均值 0 标准差为 8 的高斯白噪声,图 3(b)为降质后生成的 LR 图像.图 3(c)为利用双线性法插值图像,PSNR 为 23.62dB.



(a) 原始人工图像



(b) LR 图像



(c) 利用双线性法插值图像(b)的结果

图 3

图 4 给出了“人工图像”超分辨率重建结果.图 5 给出了不同局部模型和不同非局部模型重建算法的 PSNR 曲线.可以看出,两类正则化模型都能取得较好的超分辨率效果,而且具有较好的收敛性.相比较而言,在迭代基本稳定时,非局部模型大体上比局部模型提高峰值信噪比 0.5~1dB 左右.由于 Tikhonov 模型不具备各向异性机制,PSNR 的提高

幅度最低,而且模糊效应明显,而具备各向异性机制的 TV、Huber、Entropy 和 MEntropy 的 PSNR 提高幅度依次递增,说明不同的图像正则化模型影响图像重建效果.另外 Huber、Entropy 和 MEntropy 的势函数实际上都包含 TV 势函数,是介于一次线性和二次非线性函数之间的一种分段耦合函数,因此图像被建模为包含边缘曲线的分片平坦区域组

成,能够较好地自适应于图像的结构特性.

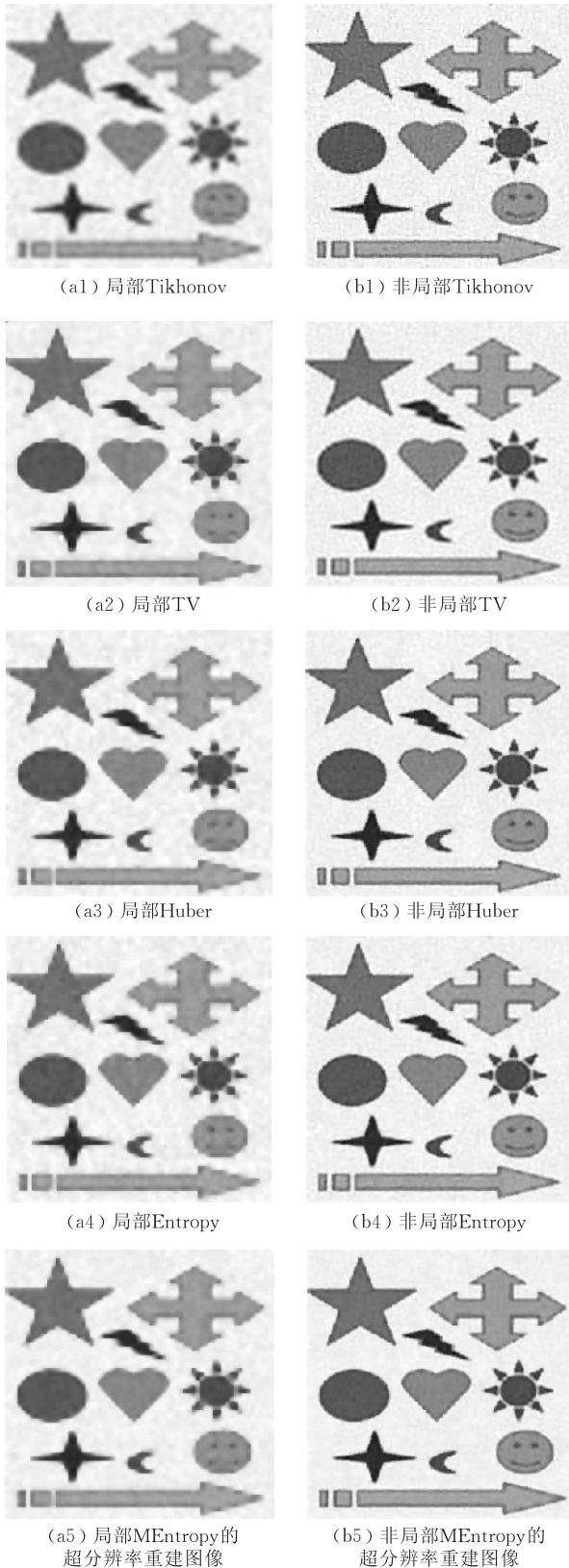
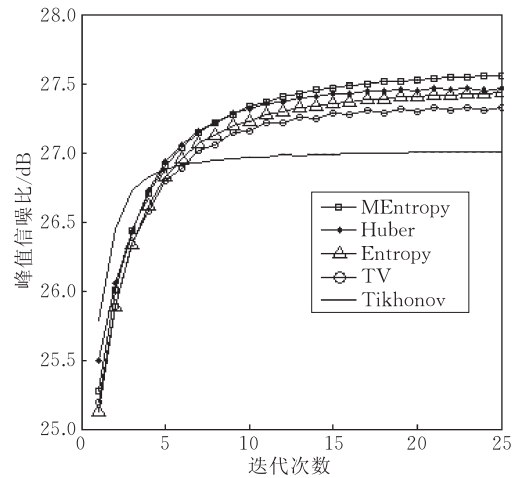


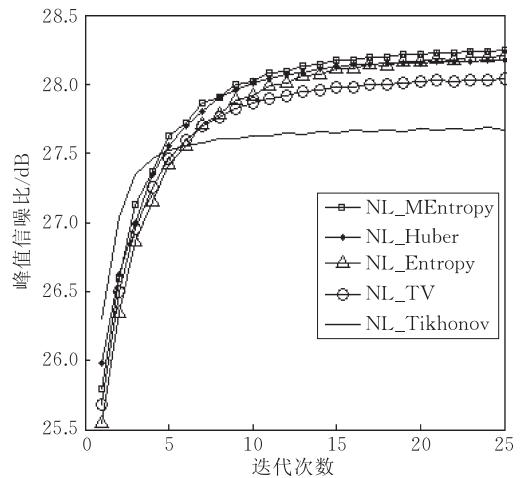
图 4 “人工图像”超分辨率重建结果

第 2 组仿真实验. 对“Lena”,“Girl”,“Woman”和“航空图像”等具有不同结构细节的灰度图像进

行处理. 实验中低分辨率图像由大小为  $512 \times 512$  理想图像经过取方差为 1,  $3 \times 3$  窗口大小的高斯核模糊, 4 倍降采样, 并加入均值 0、标准差为 6 的高斯白噪声等降质后生成. 由于非局部 Huber、非局部 Entropy 和非局部 MEntropy 的 PSNR 提高幅度依次递增但相差幅度小于 0.3dB, 视觉上相差无几. 整体来看, 非局部 MEntropy 模型是最佳的模型. 限于篇幅, 以非局部 MEntropy 为例, 给出仿真实验中部分实验结果. 图 6 中利用双线性插值 LR 图像的结果图像 (b1) ~ (b4) 的 PSNR 值分别是 24.6、24.5、24.4、23.9; 非局部 MEntropy 模型的超分辨率重建图像 (c1) ~ (c4) 的 PSNR 值分别是 27.84、27.95、28.01、27.79. 在视觉上看, 重建图像基本去除了马赛克或边缘锯齿效应, 噪声得到了较好抑制. 上述实验证明了非局部正则化方法具有很好的分辨率增强效果.



(a) 不同局部模型重建算法的PSNR曲线



(b) 不同非局部模型重建算法的PSNR曲线

图 5 两种模型重建算法的 PSNR 曲线



图 6 “自然图像”超分辨率重建结果

## 5 结 语

针对图像超分辨率复原问题的不适宜性,本文提出非局部正则化能量泛函和相应的变分框架,文中考察了一类满足一定正则性、凸性和边缘保持条件的非局部正则化泛函的最速下降流和相应变分模型的若干性质.基于谱图理论,建立了该连续变分模型的离散模型以及自适应加权数字滤波算法.通过与取相同势函数的经典变分模型:Tikhonov 模型、

TV 模型、Huber 模型、Entropy 模型 和 MEntropy 模型进行比较研究,实验证明了非局部正则化方法通常能够更好地去除图像的马赛克或边缘锯齿效应,对噪声的抑制也更为稳健,因此更加适合图像的分辨率增强处理.由于文中模型是基于加权差分的非局部能量泛函,能够方便地利用加权图来描述,因此下一步的工作是考虑更一般的加权图框架下的非局部离散正则化,并进一步推广到彩色图像、流形或更高维数据的处理.同时,从 Mumford 和 Shah 提出的 M-S 模型来看,模型中可以进一步考虑包含长度

项控制<sup>[27-28]</sup>,因此非局部方法同样可以推广到一类主动轮廓线模型,有望在图像分割、目标跟踪等获得更好的实际应用。

### 参 考 文 献

- [1] Van Ouwerkerk J D. Image super-resolution survey. *Image Vision Computing*, 2006, 24(10): 1039-1052
- [2] Ng M K, Bose N K. Mathematical analysis of super-resolution methodology. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, 20(3): 62-74
- [3] Kim S. PDE-based image restoration: A hybrid model and color image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(5): 1163-1170
- [4] Gao Xin, Liu Lai-Fu, Huang Hai-Yang. A survey-image analysis and processing using PDE and geometry curvature-driven diffusion. *Advance in Mathematics*, 2003, 32(3): 285-294(in Chinese)  
(高鑫, 刘来福, 黄海洋. 基于 PDE 和几何曲率流驱动扩散的图像分析与处理. *数学进展*, 2003, 32(3): 285-294)
- [5] Kim H, Hong K S. Variational approaches to super-resolution with contrast enhancement and anisotropic diffusion. *Journal of Electronic Imaging*, 2003, 12(2): 244-251
- [6] Capel D, Zisserman A. Super-resolution enhancement of text image sequences//*Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition*. Washington DC: IEEE Computer Society, 2000: 600-605
- [7] Farsiu S, Robinson M D. Fast and robust multiframe super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(10): 1327-1344
- [8] Han Yu-Bing, Shu Feng, Sun Jin-Tao, Wu Le-Nan. Image super-resolution reconstruction based on MG-GMRES algorithm. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(6): 1028-1034(in Chinese)  
(韩玉兵, 束锋, 孙锦涛, 吴乐南. 基于 MG-GMRES 算法的图像超分辨率重建. *计算机学报*, 2007, 30(6): 1028-1034)
- [9] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, 6(5): 721-741
- [10] Buades A, Coll B, Morel J-M. Neighborhood filters and PDE's. *Numerische Mathematik*, 2006, 105(10): 1-34
- [11] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images//*Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision*. Washington DC: IEEE Computer Society, 1998: 839-846
- [12] Elad M. On the bilateral filter and ways to improve it. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2002, 11(10): 1141-1151
- [13] Barash D. A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing and the nonlinear diffusion equation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2002, 24(6): 844-847
- [14] Shao Wen-Ze, Wei Zhi-Hui. A unified designing framework for nonlinear digital filters and behavior analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(1): 91-102(in Chinese)  
(邵文泽, 韦志辉. 一种非线性数字滤波器的统一设计框架及其性能分析. *计算机学报*, 2007, 30(1): 91-102)
- [15] Chen Ke. Adaptive smoothing via contextual and local discontinuity. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(10): 1552-1567
- [16] Buades A, Coll B, Morel J M. Image denoising by non-local averaging//*Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP'05-Proceedings-Image and Multidimensional Signal Processing Multimedia Signal Processing*. Pennsylvania, USA, 2005, 2: 1125-1128
- [17] Protter M, Elad M, Takeda H, Milanfar P. Generalizing the non-local-means to super-resolution reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 18(1): 36-51
- [18] Gilboa G, Darbon J, Osher S, Chan T F. Nonlocal convex functional for image regularization. UCLA, CAM Report 06-57, 2006
- [19] Giboa G, Osher S. Non-local linear image reconstruction and supervised segmentation. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2007, 6(2): 595-630
- [20] Giboa G, Osher S. Nonlocal operators with application to image processing. UCLA, CAM Report 07-23, 2007
- [21] Lou Yifei, Favaro P, Soatto S. Nonlocal similarity image filtering. UCLA, CAM Report 08-26, 2008
- [22] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639
- [23] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, 60: 259-268
- [24] Cobson D, Vogel C. Convergence of an iterative method for total variation denoising. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1997, 34(5): 1779-1791
- [25] Ben Hamza A, Hamid Krim, Unal G B. Unifying probabilistic and variational estimation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2002, 19(9): 37-47
- [26] Chan T F. The digital TV filter and nonlinear denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 231-241
- [27] Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1989, 42(5): 577-685
- [28] Xiao Liang, Wu Hui-Zhong, Wei Zhi-Hui. Research on generalized Mumford-Shah model for color image restoration and edge detection. *Chinese Journal of Computers*, 2006, 29(2): 286-295(in Chinese)  
(肖亮, 吴慧中, 韦志辉. 面向彩色图像恢复与边缘检测 Mumford-Shah 推广模型研究. *计算机学报*, 2006, 29(2): 286-295)



**XIAO Liang**, born in 1976, Ph. D., associate professor. His research interests include variational PDE in image processing, multi-dimensional image analysis and data mining, virtual reality and system simulation.

**WEI Zhi-Hui**, born in 1963, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include wavelet analysis, pattern recognition and image processing.

## Background

Super-Resolution (SR) is a process of reconstructing a higher resolution (HR) image from several Low-Resolution (LR) images, and it has been an international popular topic in image processing and mathematical modeling field. Similar to classical image restoration, SR also belongs to the inverse problem in mathematics. The international popular topics on image restoration are the variational and PDE-based approaches. Although there are many energy variational functional de-noising model to deal with the ill-posed nature of SR, however, differing from the task of image de-noising, the class of typical variational PDE methods cannot effectively reduce the disturbing artifacts on edge regions, e. g. blocking artifacts, ringing artifacts along SR image edges, thus can not reconstruct a good HR image with clear edges. In general, owing to over-locality of the class of typical variational PDE methods, the pixel's spatial gradient was used as the discontinuity measure to provide a nonlinear diffusion process. However, because the nature images are degraded by integrated factors such as motion warping, an incorrect lens adjustment, down sampling and noise addition, etc., the gradient vectors of LR image are also degraded and must be estimated in a robust way. This requirement for HR

means it is not suitable to choose the pixel-wise gradient as the discontinuity measure.

The work is supported by the National High Technology Research and Development Program (863 Program) of China (grant No. 2007AA12Z142), National Natural Science Foundation of China (grant Nos. 60802039, 60672074), Doctoral Fund of Ministry of Education of China (grant No. 20070288050) respectively.

The work can be viewed as the development of nonlocal regularization methods. The essential idea is inspired by generalized neighborhood filters such as bilateral filtering. The main aim of this paper is to provide a non-local regularization energy functional and variational framework for image super-resolution reconstruction. By defining the conception of non-local discontinuity of image, this paper gives a general nonlocal regularization energy functional, also addresses the issue of how to choose the potential functions in this nonlocal framework. Furthermore it gives some remarks of the some important properties obeyed by the steepest descent flow in this framework. The evaluation and comparison analysis are performed by theoretical analysis and numerical experiments, and the results are given finally.