# 多智能体系统中并发动态知识、信念和肯定性逻辑的研究

苏金树[1)]　吴立军[1),2)]　杨志华[3)]

1)(国防科学技术大学计算机学院　长沙　410073)

2)(电子科技大学计算机科学与工程学院　成都　610054)

3)(广东商学院信息学院　广州　510320)

**摘　要**　将知识、信念和肯定性逻辑从单个智能体扩展到多智能体系统，并且实现了多智能体系统中知识、信念和肯定性逻辑与具有并发动态属性的行为之间的很好结合. 以此为基础，提出了多智能体系统中并发动态知识、信念和肯定性逻辑，简称 CDKBC 逻辑. 为了对 CDKBC 逻辑进行解释，也给出了 CDKBC 模型，并且讨论了知识、信念和肯定性之间的关系，即知识蕴涵着肯定性，肯定性蕴涵着信念. 文中也给出了一个相应的证明系统(即公理系统)，证明了该系统是可靠的和完备的，并且证明了系统的有效性问题是 EXPTIME 完全的. 最后论文给出了 CDKBC 逻辑的实例.

**关键词**　并发动态逻辑；CDKBC 证明系统；CDKBC 模型；多智能体系统

**中图法分类号**　TP309　　　**DOI 号**：10.3724/SP.J.1016.2010.00847

# Research on Concurrent Dynamic Logic of Knowledge, Belief and Certainty for Multi-Agent Systems

SU Jin-Shu[1)]　WU Li-Jun[1),2)]　YANG Zhi-Hua[3)]

1)(*School of Computer Science, National University of Defense and Technology, Changsha*　410073)

2)(*School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu*　610054)

3)(*Information School, Guangdong University of Business Studies, Guangzhou*　510320)

**Abstract**　This paper extends the logic of Knowledge, Belief and Certainty (KBC) for one agent to that for multi-agent systems. It presents a Concurrent Dynamic logic of Knowledge, Belief and Certainty for MAS, which is called CDKBC logic, with a good combination between logic of KBC and action modalities that have concurrent and dynamic properties in multi-agent systems. Furthermore, a CDKBC model is given for interpreting this logic. The authors construct a CDKBC proof system for the logic and show the proof system is sound and complete, where the validity problem for the system will be proved to be EXPTIME-complete and give an application of the CDKBC logic.

**Keywords**　concurrent dynamic logic; CDKBC proof system; CDKBC model; multi-agent systems

---

收稿日期：2008-05-21；最终修改稿收到日期：2009-09-18. 本课题得到国家"九七三"重点基础研究发展规划项目基金(2009cb320503)、国家自然科学基金(60873008)和博士后科学基金(20070410978)资助. **苏金树**，男，1962 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为网络安全. **吴立军**(通信作者)，男，1965 年生，博士，副教授，主要研究方向为形式化方法和信息安全. E-mail：wljuestc@sina.com. **杨志华**，男，1964 年生，博士，副教授，主要研究方向为信号分析、模式识别和信息安全.

## 1 引 言

模态逻辑已经被证明是用来表达分布式系统和并发程序的安全属性的最佳工具之一. 自 1962 年,一种特别的模态逻辑即认知逻辑(也称知识逻辑)和信念逻辑[1]被引入以来,已经在哲学[2]、计算机科学[3]、人工智能[4]和游戏理论[5]等领域得到了广泛的研究. 然而这些逻辑不能描述知识和信念的变化.

1979 年,Fisher 和 Ladner 提出了动态逻辑的思想[6]. 在这种思想的基础上,研究者们提出了命题动态逻辑、一阶动态逻辑[7]、动态认知逻辑[8-12]、并发动态逻辑[13-14]和并发动态认知逻辑[15]等.

尽管这些逻辑能描述知识、信念和肯定的性质,但它们只是考虑动态逻辑和一维模态逻辑的结合,不是与多维模态逻辑的结合,而动态逻辑与多维模态逻辑的结合有更强的描述能力.

知识、信念和肯定性的概念最早是由 Lenzen 提出的[2]. 尽管 Lenzen 研究了有关知识、信念和肯定性的概念的符号性质,但他没有给出任何相关语义. Lamarre 和 Shoham 提出了一套知识、信念和肯定性模型理论,但这套理论是不遵循 $S_5$ 的性质的[16]. Su 等提出了可计算知识、信念和肯定性的逻辑[17]. 然而以上逻辑只是建立在一个智能体的基础上,而且也没考虑知识、信念和肯定性的并发性和动态性.

这篇论文将知识、信念和肯定性逻辑从单个智能体扩展到多智能体系统,并且实现了多智能体系统中知识、信念和肯定性逻辑与具有并发动态属性的行为之间的很好结合. 以此为基础,论文提出了多智能体系统中并发动态知识、信念和肯定性逻辑,简称 CDKBC(Concurrent Dynamic Knowledge, Belief and Certainty)逻辑. 为了对 CDKBC 逻辑进行解释,论文也给出了 CDKBC 模型,并且讨论了知识、信念和肯定性之间的关系,即知识蕴涵着肯定性,肯定性蕴涵着信念. 论文也构造了一个相应的证明系统(即公理系统),并且证明了该系统是可靠的和完备的以及系统的有效性问题是 EXPTIME 完全的. 最后论文给出了 CDKBC 逻辑的实例.

## 2 多智能体系统并发动态 CDKBC 模型

我们要讨论的模型称为并发动态模型,简称 CDKBC 模型,它由一个环境和 $n$ 个智能体组成. 我们用集合$\{1,2,\cdots,n\}$表示 $n$ 个智能体,用 $s_{in}$ 表示内部状态,用 $s_{en}$ 表示环境状态,并将环境状态分成 $n$ 部分,第 $i$ 部分对智能体 agent $i$ 是可见的且被记作 $s_{en}^i$($i=1,2,\cdots,n$). 很明显环境状态 $s_{en}=(s_{en}^1, s_{en}^2,\cdots,s_{en}^n)$. 这里 $s_{en}^i$ 和 $s_{en}^j$ 是可以部分重叠的($i,j=1,2,\cdots,n$). agent $i$ 在对环境的第 $j$ 部分进行观察后获得其局部状态 $s_{in}^j$($j=1,2,\cdots,n$). 我们假设因为设备或网络等原因,每个智能体可能不能对环境进行完全正确的观察识别,那么有可能 $s_{in}^i$ 不等于 $s_{en}^i$. 很明显内部状态 $s_{in}=(s_{in}^1,s_{in}^2,\cdots,s_{in}^n)$. 一个全局状态 $s$ 是由一个环境状态 $s_{en}$ 和一个内部状态 $s_{in}$ 组成,即 $s=(s_{en},s_{in})=(s_{en}^1,s_{en}^2,\cdots,s_{en}^n,s_{in}^1,s_{in}^2,\cdots,s_{in}^n)$. 我们用 $S$ 表示所有全局状态组成的集合. 为了研究的方便,我们用 $env^i(s)$ 和 $int^i(s)$ 分别表示 $s_{en}^i$ 和 $s_{in}^i$ ($i=1,2,\cdots,n$).

设 $s$ 和 $t$ 是两个全局状态,如果 $int^i(s)=int^i(t)$,那么我们就说,从知识的观点,$s$ 和 $t$ 对 agent $i$ 是不可分辨的,且记作 $s\sim_k^i t$. 定义可达关系 $K_i=\{(s,t)\mid s\in S,t\in S,s\sim_k^i t\}$($i=1,2,\cdots,n$). 我们用 $K$ 表示所有可达关系 $K_i$($i=1,2,\cdots,n$)的集合.

设 $s$ 和 $t$ 是两个全局状态,如果 $int^i(t)=env^i(t)=env^i(s)$,那么我们就说,从信念的观点,$s$ 和 $t$ 对 agent $i$ 是不可分辨的,且记作 $s\sim_B^i t$. 定义可达关系 $B_i=\{(s,t)\mid s\in S,t\in S,s\sim_B^i t\}$($i=1,2,\cdots,n$). 我们用 $B$ 表示所有可达关系 $B_i$($i=1,2,\cdots,n$)的集合.

设 $s$ 和 $t$ 是两个全局状态,如果 $int^i(t)=env^i(s)$,那么我们就说,从肯定性的观点,$s$ 和 $t$ 对 agent $i$ 是不可分辨的,且记作 $s\sim_C^i t$. 定义可达关系 $C_i=\{(s,t)\mid s\in S,t\in S,s\sim_C^i t\}$($i=1,2,\cdots,n$). 我们用 $C$ 表示所有可达关系 $C_i$($i=1,2,\cdots,n$)的集合.

在我们的模型中,假设知识、信念和肯定性是可以改变的,即我们的模型是动态的. 知识、信念和肯定性的改变是由智能体所执行的行为引起的. 我们用 $Act$ 表示所有智能体所有行为的集合. 对每一行为 $\alpha\in Act$,引入一个与该行为关联的、状态和状态集合之间的二元关系 $m(\alpha)$,$(s,W)\in m(\alpha)$当且仅当在状态 $s$ 执行行为 $\alpha$ 后导致状态集合 $W$. 我们用 $\Lambda$ 表示所有二元关系 $m(\alpha)$的集合($\alpha\in Act$).

下面我们定义并发动态模型. 设 $\Phi$ 是一个原子命题的集合,用来描述系统的基本事实. 形式上,定义在原子命题集 $\Phi$ 和行为集 $Act$ 上,关于 $n$ 个智能体的并发动态 CDKBC 模型,是一个如下的元组 $M=(S,V,K,B,C,\Lambda)$:

(1) $S$ 是系统的所有全局状态集. $S$ 中的每个元素可以表示为

$s=(s_{en},s_{in})=(s_{en}^1,s_{en}^2,\cdots,s_{en}^n,s_{in}^1,s_{in}^2,\cdots,s_{in}^n)$.

(2) $V:\Phi\rightarrow 2^S$ 是一个函数，对于每个原子命题 $p$，返回使 $p$ 为真的所有状态. 我们定义赋值函数 $\pi$，在每个环境状态，它对每个原子命题进行赋值. 因此对每个原子命题 $p$ 和全局状态 $s$，我们有 $\pi(s)(p)=\pi(s_{en})(p)\in\{\text{true},\text{false}\}$，这里 $s_{en}=(s_{en}^1,s_{en}^2,\cdots,s_{en}^n)$ 是环境状态. 所以两个不同状态，如果环境状态部分相同，那么它们的真值赋值也相同. 显然 $V$ 和 $\pi$ 是等价的，即由 $\pi$ 可以推导出 $V$，反过来由 $V$ 可以推导出 $\pi$.

(3) $K$ 是所有关系 $K_i$（与 agent $i$ 关联的）的集合.

(4) $B$ 是所有关系 $B_i$（与 agent $i$ 关联的）的集合.

(5) $C$ 是所有关系 $C_i$（与 agent $i$ 关联的）的集合.

(6) $\Lambda$ 是所有二元关系 $m(\alpha)$（与行为 $\alpha$ 关联的）的集合（$\alpha\in Act$）.

我们用 $M_n(\Phi,Act)$ 表示由所有定义在原子命题集 $\Phi$ 和行为集 $Act$ 上，关于 $n$ 个智能体的并发动态 CDKBC 模型组成的类，为了方便，在不产生误解的情况下，我们简写为 $M_n$.

**命题 1.**　关系 $K_i$ 是等价关系.

由 $K_i$ 和等价关系的定义，我们很容易得到命题 1 的证明.

下面给出几个定义，定义 $R_K^i(s)=\{t\mid(s,t)\in K_i\}$，$R_B^i(s)=\{t\mid(s,t)\in B_i\}$，$R_C^i(s)=\{t\mid(s,t)\in C_i\}$.

**命题 2.**　如果 $M$ 是 $M_n$ 中的任意模型且 $s$ 是 $S$ 中的任意状态，那么 $R_B^i(s)\subseteq R_C^i(s)$.

由 $R_B^i(s)$，$R_C^i(s)$ 的定义，该命题是不难得到证明的.

# 3　并发动态知识、信念和肯定性逻辑

这一节，我们研讨关于知识、信念和肯定性的并发动态逻辑，这个逻辑被称为 CDKBC 逻辑. 我们将根据上面的 CDKBC 模型给出其语义.

## 3.1　CDKBC 逻辑的语法

假设 $P$ 是一个原子命题集，CDKBC 逻辑的语言由下面的 BNF 语法定义：

$$\langle wff\rangle ::= P \text{ 的任何元素} \mid \neg\langle wff\rangle \mid \langle wff\rangle\wedge\langle wff\rangle \mid K_i\langle wff\rangle \mid B_i\langle wff\rangle \mid C_i\langle wff\rangle \mid E_G\langle wff\rangle \mid C_G\langle wff\rangle \mid [\alpha]\langle wff\rangle.$$

行为 $\alpha$ 定义如下：

$$\alpha ::= ?\alpha \mid (\alpha;\beta) \mid (\alpha\cap\beta) \mid (\alpha\cup\beta) \mid \alpha^*.$$

模态算子 $K$ 允许我们表示智能体关于环境知道的或者能感知的信息. 因此公式 $K_i\varphi$ 意味着 $\varphi$ 对于智能体 $i$ 是可知的，或者说 $\varphi$ 对于智能体 $i$ 关于环境是可感知的. $B_i\varphi$ 意味着智能体 $i$ 相信性质 $\varphi$. $C_i\varphi$ 意味着智能体 $i$ 对事实 $\varphi$ 感到肯定. 这里我们假定由于设备和网络等原因，每个智能体不是能完全正确地感知环境的. 因此一个智能体相信一个命题为真，但这个命题可能是假的[16-17]. $G$ 是智能体的一个集合，$E_G\varphi$ 意味着 $G$ 中每个智能体知道 $\varphi$，$C_G\varphi$ 意味着 $\varphi$ 是 $G$ 中所有智能体的公共知识.

$[\alpha]\varphi$ 表示公式 $\varphi$ 在执行行为 $\alpha$ 后为真. 行为 $?\alpha$ 表示对行为 $\alpha$ 进行测试，行为 $(\alpha;\beta)$ 表示行为 $\alpha$ 和行为 $\beta$ 的顺序执行，行为 $(\alpha\cap\beta)$ 表示行为 $\alpha$ 和行为 $\beta$ 的并发执行，行为 $(\alpha\cup\beta)$ 表示对行为 $\alpha$ 和行为 $\beta$ 的非肯定性选择，行为 $\alpha^*$ 表示行为 $\alpha$ 的循环执行（意味着行为 $\alpha$ 非肯定性地重复 0 次或更多次）.

## 3.2　CDKBC 逻辑的语义

为了定义 CDKBC 逻辑的语义（关于 CDKBC 模型的），我们下面引入两个关系算子. 假设 $R$、$R_1$ 和 $R_2$ 是二元关系，我们定义两个关系 $R_1$ 和 $R_2$ 的组合 $R_1\circ R_2$ 为一个二元关系 $\{(u,W)\mid\exists W_1$ such that $(u,W_1)\in R_1$ and $\forall v\in W_1$, $\exists W_2$ such that $(v,W_2)\in R_2$, $W=\bigcup_{v\in W_1}\{W_2\mid(v,W_2)\in R_2\}$；并且定义 $R_1\bullet R_2$ 为一个二元关系 $\{(u,W)\mid\exists W_1$ such that $(u,W_1)\in R_1$, $\exists W_2$ such that $(u,W_2)\in R_2$, $W=W_1\cup W_2\}$[15]. $R^n$ 递归定义如下：$R^1=R$ 并且 $R^{n+1}=R^n\circ R$[7]. 给定一个二元关系 $T$，定义一个算子 $F_T$：$F_T(R)=\{s,\{s\}\mid s\in S\}\cup T\circ R$. 容易证明 $F_T$ 是单调的，因此存在 $F_T$ 的最小固定点 $LFP(F_T)$.

根据以上定义，$m()$ 能被扩展到所有的行为

$$m(\alpha;\beta)=m(\alpha)\circ m(\beta),$$
$$m(\alpha\cap\beta)=m(\alpha)\bullet m(\beta),$$
$$m(\alpha\cup\beta)=m(\alpha)\cup m(\beta),$$
$$m(\alpha^*)=LFP(F_{m(\alpha)}).$$

设 $G$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集，我们说一个状态 $t$ 从状态 $s$ 是 $k$ 步 $G$ 可达的：如果存在状态序列 $s_0,s_1,\cdots,s_k$ 使得 $s_0=s$ 和 $s_k=t$ 并且对所有 $j$（$0\le j\le k-1$），存在 $i\in G$ 使得 $s_j\sim_K^i s_{j+1}$. 如果存在某个 $k\ge1$，使得状态 $t$ 从状态 $s$ 是 $k$ 步 $G$ 可达的，我们就说 $t$ 从状态 $s$ 是 $G$ 可达的（$G$-reachable）.

设 $M=(S,\pi,K,B,C,\Lambda)$ 且 $\varphi$ 是 CDKBC 逻辑公式，我们归纳定义 $\varphi$ 的解释如下：

$(M,s)\models p$ iff $\pi(s)(p)=\text{true}$.

$(M,s)\models\neg\varphi$ iff $(M,s)\not\models\varphi$.

$(M,s)\models\varphi\wedge\psi$ iff $(M,s)\models\varphi$ and $(M,s)\models\psi$.

$(M,s)\models K_i\varphi$ iff $(M,t)\models\varphi$ for all $t$ such that $s\sim_K^i t$.

$(M,s)\models B_i\varphi$ iff $(M,t)\models\varphi$ for all $t$ such that $s\sim_B^i t$.

$(M,s)\models C_i\varphi$ iff $(M,t)\models\varphi$ for all $t$ such that $s\sim_C^i t$.

$(M,s)\models E_G\varphi$ iff $(M,s)\models K_i\varphi$ for all $i\in G$.

$(M,s)\models C_G\varphi$ iff $(M,t)\models\varphi$ for all $t$ that are $G$-reachable from $s$.

$(M,s)\models[\alpha]\varphi$ iff for all $W$ such that $(s,W)\in[\alpha]$: $\exists t\in W,(M,t)\models\varphi$.

$(M,s)\models[?\psi]\varphi$ iff $(M,s)\models\psi\Rightarrow\varphi$.

现在我们来讨论知识、信念和肯定性的直观意义. $K_i\varphi$ 意味着不仅 $\varphi$ 是真而且智能体 $i$ 正确地感知了环境. $C_i\varphi$ 的语义捕捉了肯定性"certainty"背后的直观意义:智能体 $i$ 肯定的事实会出现在知识中,因此"John 肯定某件事"等价于"John 肯定自己知道这件事". 信念"belief"背后的直观意义是智能体 $i$ 相信性质 $\varphi$,然而 $\varphi$ 可能是假的. 例如,机器人相信前面有障碍,但前面可能并不存在障碍(机器人的镜头可能有问题).

## 4 CDKBC 证明系统

这一节,我们将讨论 CDKBC 证明系统. 它主要基于动态逻辑[7]、动态认知逻辑[8]、并发逻辑[15]与知识、信念和肯定性逻辑[17].

我们的 CDKBC 证明系统由以下公理和推理规则组成:

A1. 命题演算中的所有永真式.

A2. $(K_i\varphi\wedge K_i(\varphi\Rightarrow\psi))\Rightarrow K_i(\psi)$, $i=1,2,\cdots,n$.

A3. $K_i\varphi\Rightarrow\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

A4. $K_i\varphi\Rightarrow K_iK_i\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

A5. $\neg K_i\varphi\Rightarrow K_i\neg K_i\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

A6. $E_G\varphi\Leftrightarrow\bigwedge_{i\in G}K_i\varphi$.

A7. $C_G\varphi\Rightarrow(\varphi\wedge E_GC_G\varphi)$.

A8. $(B_i\varphi\wedge B_i(\varphi\Rightarrow\psi))\Rightarrow B_i(\psi)$, $i=1,2,\cdots,n$.

A9. $(C_i\varphi\wedge C_i(\varphi\Rightarrow\psi))\Rightarrow C_i(\psi)$, $i=1,2,\cdots,n$.

A10. $C_i\varphi_i\Rightarrow C_iK\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

A11. $C_i\varphi\Rightarrow B_i\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

A12. $[\alpha](\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow([\alpha]\varphi\Rightarrow[\alpha]\psi)$.

A13. $[\alpha](\varphi\wedge\psi)\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)$.

A14. $[?\varphi]\psi\Leftrightarrow(\varphi\Rightarrow\psi)$.

A15. $[\alpha;\beta]\varphi\Leftrightarrow[\alpha][\beta]\varphi$.

A16. $[\alpha\cap\beta]\varphi\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\vee[\beta]\varphi)$.

A17. $[\alpha\cup\beta]\varphi\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\beta]\varphi)$.

A18. $\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi\Leftrightarrow[\alpha^*]\varphi$.

A19. $\varphi\wedge[\alpha^*](\varphi\Rightarrow[\alpha]\varphi)\Rightarrow[\alpha^*]\varphi$.

A20. $K_i[\alpha]\varphi\Rightarrow[\alpha]K_i\varphi$, $i=1,2,\cdots,n$.

R1. 如果 $\varphi$ 和 $\varphi\Rightarrow\psi$ 为真,那么 $\varphi\Rightarrow\psi$ 也为真.

R2. 如果 $\varphi$ 为真,那么 $K_i\varphi\wedge C_i\varphi$ 为真.

R3. 如果 $\varphi\Rightarrow E_G(\psi\wedge\varphi)$ 为真,那么 $\varphi\Rightarrow C_G\psi$ 也为真.

R4. 如果 $\varphi$ 为真,那么 $[\alpha]\varphi$ 也为真.

注意,因为 CDKBC 证明系统包含公理 A11 以及推理规则 R2,所以系统并不需要包含下面推理规则:如果 $\varphi$ 为真,那么 $B_i\varphi$ 为真.

**命题 3.** 对任意公式 $\varphi,\psi\in L_n$,任意模型 $M\in M_n$ 和任意 agent $i$,我们有

(a) $M\models C_i\varphi\Rightarrow B_i\varphi$.

(b) $M\models C_i\varphi_i\Rightarrow C_iK\varphi$.

(c) $M\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)$.

(d) $M\models[\alpha\cap\beta]\varphi\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\vee[\beta]\varphi)$.

(e) $M\models\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi\Leftrightarrow[\alpha^*]\varphi$.

证明.

(a) 假设 $(M,s)\models C_i\varphi$. 由命题 2,对任意 $t\in R_B^i(s)$,我们有 $t\in R_C^i(s)$. 由假设和 $C_i\varphi$ 的语义可得 $(M,t)\models\varphi$. 再根据 $B_i\varphi$ 的语义,我们有 $(M,s)\models B_i\varphi$. 因此如果 $(M,s)\models C_i\varphi$,那么 $(M,s)\models B_i\varphi$. 同理可证如果 $(M,s)\models K_i\varphi$,那么 $(M,s)\models C_i\varphi$.

(b) 假设 $(M,s)\models C_i\varphi$,那么对每一满足 $int^i(t)=env^i(s)$ 的状态 $t$,我们有 $(M,t)\models\varphi$. 要证明 $(M,s)\models C_iK_i\varphi$,我们必须证明,对每一满足 $int^i(u)=env^i(s)$ 的状态 $u$,$(M,u)\models K_i\varphi$ 成立. 而要证明 $(M,u)\models K_i\varphi$ 成立,我们只需证明对每一满足 $int^i(v)=int^i(u)$ 的状态 $v$,$(M,v)\models\varphi$ 成立. 然而,我们从 $int^i(u)=env^i(s)$ 和 $int^i(v)=int^i(u)$ 可以得到 $int^i(v)=env^i(s)$. 因此由 $(M,s)\models C_i\varphi$,可得 $(M,v)\models\varphi$. 这就证明了 $M\models C_i\varphi\Rightarrow C_iK_i\varphi$.

(c) 我们首先证明 $M\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)\Rightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)$. 如果 $M\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)$,那么对所有 $s\in S$,我们有 $(M,s)\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)$. 因此对所有满足条件 $t\in W$ 和 $(s,W)\in[\alpha]$ 的所有状态 $t$,我们有 $(M,t)\models\varphi$ 和 $(M,t)\models\psi$ 成立. 因此,$(M,s)\models[\alpha]\varphi$ 且 $(M,s)\models[\alpha]\psi$. 所以 $M\models[\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi$. 从而 $M\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)\Rightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)$. 同理可证 $M\models([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)\Rightarrow[\alpha](\varphi\wedge\psi)$. 所以 $M\models[\alpha](\varphi\wedge\psi)\Leftrightarrow([\alpha]\varphi\wedge[\alpha]\psi)$.

(d) 假设 $M\models[\alpha\cap\beta]\varphi$，那么对所有 $s\in S$，我们有 $(M,s)\models[\alpha\cap\beta]\varphi$. 因此对所有满足条件 $(s,W)\in[\alpha\cap\beta]$ 的状态集合 $W$，存在状态 $t\in W$，使得 $(M,t)\models\varphi$，这里 $(s,W_1)\in[\alpha]$，$(s,W_2)\in[\beta]$ 且 $W=W_1\cup W_2$. 因此如果 $t\in W_1$，那么 $(M,s)\models[\alpha]\varphi$；如果 $t\in W_2$，那么 $(M,s)\models[\beta]\varphi$. 从而，$(M,s)\models([\alpha]\varphi\vee[\beta]\varphi)$. 所以 $M\models[\alpha\cap\beta]\varphi\Rightarrow([\alpha]\varphi\vee[\beta]\varphi)$. 根据行为的语义，用同样的方法，我们容易证明 $M\models([\alpha]\varphi\vee[\beta]\varphi)\Rightarrow[\alpha\cap\beta]\varphi$.

(e) 假设 $M\models\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi$. 那么对所有 $s\in S$，我们有 $(M,s)\models\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi$. 因此 $(M,s)\models\varphi$ 和 $(M,s)\models[\alpha][\alpha^*]\varphi$ 成立. 再由 $[\alpha^*]$ 的定义，我们有 $(M,s)\models[\alpha^*]\varphi$ 成立. 因此 $(M,s)\models\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi\Rightarrow[\alpha^*]\varphi$，从而 $M\models\varphi\wedge[\alpha][\alpha^*]\varphi\Rightarrow[\alpha^*]\varphi$. 另一方向的证明是容易的. 证毕.

**命题 4.** CDKBC 证明系统关于 $M_n$ 是可靠的(sound).

由命题 3 和文献[3]中的定理 3.3.1，不难获得可靠性的证明.

## 5 完备性(complete)和复杂性

这一节，我们将证明 CDKBC 证明系统的一些基本结果.

### 5.1 完备性

我们的重要结果之一是系统的完备性.

完备性的证明依据文献[7,15,18]的基本思路，首先对 Fischer-Ladner 闭包进行扩展.

5.1.1 Fischer-Ladner 扩展闭包

我们首先给出两个函数 $EFL:\Phi\rightarrow 2^{\Phi}$ 和 $EFL_1:\{[\alpha]\varphi|\alpha\in Act,\varphi\in\Phi\}\rightarrow 2^{\Phi}$ 的定义.

$EFL()$ 归纳定义如下：

(a) $EFL(p)=\{p\}$，$p$ 为原子命题.

(b) $EFL(\neg\varphi)=\{\neg\varphi\}\cup EFL(\varphi)$.

(c) $EFL(\varphi\wedge\psi)=\{\varphi\wedge\psi\}\cup EFL(\varphi)\cup EFL(\psi)$.

(d) $EFL(K_i\varphi)=\{K_i\varphi\}\cup EFL(\varphi)\cup EFL(C_i\varphi)$.

(e) $EFL(B_i\varphi)=\{B_i\varphi\}\cup EFL(\varphi)$.

(f) $EFL(C_G\varphi)=\{C_G\varphi\}\cup EFL(\varphi)\cup EFL(B_i\varphi)$.

(g) $EFL(K_i\varphi)=\{K_i\varphi\}\cup EFL(\varphi)\cup\{K_iC_G\varphi:i\in G\}$.

(h) $EFL([\alpha]\varphi)=EFL_1([\alpha]\varphi)\cup EFL(\varphi)$.

$EFL_1()$ 归纳定义如下：

(a) $EFL_1([\alpha]\varphi)=\{[\alpha]\varphi\}$，$\alpha$ 为原子程序(或行为).

(b) $EFL_1([\alpha\cup\beta]\varphi)=\{[\alpha\cup\beta]\varphi\}\cup EFL_1([\alpha]\varphi)\cup EFL_1([\beta]\varphi)$.

(c) $EFL_1([\alpha\cap\beta]\varphi)=\{[\alpha\cap\beta]\varphi\}\cup EFL_1([\alpha]\varphi)\cup EFL_1([\beta]\varphi)$.

(d) $EFL_1([\alpha;\beta]\varphi)=\{[\alpha;\beta]\varphi\}\cup EFL_1([\alpha][\beta]\varphi)\cup EFL_1([\beta]\varphi)$.

(e) $EFL_1([\alpha^*]\varphi)=\{[\alpha^*]\varphi\}\cup EFL_1([\alpha][\alpha^*]\varphi)$.

(f) $EFL_1([?\psi]\varphi)=\{[?\psi]\varphi\}\cup EFL_1(\psi)$.

对于任何公式 $\varphi$，我们定义 $\varphi$ 的 Fischer-Ladner 扩展闭包为 $EFL(\varphi)$，从 $EFL(\varphi)$ 的定义，我们容易得到以下性质.

**命题 5.** 如果 $\varphi\in L_n$，那么 $\varphi\in EFL(\varphi)$.

5.1.2 模型变换

为了证明系统的完备性，我们先由模型 $M=(S,V,K,B,C,\Lambda)$ 构造出模型 $M'=(S',V',K',B',C',\Lambda')$：

$S'=\{\Gamma|\Gamma$ 是中的最大一致集$\}$；

$V'(\varphi)=\{\Gamma|\varphi\in\Gamma\}$；

$K_i'$ 定义为 $\Gamma\sim^i_{K'},\Delta$ 当且仅当 $\{w|K_iw\in\Gamma\}=\{w|K_iw\in\Delta\}$；$B_i'$，$C_i'$ 类似定义；

$m'(\alpha)=\{(\Gamma,W)|[\alpha]\varphi\in\Gamma,\text{ and }W=\{\Delta|\varphi\in\Delta\}\}$.

给定一个一致公式 $\varphi$，根据 5.1.1 节，我们可以计算其扩展闭包 $EFL(\varphi)$. 定义一个状态集 $S'$ 上的二元关系 $\equiv$：

$u\equiv v$ 定义为 $\forall\psi\in EFL(\varphi)(u\in V'(\psi)\Leftrightarrow v\in V'(\psi))$.

令 $[u]=u/_{EFL(\varphi)}=\{\psi|\psi\in EFL(\varphi),\psi\in u\}$，$E([u])=\{v|v\in S',[v]=[u]\}$，

$[W]=\{[t]|t\in W\}$，$E([W])=\{v|v\in E([t]),t\in W\}$.

我们利用 $EFL(\varphi)$ 可以将模型 $M'$ 简化为

$$M'/_{EFL(\varphi)}=(S'/_{EFL(\varphi)},V'/_{EFL(\varphi)},K'_{EFL(\varphi)},B'/_{EFL(\varphi)},C'/_{EFL(\varphi)},\Lambda'/_{EFL(\varphi)})，$$

其中

$S'/_{EFL(\varphi)}=\{[u]|u\in S'\}$；

$V'/_{EFL(\varphi)}(\psi)=\{[u]|E([u])\cap V'(\psi)\neq\varnothing\}$，这里 $\varnothing$ 表示空集；

$K_i'/_{EFL(\varphi)}$ 定义为 $[u]\sim^i_{K/EFL(\varphi)}[v]$ 当且仅当存在 $t_1\in E([u])$，$t_2\in E([v])$，使得 $t_1\sim^i_K t_2$；

$B_i'/_{EFL(\varphi)}$，$C_i'/_{EFL(\varphi)}$ 的定义类似；

$m'/_{EFL(\varphi)}(\alpha)=\{([u],[W])|\exists v\in E([u],\exists W'\in E([W]$，使得 $(v,W')\in m'(\alpha))$.

与文献[7]类似，我们容易得到下面两个命题.

**命题 6.** 对所有 $\psi\in EFL(\varphi)$，$u\in V'(\psi)$ 当且

仅当$[u]\in V'/_{EFL(\varphi)}(\psi)$.

**命题 7.** 对所有$[\alpha]\psi\in EFL(\varphi)$.

(a) 如果$(u,W)\in m'(\alpha)$，那么$([u],[W])\in m'/_{EFL(\varphi)}(\alpha)$；

(b) 如果$([u],[W])\in m'/_{EFL(\varphi)}(\alpha)$，且$u\in V'/_{EFL(\varphi)}([\alpha]\psi)$，那么$W\subseteq V'/_{EFL(\varphi)}(\psi)$.

由命题 6 和命题 7，我们容易证明小模型定理(Small Model Theroem)，

**定理 1**(Small Model Theroem). 如果$\varphi$在$M_n$中是可满足的，那么存在一个不多于$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC 模型使得$\varphi$关于该模型也是可满足的.

根据文献[18]，要证明系统的完备性，只需证明相应于$M'/_{EFL(\varphi)}$的真值推论(Truth Lemma)，要证真值推论，难点是证明$\varphi$为$\langle\alpha\rangle C_G\psi$的情况(这里$\langle\alpha\rangle$为$[\alpha]$的对偶). 下面讨论证明过程.

我们先定义"好路径".

一条从$\Gamma\in M'/_{EFL(\varphi)}$出发对应$\langle\alpha\rangle C_G\psi$的好路径是$M'/_{EFL(\varphi)}$的满足以下 3 个条件的路径$\Gamma=\Gamma_0\sim_{K_1'}\Gamma_1\sim_{K_2'}\Gamma_2\cdots\sim_{K_n'}\Gamma_n(K_i'\in G,i=1,2,\cdots,n)$：

(1) 存在行为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得$\alpha=\alpha_0\sim_{K_1'}\alpha_1\sim_{K_2'}\alpha_2\cdots\sim_{K_n'}\alpha_n(K_i'\in G,i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $\langle\alpha_i\rangle T\in\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$；

(3) $\langle\alpha_n\rangle\psi\in\Gamma_n$.

与文献[18]类似，对于好路径，下面两个命题成立.

**命题 8.** 设$[\alpha]C_G\psi\in EFL(\varphi)$，如果存在一条从$\Gamma_0$出发对应$\langle\alpha\rangle C_G\psi$的好路径，那么$\langle\alpha\rangle C_G\psi\in\Gamma_0$.

**命题 9.** 如果$\Gamma_0\wedge\langle\alpha\rangle C_G\psi$是一致的，那么存在一条从$\Gamma_0$出发对应$\langle\alpha\rangle C_G\psi$的好路径.

从上面的命题和文献[18]，我们不难推出命题 10.

**命题 10**(Truth Lemma). 设$\varphi$是$L_n$的一个一致公式，对所有$\psi\in EFL(\varphi)$和$\Gamma\in M'/_{EFL(\varphi)}$，$(M'/_{EFL(\varphi)},\Gamma)\models\psi$的充要条件是$\psi\in\Gamma$.

**定理 2**(完备性定理). 对任意$\varphi\in L_n$，如果$\models\varphi$，那么$\vdash\varphi$.

证明. 假设$\vdash\varphi$不成立，那么$\neg\varphi$是一致的，从而$\neg\varphi$一定包含在$L_n$的某个最大一致集$\Gamma$中. 由命题 5 知，$\neg\varphi\in EFL(\neg\varphi)$，因此$\neg\varphi\in[\Gamma]$，再由命题 10 知$(M'/_{EFL(\varphi)},\Gamma)\models\neg\varphi$，与$\models\varphi$矛盾，所以$\vdash\varphi$成立，定理得证. 证毕.

### 5.2 复杂性

**命题 11.** 一个公式$\varphi$关于 CDKBC 模型$M_n$是可满足的当且仅当$\varphi$是$M_n$一致的.

证明. 设$\varphi$关于$M_n$是可满足的. 如果$\varphi$不是$M_n$一致的，那么$\neg\varphi$在$M_n$中是可证的. 由命题 4 知$\neg\varphi$关于$M_n$是有效的，因此$\varphi$关于$M_n$是不可满足的，与前面矛盾，所以$\varphi$是$M_n$一致的，必要条件得证. 下面证明充分性，如果$\varphi$是$M_n$一致的，那么用 5.1 节中同样的方法，我们能证明$\varphi$关于$M_n$是可满足的. 证毕.

**命题 12.** 一个公式$\varphi$关于$M_n$是可满足的的充分必要条件是存在一个最多有$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC模型使得$\varphi$关于该模型是可满足的.

证明. 如果$\varphi$关于$M_n$是可满足的，那么由命题 11，$\varphi$是$M_n$一致公式. 再由定理 1，存在一个最多有$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC 模型使得$\varphi$关于该模型是可满足的. 另一方面，如果存在一个最多有$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC 模型使得$\varphi$关于该模型是可满足的，那么很显然$\varphi$关于$M_n$也是可满足的. 证毕.

现在我们进一步来讨论$M_n$的有效性问题(或者说是 CDKBC 证明系统的可验证性问题).

**命题 13.** $M_n$的有效性问题和 CDKBC 证明系统的可验证性问题是可判定的.

证明. 为了判定$\varphi$是否在 CDKBC 证明系统中可证，我们仅仅需要检查$\neg\varphi$是否是$M_n$一致公式. 下面讨论如何检查$\neg\varphi$是否是$M_n$一致公式.

由命题 11、命题 12 和定理 1，$\neg\varphi$是$M_n$一致公式的充分必要条件是存在一个最多有$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC 模型使得$\neg\varphi$关于该模型是可满足的. 因此我们可以构造出所有最多有$2^{|\varphi|}$个状态的 CDKBC 模型，注意这些模型的数量是有限的，然后我们可以检查$\neg\varphi$是否在这些模型中的某个状态为真，即$\neg\varphi$关于这些模型是否是可满足的. 从而可以检查$\neg\varphi$是否是$M_n$一致公式，也就可以判定$\varphi$在 CDKBC 证明系统中是否可证. 因此 CDKBC 证明系统的可验证性问题是可判定的. 定理得证. 证毕.

**命题 14.** CDKBC 证明系统的可验证性问题是 EXPTIME 完全的.

证明. Fisher 和 Ladner 已经证明了对应 PDL(Propositional Dynamic Logic)的证明系统的可验证性问题是 EXPTIME 完全的. 而 PDL 是 CDKBC逻辑的一部分，所以不难证明 CDKBC 证明系统的可验证性问题也是 EXPTIME 完全的.

## 6 实 例

这一节，我们给出一个应用 CDKBC 逻辑的

实例.

我们考虑图 1 描述的场景：有 4 个房间，右下角房间是脏的，其它房间是干净的. 假设有两个机器人，机器人 1 位于左上角，机器人 2 位于右上角，两个机器人能够水平或垂直从一个房间移到另一个相邻房间. 但机器人辨别方向的传感器受损，因此他们可能对自己的位置产生不正确的判定. 例如，假设一个机器人垂直移动，从房间(0,0)移到房间(0,1)，但它可能认为自己是水平移动到房间(1,0)，因此机器人可能混淆房间(0,1)和房间(1,0). 同样，他们也可能混淆房间(0,0)和房间(1,1). 系统的全局状态可以表述为

$$((x_{1e},y_{1e}),z_1,(x_{2e},y_{2e}),z_2,(x_1,y_1),Z_1,(x_2,y_2),Z_2),$$

这里 $x_{1e},y_{1e},z_1,x_{2e},y_{2e},z_2,x_1,y_1,Z_1,x_2,y_2,Z_2$ 是 Boolean 变量，$(x_{1e},y_{1e})$和$(x_{2e},y_{2e})$分别表示机器人 1 和机器人 2 所处的房间. $z_1$ 和 $z_2$ 分别表示机器人 1 和机器人 2 所处的房间是否为脏. $(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$分别表示机器人 1 和机器人 2 对所处房间的判定. $Z_1$ 和 $Z_2$ 分别表示机器人 1 和机器人 2 对环境的不可视部分 $z_1$ 和 $z_2$ 的判定.

| | |
|---|---|
| (0,0), clean | (1,0), clean |
| (0,1), clean | (1,1), dirty |

图 1　具有 4 个房间的场景(其中 3 个房间是干净的，1 个房间是脏的)

根据上述讨论，我们有以下几个约束条件：

(1) $x_{1e}\wedge y_{1e}\Leftrightarrow z_1$ 和 $x_{2e}\wedge y_{2e}\Leftrightarrow z_2$ 成立，这是为了保证仅仅房间(1,1)是脏的.

(2) $(x_{1e}\Leftrightarrow y_{1e})\Leftrightarrow(x_1\Leftrightarrow y_1)$ 和 $(x_{2e}\Leftrightarrow y_{2e})\Leftrightarrow(x_2\Leftrightarrow y_2)$成立，这意味着机器人能够辨别两个相邻的房间.

假设 $\Phi$ 是原子命题集合(描述系统的基本事实)，$ACT$ 是机器人从一个房间移动到另一房间的所有行为的集合. 机器人 1 左移、右移、上移、下移一个房间的行为分别用 $a_{11}$、$a_{12}$、$a_{13}$ 和 $a_{14}$ 表示. 同样机器人 2 左移、右移、上移、下移一个房间的行为分别用 $a_{21}$、$a_{22}$、$a_{23}$ 和 $a_{24}$ 表示. 因此 $ACT$ 由 8 个行为组成. 在这个例子中，$\{p,q\}$ 可以看作原子命题集 $\Phi$，其中 $p$ 表示两个机器人是否站在同一房间，$q$ 表示机器人 1 所处房间是否是脏. 因此对环境状态 $s_{env}=((1,0),0,(1,0),0)$，我们自然可以定义 $\pi(s_{env})(p)=\text{true}$ 和 $\pi(s_{env})(q)=\text{false}$. 我们假定系统的目标是两个机器人进入同一个房间，而且这个房间是脏的，以便两个机器人清洁该房间(一个机器人拿着扫把，另一个机器人拿着拖把). 更详细地说，两个机器人同时移动，经过若干次移动后，达到同一个脏房间，它们肯定自己在这同一房间，而且相信这个房间是脏的. 这个目标可以描述为

$$((a_{11}\cup a_{12}\cup a_{13}\cup a_{14})\parallel(a_{21}\cup a_{22}\cup a_{23}\cup a_{24}))*(p\wedge q\wedge C_1(p\wedge q)\wedge C_2(p\wedge q)\wedge B_1(p\wedge q)\wedge B_2(p\wedge q)).$$

## 7　结束语

本文在研究知识、信念和肯定性以及并发行为的基础上，提出了多智能体系统中并发动态知识、信念和肯定性逻辑，也构造了一个相应的证明系统，并且证明了该系统是可靠的和完备的以及系统的有效性问题是 EXPTIME 完全的.

我们提出的逻辑与文献[2,16-17]中的逻辑相比有以下几个优点：

(1) 从单个智能体扩展到多智能体系统；

(2) 与并发行为结合，能表达并发的语义；

(3) 能表述公共知识与信念的关系；

(4) 逻辑具有动态特性.

因此我们提出的逻辑具有更强的描述能力.

## 参　考　文　献


[1] Hintikka J. Knowledge and Belief. Ithaca, NY: Cornell University Press, 1962

[2] Lenzen W. Recent work in epistemic logic. Acta Philosophica Fennica, 1978, 30(1): 1-219

[3] Fagin R, Halpern J, Moss Y, Vardi M. Reasoning About Knowledge. Cambridge, MA: MIT Press, 1995

[4] Meyer J, van der Hoek W. Epistemic Logic for AI and Computer Science. Cambridge Tracts in theoretical Computer Science 41. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

[5] Aumann R, Brandenburger A. Epistemic conditions for Nash equilibrium. Econometrica, 1995, 63(3): 1161-1180

[6] Fisher M J, Ladner R E. Propositional dynamic logic of regular programs. Journal of Computer and System Science, 1977, 18(2): 194-211

[7] Harel D, Kozen D, Tiuryn J. Dynamic Logic. Cambridge, MA: MIT Press, 2000

[8] van Ditmarsch Hans, van der Hoek Wiebe, Kooi Barteld. Dynamic epistemic logic with assignment//Proceedings of the 4th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems. New York: ACM, 2005, 1: 141-148

[9] Plaza J. Logics of public communications//Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologics for Intelligent System, 1989: 201-216

[10] Gerbrandy J. Bisimulation on planet Kripke[Ph. D. dissertation]. University of Amsterdam, Netherlands, 1999

[11] van Bentem J. Logics of information update//Proceedings of TARK VIII. Los Altos, 2001: 51-88

[12] van Ditmarsch H. Description of game actions. Journal of Logic, Language and Information, 2002, 11(3): 349-365

[13] Peleg David. Concurrent dynamic logic. Journal of the ACM, 1987, 34(2): 450-479

[14] Peleg David. Communication in concurrent dynamic logic. Journal of Computer and System Sciences, 1987, 35(1): 23-58

[15] van Ditmarsch H, van der Hoke W, Kooi B. Concurrent dynamic epistemic logic for MAS. Knowledge Contributors, 2003, 32(5): 45-82

[16] Lamarre P, Shoham Y. Knowledge, certainty, belief, and conditionalisation//Proceedings of the KR'94. San Francisco, USA, 1994: 415-424

[17] Su Kaile, Sattar Abdul et al. A computational grounded logic of knowledge, belief and certainty//Proceedings of the AAMAS. Utrecht, Netherlands, 2005: 149-156

[18] Baltag A, Moss L, Solecki S. The logic of public announcements, common knowledge and private suspicions//Proceedings of the TARK'98. Illinois, USA, 1998: 43-56

**SU Jin-Shu**, born in 1962, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests focus on network security.

**WU Li-Jun**, born in 1965, Ph. D., associate professor. His main research interests include formal methods and artificial intelligence.

**YANG Zhi-Hua**, born in 1964, Ph. D., lecturer. His main research interests include digital signal analysis, pattern recognition and information security.

**Background**

Modal logic has been proved to be a good tool for the formal representation of properties in systems or programs, such as knowledge, belief and many other mental attitudes. Since 1962, a special kind of modal logics called epistemic logic and belief logic were introduced and have been investigated widely in philosophy, computer science, artificial intelligence, and game theory. However, these logics can not describe the change of knowledge and of beliefs although their static counterparts provide wonderful ways to formalize systems.

In 1979, Fisher and Ladner proposed the idea of dynamic logic. Following this idea, researchers proposed and investigated the propositional dynamic logic, the first-order dynamic logic, dynamic epistemic logic, concurrent dynamic logic, and concurrent dynamic epistemic logic. Though these logics can express the dynamic properties of knowledge, belief and certainty, they just consider the combination of dynamic logic and one-dimension modal logics instead of multi-dimension modal ones, which has more expressive power.

The notion of knowledge, belief and certainty was first introduced by Lenzen. He listed many syntactic properties of the notion for knowledge, belief and certainty, but he did not give any their semantics. Kaile Su presented a computationally grounded logic of knowledge, belief and certainty. Lamarre and Shoham provided a model theory of knowledge, belief and certainty, but they rejected S5. However the above logics are just for one agent and did not consider the concurrent and dynamic properties of knowledge, belief and certainty.

This paper aims to develop a concurrent dynamic logic of knowledge, belief and certainty for MAS (Multi-Agent System), and presents the proof system and then show its soundness and completeness.

The research is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 90604006 and No. 60496327) and Postdoctor Foundation of China (No. 20070410978).