第 34 卷 第 1 期
2011 年 1 月

计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

Vol. 34 No. 1
Jan. 2011

对称逻辑公式在 L_3^* 逻辑度量空间中的分布

王庆平[1),2)] 王国俊[1)]

[1)](陕西师范大学数学与信息科学学院 西安 710062)

[2)](聊城大学数学科学学院 山东 聊城 252059)

摘 要 在三值逻辑系统 L_3^* 中引入了对称三值 R_0 函数的概念，在此基础上给出了对称逻辑公式和准对称逻辑公式的定义. 研究了在逻辑等价意义下对称逻辑公式的性质，给出了 L_3^* 和经典逻辑系统 L 中对称逻辑公式之间的关系及其计数问题，证明了 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随 n 的增大而趋向于零，且全体对称逻辑公式的真度之集却在[0,1]中稠密. 然而全体对称逻辑公式之集是逻辑度量空间中的无处稠密集.

关键词 对称三值 R_0 函数；对称逻辑公式；准对称逻辑公式；同类向量；稠密

中图法分类号 TP301 **DOI 号**：10.3724/SP.J.1016.2011.00105

Distribution of the Symmetrical Logic Formulas in the L_3^*-Logic Metric Space

WANG Qing-Ping[1),2)] WANG Guo-Jun[1)]

[1)](*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062)

[2)](*School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong* 252059)

Abstract In three-valued logic system L_3^*, the concept of symmetric three-valued R_0 function is proposed, and the concepts of symmetric logic formulas and pseudo-symmetric logic formulas are given. The properties of symmetric logic formulas under logically equivalence are studied. The relationship of symmetric logic formulas in L_3^* and classical logical system L, and the number of them are given. It is proved that the ratio of the number of symmetric formulas with n atoms over the number of all formulas with n atoms converges to zero when n tends to infinite. It is also proved that the set of truth degrees of symmetric logic formulas is dense in [0,1]. On the other hand, the set consisting of all symmetric logic formulas is a nowhere dense set in the logic metric space.

Keywords symmetric three-valued R_0 function; symmetric logic formulas; pseudo-symmetric logic formulas; vectors of the same kind; dense

1 引 言

数理逻辑的特点在于符号化和形式化，它和计算数学有截然不同的风格：前者注重形式推理而后者注重数值计算；前者强调严格论证而后者允许近似求解. 计量逻辑学从基本概念的程度化入手，将数值计算引入到数理逻辑中，使其具有某种灵活性从而扩大其可能的应用范围[1-6]. 计量逻辑学又与概率逻辑学相结合，将随机化思想引入到了经典的推理模式中，进一步丰富了计量逻辑学的研究内容[7]. 如今已在包括 Lukasiewicz、L^* 等多种命题逻辑系统中构造出了相应的逻辑度量空间，从而将近似推理引入到了素以严格的形式化推理为特征的各种命题

收稿日期：2010-04-17；最终修改稿收到日期：2010-11-11. 本课题得到国家自然科学基金(10771129)资助. **王庆平**，男，1979 年生，博士研究生，讲师，主要研究方向为模糊逻辑、不确定性推理. E-mail：lc_wqp@163.com. **王国俊**，男，1935 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为模糊逻辑、计算智能. E-mail：gjwang@snnu.edu.cn.

逻辑系统之中.值得注意的是,除了个别零星的结果之外[8-9],可以说对于逻辑度量空间自身结构的研究还远未开始.

布尔函数是数理逻辑中的重要概念,而且布尔函数也是研究数字电路、密码学和密码技术的重要工具.不同的密码系统对布尔函数有不同的要求,某一性质保证某一方面的安全性.但并不是一个函数满足的性质越多越好,因为满足的性质越多,函数类越小,函数的选择范围将缩小,从而失去灵活性,反而降低安全性.所以,一个函数类的计数问题是一个重要的研究课题.文献[10]系统地研究了密码学中的布尔函数,其中对称布尔函数是一类重要的布尔函数,关于对称布尔函数的研究取得了丰富的成果[11-12].对于二值命题逻辑系统 L 而言,逻辑公式与布尔函数之间是相互决定的,所以对称布尔函数可以自然地用于研究经典逻辑系统中逻辑公式的对称性.然而当 n 大于 2 时,情况有很大的不同:以 Lukasiewicz n 值系统 L_n 为例,从 $(L(n))^m$ 到 $L(n)$ 的 m 元函数的个数远大于含有 m 个原子命题的逻辑公式的个数(这里 $L(n)$ 表示 L_n 的赋值域),这时逻辑公式与相应的多值函数之间已不再有相互决定的关系.本文将对称函数的思想引入到三值逻辑系统 L_3^* 中,定义了对称三值 R_0 函数,在此基础上给出了对称逻辑公式和准对称逻辑公式的概念,并在逻辑等价的意义下研究了对称逻辑公式的性质.通过研究对称布尔函数和对称三值 R_0 函数,给出了 L_3^* 和经典逻辑系统 L 中对称逻辑公式之间的关系以及计数问题.最后证明了对称逻辑公式的两种截然相反的性态,即,n 元对称逻辑公式只占全体 n 元逻辑公式的很小一部分,其比例随 n 的增大而趋向于零;然而从另一角度看,n 元对称逻辑公式却又很多,因为可以证明对称逻辑公式的真度之集和全体逻辑公式的真度之集一样,在[0,1]中是稠密的.然而,从拓扑学的观点看,全体对称逻辑公式之集和全体准对称逻辑公式之集都是逻辑度量空间中的无处稠密集.

2 预备知识

定义 1[1]. 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$,$F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型自由代数,称 $F(S)$ 中的元为系统 L_3^* 中的公式(或命题),称 S 中的元为系统 L_3^* 中的原子公式(或原子命题).

定义 2[1]. 设 $v:F(S)\rightarrow\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 是映射,这里 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 是三值 R_0 代数,若 v 是 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型同态,即

$$v(\neg A)=\neg v(A),v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=\max\{v(A),v(B)\},$$
$$v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B)=R_0(v(A),v(B)),$$

则称 v 为 $F(S)$ 在三值 R_0 代数 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 中的赋值,简称 v 为赋值.$F(S)$ 中全体赋值之集记作 $\overline{\Omega}$.

定义 3[1]. 设 $A,B\in F(S)$.

(i) 如果对每个 $v\in\overline{\Omega}$,均有 $v(A)=1$,则称 A 为重言式,记作 $\models A$;如果对每个 $v\in\overline{\Omega}$,均有 $v(A)=0$,则称 A 为矛盾式.

(ii) 如果对每个 $v\in\overline{\Omega}$,均有 $v(A)=v(B)$,则称 A 与 B 逻辑等价,记作 $A\approx B$.

定义 4[1]. 设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是含有 n 个原子命题的公式,它由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 通过逻辑连接词 $\neg$,$\vee$ 与 $\rightarrow$ 连接而成.设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$,分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取代 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 中的 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,并按

$$\neg x_1=1-x_1,\ x_1\vee x_2=\max\{x_1,x_2\},\ x_1\rightarrow x_2=R_0(x_1,x_2)$$

理解 $\neg$,$\vee$ 与 $\rightarrow$,则得一 n 元函数,记作 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,叫作公式 A 诱导的三值 R_0 函数.

定义 5[1]. 设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是系统 L_3^* 中含有 n 个原子命题的合式公式,则 A 的真度 $\tau(A)$ 定义如下:

$$\tau(A)=\frac{1\times|\overline{A}^{-1}(1)|+\frac{1}{2}\times\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{3^n}.$$

这里 $|\overline{A}^{-1}(1)|$ 表示使得 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$ 的赋值的个数,$\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ 表示使得 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$ 的赋值的个数.

命题 1. 设 $A,B\in F(S)$,则 $\tau((A\vee B)\rightarrow A)\geq 1-\tau(B)$.

证明. $\forall v\in\overline{\Omega}$,(i) 如果 $v(B)\leq v(A)$,则 $v((A\vee B)\rightarrow A)=(v(A)\vee v(B))\rightarrow v(A)=v(A)\rightarrow v(A)=1\geq 1-v(B)$;(ii) 如果 $v(B)>v(A)$,则 $v((A\vee B)\rightarrow A)=(v(A)\vee v(B))\rightarrow v(A)=v(B)\rightarrow v(A)=(1-v(B))\vee v(A)\geq 1-v(B)$.

综上可得:$v((A\vee B)\rightarrow A)\geq 1-v(B)$.由 v 的

任意性知，$\tau((A\vee B)\to A)\geq 1-\tau(B)$.　　证毕.

定义 6[1].　设 $A,B\in F(S)$，令

$$\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)),$$

称 $\xi(A,B)$ 为公式 A 与 B 之间的相似度.

定义 7[1].　在 $F(S)$ 上定义二元非负函数 ρ：$F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 如下：

$$\rho(A,B)=1-\xi(A,B),\ A,B\in F(S),$$

则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离，称为 $F(S)$ 上的自然伪距离，简称伪距离. 称 $(F(S),\rho)$ 为伪距离空间.

命题 2.　设 $A,B,C,D\in F(S)$，且 $A\approx B,C\approx D$，则 $\rho(A,C)=\rho(B,D)$.

证明.　因为 $A\approx B,C\approx D$，所以 $\forall v\in\overline{\Omega}$，均有 $v(A)=v(B),v(C)=v(D)$，从而有

$$(v(A)\to v(C))\wedge(v(C)\to v(A))=$$
$$(v(B)\to v(D))\wedge(v(D)\to v(B)).$$

又：v 是 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态，所以 $v((A\to C)\wedge(C\to A))=v((B\to D)\wedge(D\to B))$. 由 v 的任意性知，$\tau((A\to C)\wedge(C\to A))=\tau((B\to D)\wedge(D\to B))$，即 $\xi(A,C)=\xi(B,D)$. 所以 $\rho(A,C)=\rho(B,D)$.　证毕.

定义 8.　设 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元三值 R_0 函数，如果对 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 均有

$$\overline{A}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元对称三值 R_0 函数.

定义 9[9].　设 $F(S)$ 是系统 L_3^* 中的全体公式之集. 定义 $F(S)$ 上的自映射 φ：$F(S)\to F(S)$ 如下：$\forall A\in F(S)$，设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，令

$$\varphi(A)=A(\neg p_1,\neg p_2,\cdots,\neg p_n),$$

我们称此变换为反射变换.

3　对称逻辑公式与准对称逻辑公式

定义 10.　设 $A\in F(S)$，且 A 含有 n 个原子命题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$. 如果 A 所诱导的三值 R_0 函数是对称三值 R_0 函数，则称 A 为 n 元对称逻辑公式.

例 1.　设公式 $A_0=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$，$A_1=(\neg p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge\cdots\wedge p_n)\vee\cdots\vee(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge\neg p_n)$，$A_2=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3\wedge\cdots\wedge p_{n-1}\wedge p_n)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3\wedge\cdots\wedge p_{n-1}\wedge p_n)\vee\cdots\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\cdots\wedge p_{n-1}\wedge\neg p_n)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3\wedge\cdots\wedge p_{n-1}\wedge p_n)\vee\cdots\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3\wedge\cdots\wedge p_{n-1}\wedge\neg p_n)\vee\cdots\vee(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\cdots\wedge\neg p_{n-1}\wedge\neg p_n)$，$\cdots$，$A_{n-1}=(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3\wedge\cdots\wedge\neg p_{n-1}\wedge\neg p_n)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3\wedge\cdots\wedge\neg p_{n-1}\wedge\neg p_n)\vee\cdots\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3\wedge\cdots\wedge\neg p_{n-1}\wedge p_n)$，$A_n=\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\cdots\wedge\neg p_n$，令 $\Gamma=\{\bigvee_{k\in K}A_k\mid K$ 是集合 $N=\{0,1,2,\cdots,n\}$ 的任意子集$\}$，当 $K=\varnothing$ 时，规定 $\bigvee_{k\in\varnothing}A_k=\neg(\bigvee_{k\in N}A_k)$，则 Γ 中的所有公式均为 L_3^* 中的 n 元对称逻辑公式.

注 1.　显然，如果两个公式诱导的三值 R_0 函数相同，则这两个公式逻辑等价；反之，逻辑等价的公式未必诱导出相同的三值 R_0 函数.

例 2.　设 $A=p_1,B=p_1\wedge(p_2\to p_2)$，则 A 与 B 逻辑等价，但它们诱导的三值 R_0 函数显然是不同的. 值得注意的是，前者是 1 元三值 R_0 函数，显然是对称三值 R_0 函数；后者是 2 元三值 R_0 函数，且不是对称三值 R_0 函数.

命题 3.　设 A,B 是含有同样的 n 个原子命题的逻辑公式，则 A 与 B 逻辑等价当且仅当 A 与 B 诱导相同的三值 R_0 函数.

证明.　必要性是显然的，仅证充分性. 设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$B=B(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，A,B 诱导的三值 R_0 函数分别为 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，因为 A 与 B 逻辑等价，所以对任意的赋值 v，均有 $v(A)=v(B)$，即，对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$，均有 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，即，$A$ 与 B 诱导的三值 R_0 函数相同.　证毕.

注 2.　当公式 A,B 诱导出相同的三值 R_0 函数时，则规定 A,B 是相同的公式.

定义 11.　设 $A,B\in F(S)$，且 $A\approx B$，如果 A 是对称逻辑公式，则称 B 为准对称逻辑公式.

命题 4.　设逻辑公式 $B=B(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 与对称逻辑公式 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 逻辑等价，且 B 不是对称逻辑公式，则 $n<m$.

证明.　由命题 3 知，$n\neq m$. 假设 $n>m$，因为 $B=B(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 不是对称逻辑公式，所以存在 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^m$ 及 $(1,2,\cdots,m)$ 的某个置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_m)$，使得 $\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\neq\overline{B}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$.

又因为 $A\approx B$，所以对于赋值 $v(p_1)=x_1,\cdots,v(p_m)=x_m,v(p_{m+1})=x_{m+1},\cdots,v(p_n)=x_n$ 和 $v'(p_1)=x_{i_1},\cdots,v'(p_m)=x_{i_m},v'(p_{m+1})=x_{m+1},\cdots,v'(p_n)=x_n$ 有 $v(A)=v(B)$，$v'(A)=v'(B)$，即 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$\overline{A}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m},x_{m+1},\cdots,x_n)=\overline{B}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$. 所以

$$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\neq$$
$$\overline{A}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m},x_{m+1},\cdots,x_n),$$

因为$(i_1,i_2,\cdots,i_m,m+1,\cdots,n)$是$(1,2,\cdots,n)$的置换,且$A$是对称逻辑公式,所以$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=\overline{A}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m},x_{m+1},\cdots,x_n)$,产生矛盾.

因此$n<m$. 证毕.

命题5. 设两对称逻辑公式$A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$与$B=B(p_1,p_2,\cdots,p_m)$逻辑等价,且A,B既不是重言式,也不是矛盾式,则$m=n$.

证明. 假设$m\neq n$,不妨设$m<n$,因为A与B逻辑等价,所以$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^m$,有

$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,取$x_n=0$,因为$A$为对称逻辑公式,所以$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,0)=\overline{A}(0,\cdots,x_{m+1},x_m,\cdots,x_1)$,而$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,0)=\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,$\overline{A}(0,\cdots,x_{m+1},x_m,\cdots,x_1)=\overline{B}(0,x_2,\cdots,x_m)$,所以$\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\overline{B}(0,x_2,\cdots,x_m)$.

序行此法,可得$\overline{B}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\overline{B}(0,x_2,\cdots,x_m)=\overline{B}(0,0,\cdots,x_m)=\cdots=\overline{B}(0,0,\cdots,0)$,所以$B$诱导的函数是常值函数,即$B$是重言式或矛盾式,产生矛盾.因此$m=n$. 证毕.

命题6. 设公式$B=B(p_1,p_2,\cdots,p_m)$是准对称逻辑公式,且B不是重言式,也不是矛盾式,则与公式B逻辑等价的对称逻辑公式是唯一存在的.

证明. 存在性是显然的,仅证唯一性.如果存在两个对称逻辑公式A和C都与B逻辑等价,则A和C是逻辑等价的对称逻辑公式,所以由命题5知,A和C含有同样多的原子公式.再由命题3和注2知,A和C是相同的逻辑公式. 证毕.

命题7. 设公式$A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$是对称逻辑公式,φ是$F(S)$上的反射变换,则$\varphi(A)$也是对称逻辑公式.

证明. 由$A=A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$及φ是$F(S)$上的反射变换,可得$\varphi(A)=A(\neg p_1,\neg p_2,\cdots,\neg p_n)$,所以$\varphi(A)$诱导的三值$R_0$函数$\overline{\varphi(A)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{A}(1-x_1,1-x_2,\cdots,1-x_n)$.又$A$是对称逻辑公式,所以$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称三值$R_0$函数,从而$\overline{A}(1-x_1,1-x_2,\cdots,1-x_n)$也是对称三值$R_0$函数.即,$\overline{\varphi(A)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称三值$R_0$函数,因此$\varphi(A)$也是对称逻辑公式. 证毕.

推论1. 设公式$B=B(p_1,p_2,\cdots,p_m)$是准对称逻辑公式,φ是$F(S)$上的反射变换,则$\varphi(B)$也是准对称逻辑公式.

命题8. 设公式A是对称逻辑公式,$B=\neg A$,则B也是对称逻辑公式.

证明. 设公式A诱导的三值R_0函数为$\overline{A}$,因为$B=\neg A$,所以公式B诱导的三值R_0函数为$1-\overline{A}$.又因为公式A是对称逻辑公式,所以$\overline{A}$是对称三值R_0函数,从而$1-\overline{A}$是对称三值R_0函数,因此B是对称逻辑公式. 证毕.

4 逻辑系统L_3^*和经典逻辑系统L中对称逻辑公式的关系

在经典逻辑系统L中,任一$\{0,1\}^n\to\{0,1\}$映射f,都存在一个n元逻辑公式A,使得A诱导的布尔函数为f.而在L_3^*逻辑系统中,任一$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n\to\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$映射$g$,不一定存在$n$元逻辑公式$B$,使得$B$诱导的三值$R_0$函数为$g$.例如对于$n$元函数$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$,则不存在$n$元逻辑公式$B$,使得$B$诱导的三值$R_0$函数为$g$.

定义12. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n元布尔函数,如果对$(1,2,\cdots,n)$的任意置换$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$均有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}),$$

则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称布尔函数.设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$,称向量$\boldsymbol{\alpha}$中所含1的个数为向量$\boldsymbol{\alpha}$的重量.

命题9. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n元布尔函数,如果$\{0,1\}^n$中的所有等重向量对应的函数值相等,则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称布尔函数.

证明. 对于任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$以及$(1,2,\cdots,n)$的任意置换$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,均有向量$(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})\in\{0,1\}^n$且与向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$等重,所以$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$,因此$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称布尔函数. 证毕.

命题10. n元对称布尔函数共有2^{n+1}个.

证明. 对于$\{0,1\}^n$中的向量按重量可分为$n+1$组,其重量分别为$0,1,2,\cdots,n$,不同的向量组所对应的函数值有2个:0,1.所以n元对称布尔函数共有2^{n+1}个. 证毕.

定义13. 设$A\in F(S)$,且A含有n个原子命

题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$. 如果 A 所诱导的布尔函数是对称布尔函数,则称 A 为经典逻辑系统 L 中的 n 元对称逻辑公式.

例 3. 设公式 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 及 Γ 的定义同例 1,则 Γ 中的所有公式均为经典逻辑系统 L 中的 n 元对称逻辑公式.

命题 11. 设公式 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 的定义同例 1,$\forall i\in N=\{0,1,\cdots,n\}$,对于赋值 $v(p_1)=v(p_2)=\cdots=v(p_i)=0$, $v(p_{i+1})=\cdots=v(p_n)=1$,均有

$$v(A_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases},\ j\in N.$$

命题 12. 设 Γ 的定义同例 1,则 Γ 中的公式所诱导的 n 元布尔函数是两两互异的.

证明. 设 A,B 是 Γ 中的任意两个公式,则存在 $K_1,K_2\subseteq N=\{0,1,\cdots,n\}$, $K_1\neq K_2$ 使得 $A=\bigvee\limits_{k\in K_1}A_k$, $B=\bigvee\limits_{k\in K_2}A_k$.

因为 $K_1\neq K_2$,所以存在 $i\in N$,使得 $i\in K_1$ 但 $i\notin K_2$(或 $i\in K_2$ 但 $i\notin K_1$),不妨设是前一种情形,即,$i\in K_1$ 但 $i\notin K_2$,则对于赋值

$$v(p_1)=\cdots=v(p_i)=0,$$
$$v(p_{i+1})=\cdots=v(p_n)=1,$$

有 $v(A_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}$,从而有 $v(A)=1,v(B)=0$,即 A,B 诱导的布尔函数是互异的.

由 A,B 的任意性知,Γ 中的公式所诱导的 n 元布尔函数是两两互异的. 证毕.

定义 14. 称映射 $g:\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n\to\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ 为 n 元三值函数. $\forall\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 及 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,均有 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则称 g 为 n 元对称三值函数. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 中的两个向量,如果 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 α 通过调整分量的次序而得到,则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为同类向量.

注 3. 在定义 14 中,$\forall\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的重量. 显然,同类向量的重量是相等的;反过来,如果 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 重量相等,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不一定是同类向量. 例如 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 都是重量为 1 的向量,但是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不是同类向量.

命题 13. 设 g 为 n 元三值函数,如果 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 中的所有同类向量对应的函数值相等,则 g 为 n 元对称三值函数.

证明. 对于任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 以及 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,均有向量 $(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^n$ 且与向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为同类向量,所以 $g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,因此 g 为 n 元对称三值函数. 证毕.

定理 1. $2n$ 元的对称三值函数共 3^{2n^2+3n+1} 个, $2n+1$ 元的对称三值函数共 3^{2n^2+5n+3} 个.

证明. 对于 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^{2n}$ 中的向量,按重量可分为 $4n+1$ 组,其重量分别为

$$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots,n-1,n-\frac{1}{2},n,n+\frac{1}{2},n+1,\cdots,$$
$$2n-\frac{3}{2},2n-1,2n-\frac{1}{2},2n.$$

而对于重量相等的向量组又可分为不同的类,其中重量为 $0,\frac{1}{2}$ 的各有 1 个向量类,重量为 $1,\frac{3}{2}$ 的各有 2 个向量类,$\cdots$,重量为 $n-1,n-\frac{1}{2}$ 的各有 n 个向量类,重量为 n 的有 $n+1$ 个向量类,重量为 $n+\frac{1}{2}$, $n+1$ 的各有 n 个向量类,$\cdots$,重量为 $2n-\frac{3}{2},2n-1$ 的各有 2 个向量类,重量为 $2n-\frac{1}{2},2n$ 的各有 1 个向量类. 因此,所有的向量类为

$$1+1+2+2+\cdots+n+n+(n+1)+$$
$$n+n+\cdots+2+2+1+1=$$
$$4\times\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=2n^2+3n+1.$$

不同的向量类所对应的函数值有 3 个:$0,\frac{1}{2},1$. 所以 $2n$ 元的对称三值函数共 3^{2n^2+3n+1}.

对于 $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^{2n+1}$ 中的向量,按重量可分为 $4n+3$ 组,其重量分别为

$$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots,n-1,n-\frac{1}{2},n,n+\frac{1}{2},n+1,$$
$$n+\frac{3}{2},n+2,\cdots,2n-\frac{1}{2},2n,2n+\frac{1}{2},2n+1.$$

而对于重量相等的向量组又可分为不同的类,其中

重量为 $0,\frac{1}{2}$ 的各有1个向量类,重量为 $1,\frac{3}{2}$ 的各有2个向量类,…,重量为 $n-1,n-\frac{1}{2}$ 的各有 n 个向量类,重量为 $n,n+\frac{1}{2},n+1$ 的有 $n+1$ 个向量类,重量为 $n+\frac{3}{2},n+2$ 的各有 n 个向量类,…,重量为 $2n-\frac{1}{2},2n$ 的各有2个向量类,重量为 $2n+\frac{1}{2},2n+1$ 的各有1个向量类.因此,所有的向量类为

$$1+1+2+2+\cdots+n+n+(n+1)+(n+1)+(n+1)+n+n+\cdots+2+2+1+1=4\times\frac{n(n+1)}{2}+3(n+1)=2n^2+5n+3.$$

不同的向量类所对应的函数值有3个:$0,\frac{1}{2},1$.所以 $2n+1$ 元的对称三值函数共 3^{2n^2+5n+3}. 证毕.

推论2. 在逻辑系统 L_3^* 中,$2n$ 元对称逻辑公式至多有 3^{2n^2+3n+1} 个,$2n+1$ 元对称逻辑公式至多有 3^{2n^2+5n+3} 个.

定理2. 设 $A\in F(S)$,且 A 中含有 n 个原子命题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,Γ 的定义同例1,如果 A 是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式,则存在公式 $B\in\Gamma$,使得 $A\approx B$.

证明. 因为 A 中含有 n 个原子命题 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 且是 L 中的对称逻辑公式,所以 A 所诱导的布尔函数是 n 元对称的布尔函数.而集合 $\Gamma=\{\bigvee_{k\in K}A_k\mid K$ 是集合 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ 的任意子集$\}$ 中共有 2^{n+1} 个对称逻辑公式,这些公式诱导的 2^{n+1} 个布尔函数也是 n 元对称布尔函数,又 n 元对称布尔函数共 2^{n+1} 个.所以存在公式 $B\in\Gamma$,使得 B 与 A 诱导的布尔函数相同,即 $A\approx B$. 证毕.

命题14. 设 $A\in F(S)$,如果 A 是逻辑系统 L_3^* 中的对称逻辑公式,则 A 是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式.

证明. 不妨设公式 A 含有 n 个原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,因为 A 是逻辑系统 L_3^* 中的对称逻辑公式,所以 A 所诱导的 n 元三值 R_0 函数 $\overline{A_{L_3^*}}:\{0,\frac{1}{2},1\}^n\to\{0,\frac{1}{2},1\}$ 是对称的三值 R_0 函数,从而可得,A 所诱导的 n 元布尔函数 $\overline{A_L}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 也是对称的布尔函数.因此,A 是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式. 证毕.

注4. 设 $A=p_1\to p_1$,$B=p_1\vee\neg p_1$,显然,在逻辑系统 L_3^* 中,A 与 B 不逻辑等价,且 A,B 都是 L_3^* 中的对称逻辑公式,由命题14知,A,B 也是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式.但是,在 L 中 $A\approx B$,可以看作同一个公式.

例4. 设 $A=(\neg p_1\to p_2)\vee p_3$,则 A 是 L 中的对称逻辑公式,但 A 不是 L_3^* 中的对称逻辑公式.

证明. 在 L 中,$A=(\neg p_1\to p_2)\vee p_3\approx p_1\vee p_2\vee p_3$,显然,$A$ 是 L 中的对称逻辑公式.在 L_3^* 中,A 诱导的三值 R_0 函数为 $\overline{A}(x_1,x_2,x_3)=(\neg x_1\to x_2)\vee x_3=((1-x_1)\to x_2)\vee x_3$.由 $\overline{A}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(1\to\frac{1}{2}\right)\vee\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\vee\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 及 $\overline{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\right)\vee 0=1\vee 0=1$,可得 $\overline{A}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq\overline{A}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,从而 $\overline{A}(x_1,x_2,x_3)$ 不是对称三值 R_0 函数.所以,A 不是 L_3^* 中的对称逻辑公式. 证毕.

注5. 由例4知,如果 A 是 L 中的对称逻辑公式,而 A 不一定是 L_3^* 中的对称逻辑公式.但是,我们有下面的结论.

定理3. 设 $A\in F(S)$,如果 A 是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式,则存在 $B\in F(S)$,$A\approx B$,使得 B 是 L_3^* 中的对称逻辑公式.

由定理2和例1可得本结论.

定理4. 设 $\Gamma_3=\{A\mid A\in F(S)$,$A$ 含有 n 个原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,A 是 L_3^* 中的对称逻辑公式$\}$,$\Gamma_2=\{A\mid A\in F(S)$,$A$ 含有 n 个原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,A 是 L 中的对称逻辑公式$\}$,则 $|\Gamma_2|=2^{n+1}$,且 $|\Gamma_3|\geq|\Gamma_2|=2^{n+1}$($|\Gamma|$ 表示 Γ 中所含对称逻辑公式的个数).

由注4及定理3可得本结论.

命题15. 设 $A\in F(S)$,如果 A 是逻辑系统 L_3^* 中的准对称逻辑公式,则 A 是经典逻辑系统 L 中的准对称逻辑公式.

证明. 因为公式 A 是 L_3^* 中的准对称逻辑公式,所以存在 $B\in F(S)$,B 是 L_3^* 中的对称逻辑公式,使得 $A\approx B$.由命题14知,B 也是经典逻辑系统 L 中的对称逻辑公式,而且,在 L 中,$A\approx B$.因此,A 是 L 中的准对称逻辑公式. 证毕.

推论3. 设 $A\in F(S)$,如果 A 是经典逻辑系统 L 中的准对称逻辑公式,则存在 $B\in F(S)$,$A\approx B$,使得 B 是 L_3^* 中的准对称逻辑公式.

由定理3可得本结论.

定理 5.　设 $Q\Gamma_3=\{A\mid A\in F(S),A$ 是 L_3^* 中的准对称逻辑公式$\}$，$Q\Gamma_2=\{A\mid A\in F(S)$ 含，A 是 L 中的准对称逻辑公式$\}$，则

$$|Q\Gamma_3|\geq|Q\Gamma_2|.$$

由命题 15 及推论 3 可得本结论.

5　对称逻辑公式在逻辑度量空间中的分布

定理 6.　n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随 n 的增大而趋向于 0.

证明.　若 $n=2k$ 为偶数，则不同的 n 元对称逻辑公式至多有 3^{2k^2+3k+1} 个；若 $n=2k+1$ 为奇数，则不同的 n 元对称逻辑公式至多有 3^{2k^2+5k+3} 个. 而全体 n 元布尔函数共有 2^{2^n} 个，所以全体 n 元三值 R_0 函数至少有 2^{2^n} 个，从而全体 n 元逻辑公式至少有 2^{2^n} 个. 显然 3^{2k^2+3k+1} 或 3^{2k^2+5k+3} 与 2^{2^n} 之比随着 n 的增大趋于 0. 所以，n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随 n 的增大而趋向于 0.　　证毕.

由定理 6 可以看出，n 元对称逻辑公式只占全体 n 元逻辑公式的极少一部分. 但是，从另一个角度看 n 元对称逻辑公式却又表现出截然相反的性质. 事实上，我们有下面的定理.

定理 7.　对称逻辑公式的真度之集同全体逻辑公式真度之集一样，在 $[0,1]$ 中是稠密的.

为了证明定理 7，我们需要下面的引理.

引理 1.　对于二项展开式 $(1+2)^{3n}=\binom{0}{3n}\times 2^{3n}+\binom{1}{3n}\times 2^{3n-1}+\cdots+\binom{n}{3n}\times 2^{2n}+\binom{n+1}{3n}\times 2^{2n-1}+\cdots+\binom{3n-1}{3n}\times 2+\binom{3n}{3n}$，有下面的结论.

(i) $\binom{0}{3n}\times 2^{3n},\binom{1}{3n}\times 2^{3n-1},\cdots,\binom{n}{3n}\times 2^{2n}$ 单调递增，$\binom{n+1}{3n}\times 2^{2n-1},\cdots,\binom{3n-1}{3n}\times 2,\binom{3n}{3n}$ 单调递减；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\binom{n}{3n}\times 2^{2n}}{3^{3n}}=0.$

证明.　(i) 如果 $k<n$，则有 $\dfrac{\binom{k}{3n}\times 2^{3n-k}}{\binom{k+1}{3n}\times 2^{3n-k-1}}=\dfrac{2(k+1)}{3n-k}<\dfrac{2n}{2n}=1$，所以 $\binom{0}{3n}\times 2^{3n},\binom{1}{3n}\times 2^{3n-1},\cdots,\binom{n}{3n}\times 2^{2n}$ 单调递增.

如果 $k\geq n$，则有 $\dfrac{\binom{k}{3n}\times 2^{3n-k}}{\binom{k+1}{3n}\times 2^{3n-k-1}}=\dfrac{2(k+1)}{3n-k}>\dfrac{2n}{2n}=1$，所以 $\binom{n+1}{3n}\times 2^{2n-1},\cdots,\binom{3n-1}{3n}\times 2,\binom{3n}{3n}$ 单调递减.

(ii) 由斯特林公式[13] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}=1$ 可知：当 n 足够大时，$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$，从而有 $\dfrac{\binom{n}{3n}\times 2^{2n}}{3^{3n}}=\dfrac{(3n)!\,2^{2n}}{n!\,(2n)!\,3^{3n}}\approx\dfrac{\sqrt{2\pi}\times(3n)^{3n+\frac{1}{2}}\times 2^{2n}}{\sqrt{2\pi}\times n^{n+\frac{1}{2}}\times\sqrt{2\pi}\times(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\times 3^{3n}}=\dfrac{\sqrt{3n\pi}}{2n\pi}\to 0,n\to\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\binom{n}{3n}\times 2^{2n}}{3^{3n}}=0.$　　证毕.

推论 4.　对于二项展开式 $(1+2)^n=\binom{0}{n}\times 2^n+\binom{1}{n}\times 2^{n-1}+\cdots+\binom{k}{n}\times 2^{n-k}+\cdots+\binom{n}{n}$ 及 $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\binom{k}{n}\times 2^{n-k}}{3^n}=0.$

下面给出定理 7 的证明.

证明.　任意的 $\varepsilon>0$，只要 n 选取的充分大，就有 $\dfrac{2^n+1}{2\times 3^n}<\varepsilon$ 且 $\dfrac{\binom{k}{n}\times 2^{n-k}}{3^n}<\varepsilon$，设公式 $A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的定义同例 1，令 $B_0=A_0,B_1=B_0\vee A_1,B_2=B_1\vee A_2,\cdots,B_n=B_{n-1}\vee A_n$，显然 $B_0,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 都是对称逻辑公式，且 $\tau(B_0)=\dfrac{1\times 1+\dfrac{1}{2}\times(2^n-1)}{3^n}=\dfrac{2^n+1}{2\times 3^n}$，

$$\tau(B_1)=\tau(B_0)+\frac{\binom{1}{n}}{3^n}+\frac{\dfrac{1}{2}\times\binom{1}{n}\times(2^{n-1}-1)}{3^n},\cdots,$$

$$\tau(B_k)=\tau(B_{k-1})+\frac{\binom{k}{n}}{3^n}+\frac{\dfrac{1}{2}\times\binom{k}{n}\times(2^{n-k}-1)}{3^n},\cdots,$$

$\tau(B_n)=\tau(B_{n-1})+\dfrac{\binom{n}{n}}{3^n}$. 从而有

$\tau(B_0)<\varepsilon,\tau(B_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to\dfrac{1}{2},n\to\infty$，且

$0<\tau(B_k)-\tau(B_{k-1})=\dfrac{\frac{1}{2}\times\binom{k}{n}\times(2^{n-k}+1)}{3^n}\leq$

$\dfrac{\binom{k}{n}\times 2^{n-k}}{3^n}<\varepsilon, k=1,2,\cdots,n.$

因此可得,对称逻辑公式的真度之集在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中是稠密的.

令 $C_0=\neg B_0, C_1=\neg B_1,\cdots,C_n=\neg B_n$,因为 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 都是对称逻辑公式,所以 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 也是逻辑对称公式,且 $\tau(C_i)=1-\tau(B_i), i=0,1,2,\cdots,n$,从而有 $\tau(C_0)\to 1, \tau(C_n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\to\frac{1}{2}, n\to\infty$,且 $0<\tau(C_{k-1})-\tau(C_k)=\tau(B_k)-\tau(B_{k-1})<\varepsilon, k=1,2,\cdots,n$.因此可得,对称逻辑公式的真度之集在$\left[\frac{1}{2},1\right]$中是稠密的.

综上可知:对称逻辑公式的真度之集在[0,1]中是稠密的. 证毕.

推论 5. 准对称逻辑公式的真度之集同全体逻辑公式真度之集一样,在[0,1]中是稠密的.

证明. 因为准对称逻辑公式之集包含了对称逻辑公式之集,所以由定理 7 可得本结论. 证毕.

以下我们从拓扑的观点讨论对称逻辑公式集在逻辑度量空间中的分布.

定义 15[14]. 设(X,U)是拓扑空间,E 是 X 的子集.如果 E 在(X,U)中的闭包不含内点,则称 E 是无处稠密集.

引理 2. 设(X,ρ)是(伪)度量空间,E 是 X 的子集.如果

① E 自身不含内点,

② E 的补集中每个点都和 E 有正距离,则 E 是 X 中的无处稠密集.

证明. 假设 E 不是无处稠密集,则由定义 15 知,E 的闭包 $cl(E)$ 中有内点 a,即,存在正数 ε,使得以 a 为中心,以 ε 为半径的开邻域 $B(a,\varepsilon)$ 包含于 $cl(E)$.由①知 E 不含内点,所以 $B(a,\varepsilon)$ 中有点 b 不属于 E,即 b 属于 E 的补集.由②知 $\rho(b,E)=d>0$,从而 b 不是 E 的聚点,即,b 不属于 $cl(E)$,这与 $b\in B(a,\varepsilon)\subset cl(E)$ 相矛盾.所以 E 是无处稠密集. 证毕.

定理 8. 全体准对称逻辑公式之集是逻辑度量空间中的无处稠密集.

证明. 设 A 是任一准对称逻辑公式,ε 是任意给定的正数,则总存在自然数 n,使得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon$.下面证明存在公式 C,C 不是准对称逻辑公式,使得 $\rho(A,C)<\varepsilon$,即,A 不是准对称逻辑公式之集的内点.

(i) 如果 A 是矛盾式,令 $C=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge\neg p_n$,显然 C 不是准对称逻辑公式,且满足

$$\rho(A,C)=1-\xi(A,C)=1-\tau((A\to C)\wedge(C\to A))=$$
$$1-\tau(C\to A)=1-\tau(\neg C)=\tau(C)=$$
$$\frac{1\times 1+\frac{1}{2}\times(2^n-1)}{3^n}=\frac{\frac{1}{2}\times(2^n+1)}{3^n}<$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon.$$

(ii) 如果 A 是重言式,令 $C=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee\neg p_n$,显然 C 不是准对称逻辑公式,且满足

$$\rho(A,C)=1-\xi(A,C)=1-\tau((A\to C)\wedge(C\to A))=$$
$$1-\tau(A\to C)=1-\tau(C)=\tau(\neg C)=$$
$$\tau(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\cdots\wedge p_n)=$$
$$\frac{1\times 1+\frac{1}{2}\times(2^n-1)}{3^n}=$$
$$\frac{\frac{1}{2}\times(2^n+1)}{3^n}<\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon.$$

(iii) 如果 A 既不是矛盾式,也不是重言式,不妨设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_m)$.

令 $C=A\vee(p_{m+1}\wedge p_{m+2}\wedge\cdots\wedge\neg p_{m+n})$,显然 C 不是准对称公式,且满足

$$\rho(A,C)=1-\xi(A,C)=1-\tau((A\to C)\wedge(C\to A))=$$
$$1-\tau((A\vee(p_{m+1}\wedge p_{m+2}\wedge\cdots\wedge\neg p_{m+n}))\to A).$$

由命题 1 知,$\tau((A\vee(p_{m+1}\wedge p_{m+2}\wedge\cdots\wedge\neg p_{m+n}))\to A)\geq 1-\tau(p_{m+1}\wedge p_{m+2}\wedge\cdots\wedge\neg p_{m+n})$,所以

$$\rho(A,C)\leq\tau(p_{m+1}\wedge p_{m+2}\wedge\cdots\wedge\neg p_{m+n})=$$
$$\frac{1\times 1+\frac{1}{2}\times(2^n-1)}{3^n}=\frac{\frac{1}{2}\times(2^n+1)}{3^n}<\left(\frac{2}{3}\right)^n<\varepsilon.$$

因此,引理 2 的条件①成立.下面证明引理 2 中的条件②.

在准对称逻辑公式之集的补集中任取一个公式 C,则 C 不是准对称逻辑公式,不妨设 $C=C(p_1,p_2,\cdots,p_k)$.设 D 是任一准对称逻辑公式,则存在对称逻辑公式 E,使得 $D\approx E$.不妨设 $E=E(p_1,p_2,\cdots,p_t)$,则 C 与 E 不逻辑等价.

如果 $t\leq k$,因为 C 与 E 不逻辑等价,所以至少

存在一个赋值 $v\in\overline{\Omega}$，使得 $v(C)\neq v(E)$，所以 $\rho(C,E)\geq\frac{\frac{1}{2}}{3^k}=d>0$，由命题 2 得

$$\rho(C,D)=\rho(C,E)\geq\frac{\frac{1}{2}}{3^k}=d>0.$$

如果 $t>k$，令 $C_1=C\wedge(p_{k+1}\to p_{k+1})\wedge\cdots\wedge(p_t\to p_t)$，则 $C\approx C_1$. 而 C 与 E 不逻辑等价，所以存在赋值 $v(p_1)=x_1,\cdots,v(p_k)=x_k(x_1,x_2,\cdots,x_k\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\})$使得 $v(C)\neq v(E)$，即，$v(C_1)\neq v(E)$，这时$v(p_{k+1}),\cdots,v(p_t)$的值可在$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$中任取，所以使得 $v(C_1)\neq v(E)$ 的赋值至少有 3^{t-k} 个，因此 $\rho(C_1,E)\geq\frac{\frac{1}{2}\times 3^{t-k}}{3^t}=\frac{\frac{1}{2}}{3^k}=d>0$，由命题 2 得：

$$\rho(C,D)=\rho(C_1,E)\geq\frac{\frac{1}{2}}{3^k}=d>0.$$

综上知，准对称逻辑公式之集的补集中的每一个公式都和准对称逻辑公式之集有正距离，即引理 2 的条件②成立.

由引理 2 知，全体准对称逻辑公式之集是逻辑度量空间中的无处稠密集.　　证毕.

推论 6.　全体对称逻辑公式之集是逻辑度量空间中的无处稠密集.

证明.　因为全体对称逻辑公式之集是全体准对称逻辑公式之集的子集，由定理 8 可得本结论. 证毕.

6　结束语

本文将对称函数的概念引入到逻辑系统 L_3^* 之中，定义了对称逻辑公式和准对称逻辑公式. 在逻辑等价的意义下，研究了对称逻辑公式和准对称逻辑公式的相关性质以及逻辑系统 L_3^* 和经典逻辑系统 L 中对称逻辑公式之间的关系. 证明了 n 元对称逻辑公式占全体 n 元逻辑公式的比例随 n 的增大而趋向于 0，然而对称逻辑公式的真度之集和全体逻辑公式真度之集一样，在[0,1]中是稠密的. 从拓扑的观点看，全体对称逻辑公式之集又是逻辑度量空间中的无处稠密集. 在定理 2 中，我们得到了经典逻辑系统 L 中 n 元对称逻辑公式的构造方法，关于 L_3^* 逻辑系统中对称逻辑公式的结构及其构造方法，另文讨论.

参 考 文 献

[1] Wang Guo-Jun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. 2nd Edition. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese)
(王国俊. 数理逻辑引论与归结原理. 第 2 版. 北京：科学出版社，2006)

[2] Wang Guo-Jun, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(1): 71-91

[3] Wang Guo-Jun, Li Bi-Jing. Theory of truth degree in Lukasiewicz n-valued propositional logic and limitation theorem. Science in China Series E, 2005, 35(6): 561-569 (in Chinese)
(王国俊，李璧镜. Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理. 中国科学(E 辑)，2005，35(6)：561-569)

[4] Wang Guo-Jun, Wang Wei. Logical metric spaces. Acta Mathematic Sinica, 2001, 44(1): 159-168 (in Chinese)
(王国俊，王伟. 逻辑度量空间. 数学学报，2001，44(1)：159-168)

[5] Wang Guo-Jun, Zhang Wen-Xiu. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149(2): 275-284

[6] Wang Guo-Jun. Quantitative logic (I). Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 191-215 (in Chinese)
(王国俊. 计量逻辑学(I). 工程数学学报，2006，23(2)：191-215)

[7] Hui Xiao-Jing, Wang Guo-Jun. Stochastic study in classical reasoning pattern and it's applications. Science in China Series E, 2007, 37(6): 801-812 (in Chinese)
(惠小静，王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用. 中国科学(E 辑)，2007，37(6)：801-812)

[8] She Yan-Hong, Wang Guo-Jun. Topological characterizations of properties of logic theories in three-valued propositional logic system L_3^*. Acta Mathematica Sinica, 2009, 52(6): 1225-1234

[9] Hu Ming-Di, Wang Guo-Jun. Reflexive transformation in classical logic metric space. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2009, 37(6): 1-6 (in Chinese)
(胡明娣，王国俊. 经典逻辑度量空间中的反射变换. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2009，37(6)：1-6)

[10] Wen Qiao-Yan, Niu Xin-Xin, Yang Yi-Xian. Boolean Function in Modern Cryptology. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese)
(温巧燕，钮心忻，杨义先. 现代密码学中的布尔函数. 北京：科学出版社，2000)

[11] Stanica P, Maitra S. Rotation symmetric Boolean functions—count and cryptographic properties. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(10): 1567-1580

[12] Sarkar P, Maitra S. Balancedness and correlation immunity of symmetric Boolean functions. Discrete Mathematics, 2007, 307(19-20): 2351-2358

[13] Ma Feng-Chang. A simplified proof of Stirling's formula and its error estimation of high precision. College Mathematics, 2003, 19(3): 102-105(in Chinese)
(马凤昌. 斯特林公式的一种简易证法及其高精度误差估计公式. 大学数学, 2003, 19(3): 102-105)

[14] Engelking R. General Topology. Berlin: Heldmann Verlag, 1978

WANG Qing-Ping, born in 1979, Ph.D. candidate, lecturer. His research interests include fuzzy logic, uncertain reasoning etc.

WANG Guo-Jun, born in 1935, professor, Ph.D. supervisor. His research interests include fuzzy logic, computational intelligence etc.

Background

Mathematical logic is a subject dealing with formalized reasoning, in which the methods on inferring the desirable conclusion from the known premise are studied. This kind of logic reasoning has been widely applied in artificial intelligence and related topics. Quantitative logic is proposed by the second author of this paper. The symbolization and formalization of mathematical logic and the numerical computation of computational mathematics are connected in quantitative logic. It enables mathematical logic to have some kind of flexibility and thus extends the scope of possible applications. The reflexive transformation is introduced in classical logic metric space by Hu in 2009, which enriches the theory of quantitative logic. This paper aims to extend symmetrical Boolean functions to three valued functions.

In three-valued logic system L_3^*, the concepts of symmetric logic formulas and pseudo-symmetric logic formulas are given through symmetric three-valued R_0 function. The relationship of symmetric logic formulas in L_3^* and classical logical system L is given. It is proved that the ratio of the number of symmetric formulas with n atoms over the number of all formulas with n atoms converges to zero when n tends to infinite. It is also proved that the set of truth degrees of symmetric logic formulas is dense in [0, 1]. On the other hand, the set consisting of all symmetric logic formulas is a nowhere dense set in the logic metric space.