

# 基于一致分布的时间 Petri 网模型

潘 理<sup>1,2)</sup> 丁志军<sup>2)</sup> 陈 刚<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(湖南理工学院信息与通信工程学院 湖南 岳阳 414006)

<sup>2)</sup>(同济大学计算机科学与技术系 上海 200092)

**摘 要** 时间 Petri 网的现有分析理论主要关注基于区间端点的计算和推理,缺乏对实施区间内不确定性的定量描述,不利于时间 Petri 网进行系统性能评价和动态模拟实现.为了解决这一问题,提出基于一致分布的时间 Petri 网模型.首先给出变迁实施概率和变迁序列实施概率的计算方法;然后引入概率条件到状态类,用于构造时间 Petri 网的概率可达类树;最后给出动态模拟实验,检验理论方法的正确性.

**关键词** 时间 Petri 网;一致分布;实施概率;状态类方法;模拟

中图法分类号 TP301

DOI 号: 10.3724/SP.J.1016.2010.00900

## A Time Petri Net Model Based on Uniform Distribution

PAN Li<sup>1,2)</sup> DING Zhi-Jun<sup>2)</sup> CHEN Gang<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Information and Communication Engineering, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang, Hunan 414006)

<sup>2)</sup>(Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 200092)

**Abstract** In time Petri nets, the existing methods for the analysis of timed properties focus on the computation and reasoning about the endpoints of intervals, and are lack of concerns with the quantitative analysis of the uncertainty in intervals which is critical to the evaluation of system performance and the implementation of dynamical simulation. This paper proposes a time Petri net model based on uniform distribution to efficiently address the problem. First, an approach is presented for calculating firing probabilities of transitions and transition sequences under uniform distribution. Then the probability conditions are introduced into state classes to build a probabilistic reachability class tree. Some experimental simulation results of a time Petri net are given to verify the correctness of the method.

**Keywords** time Petri nets; uniform distribution; firing probability; state class method; simulation

## 1 引 言

将时间约束引入 Petri 网是应用驱动的结果.当我们处理以系统性能或可靠性为设计目标的实时应用时,时间将显得尤为重要<sup>[1]</sup>.时间约束可以引入到库所、变迁、弧和令牌<sup>[2-5]</sup>,其中引入到变迁是一种

常见的扩展方式.联系到变迁上的时间也有多种形式,其中时延 Petri 网(timed Petri nets)赋给每个变迁一个固定的延时<sup>[6]</sup>;时间 Petri 网(time Petri nets)为每个变迁联系一个时间间隔<sup>[2]</sup>;而随机 Petri 网(stochastic Petri nets)则使用服从某种概率模型的随机变量来描述实施时间<sup>[3,7]</sup>.已经证明,时间间隔比固定延时具有更强的表达能力<sup>[8]</sup>,因为间隔既

收稿日期:2009-10-14;最终修改稿收到日期:2010-03-25.本课题得到国家自然科学基金-青年科学基金项目(60803032)资助.潘 理,男,1975 年生,博士,讲师,主要研究方向为 Petri 网、工作流. E-mail: panli\_hnist@gmail.com. 丁志军(通信作者),男,1974 年生,博士,副教授,主要研究方向为 Petri 网、服务计算等. E-mail: zhijun\_ding@hotmail.com. 陈 刚,男,1981 年生,博士研究生,主要研究方向为数据挖掘、图像处理.

能反映事件发生的不确定性,又能刻画事件发生的时限性.时间 Petri 网已成为描述和验证实时系统最常用的形式模型之一.

时间间隔虽然增加了时间 Petri 网的描述能力,但同时也增大了模型分析的困难程度.由于每个变迁的实施间隔包含着无穷多个可能的实施时间点,因此时间 Petri 网的状态空间通常是无限的.这就需要一种有限的结构来描述这种无限的状态空间.状态类方法应运而生,并已成为分析和验证模型时间性质的基本方法<sup>[8-10]</sup>.特别值得一提的是,清华大学林闯教授提出一种不确定时段的扩展时段时序逻辑(EITL),给出了一套基于时间 Petri 网模型的推理机制,能在线性时间复杂度内定量计算各变迁之间的时序逻辑关系,是一种简洁、直观、高效的时段推理方法<sup>[11-12]</sup>.

在大多数实际情况下,由于实时系统的离散特性和外界许多不确定因素的影响,一个事件持续的时间并不能预先确定下来,但是事件结束的时间范围多数可以预测<sup>[11]</sup>.这时候,使用时间 Petri 网来建模和分析这些系统将是一个合适的选择.然而,当我们进一步需要预测事件发生的概率时,或者需要模拟事件的动态行为时,仅仅使用区间端点来处理问题显然是不够的.这将迫使我们考虑如何在实施区间内假定一种合理的概率分布来分析这些问题.例如,某学生通常采用两种方式上学:(1)直接步行,需用时 30~40min;(2)搭乘公交,需步行到公交车站、乘坐公交车、下车步行到学校,分别用时 4~6min,22~30min,4~5min.如果我们想知道哪种方式更有可能更快地到达学校,那么就要认真考虑在时间区段内选取合适的概率分布来计算了.

目前,时间 Petri 网的现有理论成果主要集中在基于区间端点的分析和推理,对时间区段内不确定性的刻画并没有展开实质性研究.例如,实施区间是否遵循一定的概率分布?如何模拟事件在区间内的动态行为?这些问题将关系到所建模型是否符合实际系统的需要,关系到模型性能指标的计算以及模型动态模拟的实现等等.本文的研究正是致力于这些问题的解决.文章初步选取一个基于区间的常用概率模型(一致分布模型)作为研究对象,假设时间 Petri 网的变迁实施时间在其实施区间上遵循一致分布.在此基础之上,围绕变迁实施概率计算、状态类方法以及动态模拟等一系列问题展开深入的研究,总结出一套切实可行的理论计算方法,并利用仿真实验验证理论方法的正确性.

本文第 2 节给出一致分布和时间 Petri 网的基本定义;第 3 节提出基于一致分布的时间 Petri 网模型,给出变迁实施概率、变迁序列实施概率和概率可达类树计算方法;第 4 节设计基于一致分布的实验方案,对时间 Petri 网进行动态模拟仿真;最后一节总结本文.

## 2 基本定义

### 2.1 一致分布

假设  $N$  是自然数集(包括 0), $R$  是实数集, $R^+$  是非负实数集.定义实数闭区间  $I = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ ,记为  $I = [a, b]$ ,这里  $a, b \in R$  且  $a \leq b$ .

在概率论中,连续一致分布是一类常见的概率分布.设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \vee x > b \end{cases},$$

则称  $X$  服从参数为  $a, b$  的一致分布,记作  $X \sim U(a, b)$ .其相应的累计分布函数为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$$

若  $X \sim U(a, b)$ ,  $Y \sim U(c, d)$ , 且  $X, Y$  相互独立,则  $(X, Y)$  的联合分布函数  $F(x, y)$  为

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dudv,$$

其中,  $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$  是  $(X, Y)$  的联合密度函数.

### 2.2 时间 Petri 网

用  $IR (IR^+)$  表示所有(非负)实数闭区间的集合.设  $I, I_1, I_2 \in IR$ , 且  $I = [a, b]$ , 定义闭区间的一元和二元运算如下:(1)  $\downarrow I = a, \uparrow I = b$ ;(2)  $|I| = \uparrow I - \downarrow I$ ;(3)  $I_1 + I_2 = [\downarrow I_1 + \downarrow I_2, \uparrow I_1 + \uparrow I_2]$ ;(4)  $I_1 - I_2 = [\downarrow I_1 - \uparrow I_2, \uparrow I_1 - \downarrow I_2]$ ;(5) 若  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ , 则  $I_1 \cap I_2 = [\max\{\downarrow I_1, \downarrow I_2\}, \min\{\uparrow I_1, \uparrow I_2\}]$ .

**定义 1**<sup>[8]</sup>. 一个时间 Petri 网是一个六元组  $TPN = (P, T, Pre, Post, M_0; SI)$ , 其中:

- (1)  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  是有穷、非空的位置集;
- (2)  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  是有穷、非空的变迁集;
- (3)  $Pre: P \times T \rightarrow N$  是向前关联矩阵;
- (4)  $Post: P \times T \rightarrow N$  是向后关联矩阵;
- (5)  $M_0: P \rightarrow N$  是初始标识;

(6)  $SI: T \rightarrow IR^+$  是变迁的静态实施间隔映射函数. 对  $\forall t \in T, SI(t)$  表示变迁  $t$  的静态实施间隔.

$Pre(p, t) = i (i > 0)$  当且仅当存在一条从库所  $p$  到变迁  $t$  的权值为  $i$  的弧;  $Pre(p, t) = 0$  当且仅当不存在从库所  $p$  到变迁  $t$  的弧. 用  $Pre(t) \in N^P$  表示  $t$  的输入库所多重集, 即对应向前关联函数  $Pre$  中  $t$  列所对应的向量. 用  $\cdot t = \{p \mid Pre(p, t) > 0\}$  表示变迁  $t$  的输入库所集合,  $p \cdot = \{t \mid Pre(p, t) > 0\}$  表示库所  $p$  的输出变迁集合. 类似地, 可以定义  $Post(p, t), Post(t), t \cdot$  和  $p \cdot$ .

Petri 网的标识  $M$  可表示为一个  $|P|$  维向量, 其中第  $i$  个元素  $M(p_i)$  表示库所  $p_i$  中的令牌数. 因此标识反映资源在库所集中的分布情况.

**定义 2**<sup>[13]</sup>. 如果  $Pre(t) \leq M$ , 则称变迁  $t \in T$  在标识  $M$  是使能的(enabled). 如果变迁  $t$  在标识  $M$  是使能的, 那么  $t$  可以实施(fire)并产生一个新的后继标识  $M'$ , 且  $M' = M - Pre(t) + Post(t)$ .

用  $En(M)$  表示标识  $M$  的所有使能变迁的集合. 用  $Newly(M, t_f)$  表示在标识  $M$  实施  $t_f$  后新使能的所有变迁的集合, 即  $Newly(M, t_f) = \{t \in T \mid (t \in En(M')) \wedge ((t \notin En(M - Pre(t_f))) \vee (t = t_f))\}$ , 这里  $M' = M - Pre(t_f) + Post(t_f)$ . 注意  $Newly(M, t_f)$  的定义采用了中间语义<sup>[14]</sup>, 即在新标识  $M'$  使能且在中间标识  $(M - Pre(t_f))$  不使能的变迁属于新使能变迁; 或者变迁  $t_f$  在它自己实施后仍然使能, 亦看作新使能变迁. 用  $d_M(t) = \min\{M(p) / Pre(p, t) \mid p \in \cdot t\}$  表示变迁  $t$  的使能度. 若  $d_M(t) \geq 2$ , 则称变迁  $t$  在标识  $M$  是多重使能的<sup>[15]</sup>. 为了简化问题的处理, 本文不考虑变迁的多重使能.

时间 Petri 网的状态通常采用两种表示方法: 时钟方法<sup>[5, 16]</sup> 和间隔方法<sup>[8-9]</sup>. 时钟方法给每个使能变迁联系一个时钟, 用来记录该变迁最近一次的持续使能的时间. 间隔方法给每个使能变迁联系一个动态实施间隔, 用来表示该变迁相对于当前状态的所有可能的实施时间. 本文使用间隔方法.

**定义 3**<sup>[8]</sup>. 一个时间 Petri 网的状态是一个二元组  $s = (M, f)$ , 其中

- (1)  $M \in N^P$  是标识;
- (2)  $f: T \rightarrow IR$  是一个动态实施间隔函数.  $\forall t \in T, f(t)$  表示  $t$  相对于当前状态的实施时间间隔.

时间 Petri 网的初始状态  $s_0 = (M_0, f_0)$  定义如下:

- (1)  $M_0$  是初始标识;
- (2)  $\forall t \in En(M_0), f_0(t) = SI(t)$ .

时间 Petri 网的形式语义可以使用时间变迁系统(Timed Transition System)来刻画.

**定义 4**<sup>[5]</sup>. 一个时间变迁系统是一个四元组  $TTS = (S, S_0, \Sigma, \rightarrow)$ , 其中

- (1)  $S$  是状态集;
- (2)  $S_0 \subseteq S$  是初始状态集;
- (3)  $\Sigma$  是描述时间事件的标号集;
- (4)  $\rightarrow \subseteq S \times \Sigma \times S$  表示状态转移关系.

在时间 Petri 网中, 当一个变迁开始使能, 该变迁就被赋予一个动态实施间隔, 其初值为它的静态实施间隔. 动态实施间隔随着时间的流逝同步减小. 当动态实施间隔的下界到达 0 时, 变迁可以实施. 一旦动态实施间隔的上界减小到 0, 该变迁必须实施(即强语义). 变迁实施不计时间.

**定义 5.** 一个时间 Petri 网  $TPN = (P, T, Pre, Post, M_0; SI)$  的形式语义定义为一个时间变迁系统  $TTS = (S, S_0, \Sigma, \rightarrow)$ , 且使得

- (1)  $S \subseteq N^P \times (IR^+)^T$  是 TPN 的状态集;
- (2)  $S_0 = \{s_0\}$  是 TPN 的初始状态集;
- (3)  $\Sigma = T \times R^+$  是时间变迁标号集;
- (4)  $\rightarrow \subseteq S \times \Sigma \times S$  是状态转移关系, 且使得

$\forall d \in R^+, \forall t_f \in T,$

$(M, f) \xrightarrow{(t_f, d)} (M', f') \text{ iff}$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_f \in En(M), \\ \downarrow f(t_f) \leq d \leq \uparrow f(t_f), \\ \forall t \in En(M), d \leq \uparrow f(t) \\ M' = M - Pre(t_f) + Post(t_f) \\ \forall t \in En(M'), \\ f'(t) = \begin{cases} SI(t), & t \in Newly(M, t_f) \\ [\max(0, \downarrow f(t) - d), \uparrow f(t) - d], \text{o.w.} \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \\ \text{(d)} \\ \text{(e)} \end{array}$$

状态转移是指从状态  $s$  流逝一段时间  $d$ , 然后实施变迁  $t_f$  到达另一个状态  $s'$ . 状态转移关系(a)表明  $t_f$  在  $M$  使能; (b) 保证流逝时间  $d$  位于  $t_f$  的动态实施间隔内; (c) 确保  $d$  不超过所有使能变迁的实施时间上界; (d) 计算新状态的标识; (e) 计算新状态下使能变迁的动态实施间隔.

## 3 基于一致分布的时间 Petri 网模型

### 3.1 变迁实施概率

假设时间 Petri 网中每个变迁的实施时间遵循一致分布. 用  $X_1, X_2, \dots, X_n$  分别表示变迁  $t_1, t_2, \dots, t_n$  的实施时间随机变量. 如果使能变迁  $t_i$  在时刻  $\tau$  开

始使能,那么它的实施时间一定落在  $\tau + SI(t_i)$  区间内. 因此,变迁  $t_i$  的概率密度函数为

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{|SI(t_i)|}, & x_i \in \tau + SI(t_i) \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

假设  $t_i$  和  $t_j$  是两个使能变迁,它们的实施时间间隔分别为  $[a_i, b_i]$  和  $[a_j, b_j]$ ,则优先实施  $t_i$  的概率为

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{x_i}^{b_j} \int_{a_i}^{b_i} f_{X_i}(x_i) \cdot f_{X_j}(x_j) dx_i dx_j.$$

如图 1 所示,对于上述二重积分,可以分区段讨论如下:

(1) 若  $b_i \leq a_j$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j = 1.$$

(2) 若  $b_j \leq a_i$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{x_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j = 0.$$

(3) 若  $a_i \leq a_j \leq b_i \leq b_j$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{a_j} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i + \int_{a_j}^{b_i} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{x_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j.$$

(4) 若  $a_j \leq a_i \leq b_j \leq b_i$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{x_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j.$$

(5) 若  $a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{a_j} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i + \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{x_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j.$$

(6) 若  $a_j \leq a_i \leq b_i \leq b_j$ , 则

$$Pr(X_i \leq X_j) = \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i \int_{x_i}^{b_j} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j.$$

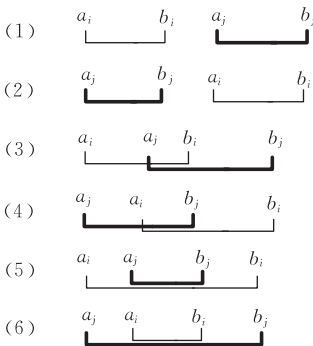


图 1 积分区间分段的 6 种情况

用  $Pr_0(t_i)$  表示在状态  $s_0$  实施变迁  $t$  的概率. 我们推广到  $n$  个使能变迁的情况. 假设  $t_1, \dots, t_n$  是状态  $s_0$  的  $n$  个使能变迁,则在状态  $s_0$  实施  $t_i$  的概率为

$$Pr_0(t_i) = Pr(X_i \leq X_1, \dots, X_i \leq X_n) =$$

$$\int_{a_i}^{b_i} f_{X_i}(x_i) dx_i \int_{x_i}^{b_1} f_{X_1}(x_1) dx_1 \cdots \int_{x_i}^{b_{i-1}} f_{X_{i-1}}(x_{i-1}) dx_{i-1} \int_{x_i}^{b_{i+1}} f_{X_{i+1}}(x_{i+1}) dx_{i+1} \cdots \int_{x_i}^{b_n} f_{X_n}(x_n) dx_n.$$

在积分计算的时候,要注意考虑积分区间分段的情况. 以图 2 所示时间 Petri 网为例,在初始状态  $s_0$  有 3 个使能变迁  $t_1, t_2$  和  $t_3$ ,它们在  $s_0$  的实施概率  $Pr_0(t_1), Pr_0(t_2), Pr_0(t_3)$  分别计算如下:

$$Pr_0(t_1) = 0,$$

$$Pr_0(t_2) = \int_1^2 \frac{1}{6} dx_2 + \int_2^4 \frac{1}{6} dx_2 \int_{x_2}^4 \frac{1}{2} dx_3 = \frac{1}{3},$$

$$Pr_0(t_3) = \int_2^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_4^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 = \frac{2}{3}.$$

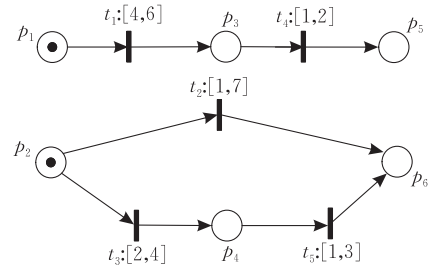


图 2 一个简单的 TPN 模型

值得一提的是,在传统时间 Petri 网中,  $t_1$  和  $t_3$  可以在时刻 4 同时发生. 但是,在一致分布的时间 Petri 网中,  $t_1$  和  $t_3$  在两个端点处取值的概率为 0. 所以  $t_3$  总是在  $t_1$  之前实施.

### 3.2 变迁序列实施概率

**定义 6**<sup>[13]</sup>. 一个变迁序列  $\sigma$  是变迁集  $T$  上一个有限(或无限)的字符串. 包含 0 个字符的序列称为空序列. 一个序列  $w$  称为  $\sigma$  的前缀, 当且仅当存在一个序列  $v$  使得  $\sigma = wv$ .

用  $Pr(\sigma)$  表示变迁序列  $\sigma$  的实施概率. 不妨设序列  $\sigma$  的最后一个变迁为  $t_r$ . 从初始状态开始实施序列  $\sigma$  之后所有使能变迁的集合用  $Enabled(\sigma)$  表示. 假设  $t_i \in Enabled(\sigma)$ , 则  $Pr(\sigma t_i)$  的积分公式可以通过修改  $Pr(\sigma)$  积分公式获得. 具体计算方法如下:

(a) 对于  $t_i$ , 若  $t_i$  是新使能变迁, 则在  $Pr(\sigma)$  的积分公式中增加一重积分:

$$\int_{x_r + \downarrow SI(t_i)}^{x_r + \uparrow SI(t_i)} \frac{1}{|SI(t_i)|} dx_i.$$

(b) 对于  $t_j \neq t_i$ , 若  $t_j \in Enabled(\sigma)$  是新使能变迁, 则在  $Pr(\sigma)$  的积分公式中增加一重积分:

$$\int_{x_i}^{x_i+\uparrow SI(t_j)} \frac{1}{|SI(t_j)|} dx_j.$$

(c) 对于  $t_j \neq t_i$ , 若  $t_j \in Enabled(\sigma)$  是继续使能变迁, 则修改  $Pr(\sigma)$  中关于  $t_j$  的积分项下限为  $x_i$ .

(d) 除上述 3 种情况之外, 不修改  $Pr(\sigma)$  中的积分项.

计算多重积分同样需要注意区间分段问题. 我们仍以图 2 中时间 Petri 网为例, 计算  $Pr(t_3 t_1 t_5)$  的实施概率.

首先计算  $Pr(t_3)$ . 对于第一个实施变迁, 采用 3.1 节介绍的方法计算.

$$Pr(t_3) = Pr_0(t_3) = \int_2^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_4^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 = \frac{2}{3}.$$

接下来计算  $Pr(t_3 t_1)$ . 根据上述方法, 通过修改  $Pr(t_3)$  的积分公式, 得到  $Pr(t_3 t_1)$  积分公式如下:

$$Pr(t_3 t_1) = \int_2^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5,$$

其中  $t_5$  为新使能变迁,  $t_1$  为继续使能变迁. 这里需要对  $Pr(t_3 t_1)$  进行分段计算:

(a) 当  $x_3 \in [2, 3]$ , 则

$$\int_2^3 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 = \frac{41}{384}.$$

(b) 当  $x_3 \in [3, 4]$ , 则

$$\int_2^3 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^{x_3+1} \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_3+1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 + \int_3^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_{x_3+1}^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 = \frac{235}{1152},$$

$$\text{故 } Pr(t_3 t_1) = \frac{41}{384} + \frac{235}{1152} = \frac{179}{576}.$$

最后计算  $Pr(t_3 t_1 t_5)$ . 通过修改  $Pr(t_3 t_1)$  积分公式, 得到  $Pr(t_3 t_1 t_5)$  的积分公式

$$Pr(t_3 t_1 t_5) = \int_2^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_5}^{x_1+2} dx_4,$$

其中  $t_4$  是新使能变迁,  $t_5$  是继续使能变迁. 再对  $Pr(t_3 t_1 t_5)$  分区段进行计算:

(a) 当  $x_3 \in [2, 3]$  且  $x_1 \in [4, x_3+2]$ , 则

$$\int_2^3 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^{x_3+2} \frac{1}{2} dx_1 \left( \int_{x_1}^{x_1+1} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_1+1}^{x_1+2} dx_4 + \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_5}^{x_1+2} dx_4 \right) = \frac{9}{160}.$$

(b) 当  $x_3 \in [2, 3]$  且  $x_1 \in [x_3+2, x_3+3]$ , 则

$$\int_2^3 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_{x_3+2}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_1+1}^{x_1+2} dx_4 = \frac{3}{64}.$$

(c) 当  $x_3 \in [3, 4]$  且  $x_1 \in [4, x_3+1]$ , 则

$$\int_3^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_4^{x_3+1} \frac{1}{2} dx_1 \left( \int_{x_3+1}^{x_1+1} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_1+1}^{x_1+2} dx_4 + \int_{x_1+1}^{x_1+2} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_5}^{x_1+2} dx_4 \right) = \frac{47}{1152}.$$

$$\int_{x_1+1}^{x_1+2} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_5}^{x_1+2} dx_4) = \frac{47}{1152}.$$

(d) 当  $x_3 \in [3, 4]$  且  $x_1 \in [x_3+1, x_3+2]$ , 则

$$\int_3^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_{x_3+1}^{x_3+2} \frac{1}{2} dx_1 \left( \int_{x_1}^{x_1+1} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_1+1}^{x_1+2} dx_4 + \int_{x_1+1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_5}^{x_1+2} dx_4 \right) = \frac{7}{72}.$$

(e) 当  $x_3 \in [3, 4]$  且  $x_1 \in [x_3+2, 6]$ , 则

$$\int_3^4 \frac{1}{2} dx_3 \int_{x_3}^7 \frac{1}{6} dx_2 \int_{x_3+2}^6 \frac{1}{2} dx_1 \int_{x_1}^{x_3+3} \frac{1}{2} dx_5 \int_{x_1+1}^{x_1+2} dx_4 = \frac{3}{64}.$$

对(a)~(e)项求和, 我们得到

$$Pr(t_3 t_1 t_5) = \frac{9}{160} + \frac{3}{64} + \frac{47}{1152} + \frac{7}{72} + \frac{29}{1152} = \frac{767}{2880}.$$

### 3.3 概率可达类树

这一节我们讨论概率可达类树的生成方法. 由于时间域的密度性, 时间 Petri 网的可达性分析通常采用状态类方法. 一个状态类是一个聚合的伪状态, 它代表从初始状态出发实施相同变迁序列所能到达的全部状态<sup>[8]</sup>. 本文借鉴文献[8-9]中提出的状态类方法, 将概率条件引入状态类, 形成基于一致分布的时间 Petri 网状态类方法.

**定义 7.** 一个时间 Petri 网的状态类是一个三元组  $C = (M, D, K)$ , 其中

(1)  $M: P \rightarrow N$  是标识;

(2)  $D: T \times T \rightarrow IR$  是实施域.  $\forall t_i, t_j \in En(M)$ ,  $D(t_i, t_j)$  代表变迁  $t_j$  相对于变迁  $t_i$  的实施时间间隔. 特别地, 令  $D(t_i, t_i) = 0$ .

(3)  $K: T \rightarrow [0, 1]$  是概率域.  $\forall t_i \in En(M)$ ,  $K(t_i)$  表示变迁  $t_i$  在状态类  $C$  的实施概率.

**定义 8.** 初始状态类  $C_0 = (M_0, D_0, K_0)$  定义如下:

(1)  $M_0$  是初始标识;

(2)  $\forall t_i, t_j \in En(M_0)$ ,  $D_0(t_i, t_j) = SI(t_j) - SI(t_i)$  且  $D_0(t_i, t_i) = 0$ .

(3)  $\forall t_i \in En(M_0)$ ,  $K_0(t_i) = Pr_0(t_i)$ .

接下来定义状态类的演化条件和规则.

**定义 9(可实施条件).** 一个变迁  $t_f \in En(M_k)$  在状态类  $C_k = (M_k, D_k, K_k)$  是可实施的 (firable) 当且仅当  $\forall t_i \in En(M_k)$ ,  $\downarrow D_k(t_i, t_f) \leq 0$  且  $K_k(t_f) > 0$ .

用  $Fr(C)$  表示状态类  $C$  的所有可实施变迁的集合.

**定义 10(实施规则).** 假设从初始状态类  $C_0 = (M_0, D_0, K_0)$  通过实施变迁序列  $\sigma = t_{r_1} t_{r_2} \cdots t_{r_n}$  到达状态类  $C_k = (M_k, D_k, K_k)$ . 如果变迁  $t_f \in Fr(C_k)$ , 则实施  $t_f$  到达状态类  $C_{k+1} = (M_{k+1}, D_{k+1}, K_{k+1})$  由下列实施规则确定:

(1) 标识  $M_{k+1}: M_{k+1} = M_k - Pre(t_f) + Post(t_f)$ .

(2) 实施域  $D_{k+1}: \forall t_i, t_j \in En(M_{k+1})$ ,

(i)  $D'_k(t_i, t_f) =$

$$\begin{cases} -SI(t_i), & t_i \in Newly(M_k, t_f) \\ [\downarrow D_k(t_i, t_f), \min\{\uparrow D_k(t_i, t) | t \in En(M_k)\}], & o.w. \end{cases};$$

(ii)  $D_{k+1}(t_i, t_j) =$

$$\begin{cases} 0, & t_i = t_j \\ D'_k(t_i, t_f) - D'_k(t_j, t_f), & t_i, t_j \in Newly(M_k, t_f) \\ D_k(t_i, t_j) \cap (D'_k(t_i, t_f) - D'_k(t_j, t_f)), & o.w. \end{cases}$$

(3) 概率域  $K_{k+1}: \forall t_i \in En(M_{k+1})$ ,

$$K_{k+1}(t_i) = \frac{Pr(\sigma t_i)}{Pr(\sigma)}.$$

使用状态类方法计算图 2 所示的例子, 得到如图 3 所示的概率可达类树。值得注意的是, 图 3 中虚线部分的结点是传统时间 Petri 网生成的状态类。在一致分布实施策略下, 这些结点并不存在, 因为从  $C_0$  到  $C'_1$  的转移概率为 0 (即  $Pr_0(t_1) = 0$ )。因此, 实线部分的结点才是基于一致分布的时间 Petri 网所产生的状态类。每个实线结点都附有一个时间间隔, 这个时间间隔表示该状态类的到达间隔, 或者说是沿初始(根)结点到达该结点所经过的变迁序列的实施间隔。从一个状态类转移到另一个状态类用一条有向边指示, 有向边上标注着引发转移的事件(变

迁)以及该事件的实施概率。从图中不难发现, 分支处各条边的概率之和刚好等于 1, 每条路径的实施概率等于路径上各条边的概率之积。例如: 在  $C_2$  分支下, 变迁  $t_1$  的概率和变迁  $t_2$  的概率之和为  $(179/384) + (205/384) = 1$ ; 路径  $t_3 t_1 t_4 t_5$  的实施概率为  $(2/3) \times (179/384) \times (128/895) \times 1 = 2/45$ 。

通过概率计算可以获得一些有价值的系统信息。假设图 2 中时间 Petri 网描述了两个任务的执行流程。任务 1 由  $t_1$  和  $t_4$  相继完成; 任务 2 由  $t_2$  完成、或者由  $t_3$  和  $t_5$  完成。如果系统要求任务 1 尽可能地先于任务 2 完成, 根据前面概率分析, 这种概率只有  $2/45$ 。为了提高任务 1 优先完成的概率, 可以适当提前  $t_1$  和  $t_4$  的实施时间。再如, 我们计算出任务 2 交给  $t_2$  执行或者交给  $t_3$  和  $t_5$  执行的概率分别是  $1/3$  和  $2/3$ , 这又可以帮助我们进一步分析路径  $t_2$  和路径  $t_3 t_5$  上的工作负载情况。因此, 通过一致分布模型获得的量化数据将有助于更好地评估系统性能和验证系统设计。

## 4 实验仿真

本节设计和实现基于一致分布时间 Petri 网的仿真实验。实验方案设计如下:

(1) 一旦变迁  $t_i$  开始使能, 就根据一致分布在区间  $SI(t_i)$  中生成一个随机数  $u_i$ , 表示该变迁(相对于使能时刻)的实施时间。

(2) 实施时间  $u_i$  随着时钟的流逝同步减小。一旦  $u_i$  到达 0, 就立刻实施变迁  $t_i$ 。因此, 具有最小实施时间的变迁总是优先实施(时间竞争策略)。

(3) 如果变迁  $t_i$  丧失使能, 该变迁则失去实施权(可设置  $u_i = \infty$ )。

根据设计方案, 我们在 Matlab 2007 平台上开发了一个基于一致分布的时间 Petri 网仿真工具箱。使用该工具箱对图 2 中时间 Petri 网的例子分别进行  $10^3$  次、 $10^4$  次、 $10^5$  次和  $10^6$  次运行模拟, 得到如表 1 所示的统计数据。

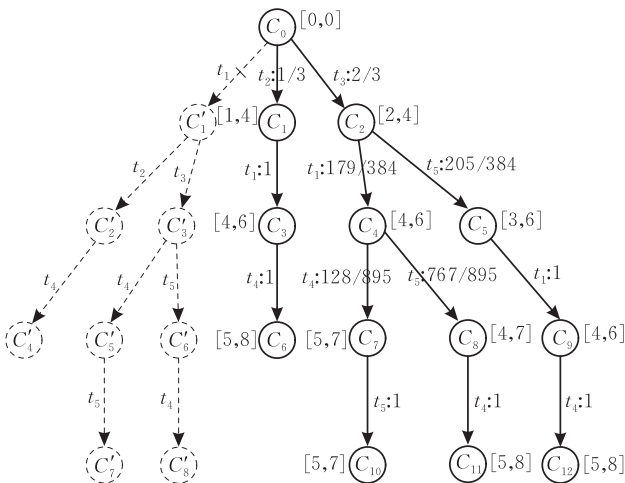


图 3 图 2 中时间 Petri 网的概率可达类树

表 1 图 2 时间 Petri 网基于一致分布的实施模拟结果

状态类 转移	模拟概率		模拟概率		模拟概率		模拟概率		理论
	$10^3$ 次	偏差/%	$10^4$ 次	偏差/%	$10^5$ 次	偏差/%	$10^6$ 次	偏差/%	
$C_0 \rightarrow C_1$	0.3520	5.60	0.3288	1.36	0.3326	0.22	0.3334	0.02	$1/3 \approx 0.3333$
$C_0 \rightarrow C_2$	0.6480	2.80	0.6712	0.68	0.6674	0.11	0.6666	0.01	$2/3 \approx 0.6667$
$C_2 \rightarrow C_4$	0.4830	3.62	0.4777	2.48	0.4651	0.22	0.4652	0.20	$179/384 \approx 0.4661$
$C_2 \rightarrow C_5$	0.5170	3.16	0.5223	2.16	0.5349	0.20	0.5348	0.18	$205/384 \approx 0.5339$
$C_4 \rightarrow C_7$	0.1342	6.16	0.1441	0.76	0.1449	1.32	0.1427	0.22	$128/895 \approx 0.1430$
$C_4 \rightarrow C_8$	0.8658	1.03	0.8559	0.13	0.8551	0.22	0.8573	0.03	$767/895 \approx 0.8570$
其它	1	0	1	0	1	0	1	0	1

对比表中数据不难发现,  $10^3$  次模拟产生的结果偏差较大, 它与理论值的相对误差最高达到 6 个百分点, 模拟统计值只能精确到十分位. 当模拟次数达到  $10^4$  时, 相对误差平均下降了 2 个百分点. 当模拟数量级为  $10^5$ , 相对误差基本在 1% 以下, 统计值可精确到百分位. 一旦模拟次数提升到  $10^6$  次, 统计值与理论值的相对误差均控制在 0.3% 以下, 其绝对误差值也限制在千分位上. 所以, 随着模拟次数的增加, 模拟统计值与理论值的差距就越小. 表中最后一行说明, 在没有分支出现情况下 (即只有一个子结点), 状态类转移概率总是 1, 实验结果和理论结果保持一致. 通过实验数据得出的结论进一步验证了理论计算方法是正确的.

## 5 结 论

时间 Petri 网关于时间性质的分析理论主要集中于区间端点的计算和推理方面, 涌现了不少具有代表性的理论成果, 比如状态类方法和扩展时段时序逻辑. 但是, 对于实施区间内不确定性的定量描述与分析一直未曾探讨. 文章首次在时间 Petri 网中引入一致分布概率模型, 并提出在一致分布下变迁实施概率、变迁序列实施概率、概率可达类树一系列问题的理论计算方法, 为时间 Petri 网模型的性能评价和动态模拟研究提供了一条新的探索途径.

经典时间 Petri 网侧重于变迁实施间隔的计算. 在此基础之上, 本文提出的模型还能计算变迁的实施概率, 这对于既要考虑任务执行时间、又要考虑任务执行概率的实时系统来说是非常有益的. 例如, 我们可以分析任务的操作频率、不同路径的工作负载、到达某一状态的概率等, 这些量化信息可以帮助我们评价系统的性能、分析系统的可靠性、调整系统的设计等等.

未来工作将进一步探讨基于其他概率分布的时间 Petri 网模型 (比如正态分布、三角形分布等) 以及模型在一些典型实时系统中的应用, 比如嵌入式实时系统、柔性制造系统等.

## 参 考 文 献

- [1] Lin Chuang. The Performance Evaluation of Network and Computer System. Beijing: Tsinghua University Press, 2001 (in Chinese)  
(林闯. 计算机网络和计算机系统的性能评价. 北京: 清华大学出版社, 2001)
- [2] Merlin P M, Farber D J. Recoverability of communication protocols: Implication of a theoretical study. IEEE Transactions on Communications, 1976, 24(9): 1036-1043
- [3] Balbo G. Introduction to stochastic Petri nets. Lectures on Formal Methods and Performance Analysis 2090, 2001: 84-155
- [4] Wu Zhe-Hui. Introduction to Petri Nets. Beijing: China Machine Press, 2006 (in Chinese)  
(吴哲辉. Petri 网导论. 北京: 机械工业出版社, 2006)
- [5] Boyer M, Roux O H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets//Proceedings of the 28th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency. Siedlce, Poland. LNCS 4546. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 63-82
- [6] Ramchandani C. Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets. Massachusetts Institute of Technology, Technical Report MAC-TR-120, 1974
- [7] Lin C, Marinescu D C. Stochastic high-level Petri nets and applications. IEEE Transactions on Computers, 1988, 37(7): 815-825
- [8] Berthomieu B, Diaz M. Modeling and verification of time dependent systems using time Petri nets. IEEE Transactions on Software Engineering, 1991, 17(3): 259-273
- [9] Vicario E. Static analysis and dynamic steering of time dependent systems using time Petri nets. IEEE Transactions on Software Engineering, 2001, 27(8): 728-748
- [10] Hadjidi R, Boucheneb H. Improving state class constructions for CTL\* model checking of time Petri nets. International Journal on Software Tools for Technology Transfer, 2008, 10(2): 167-184
- [11] Lin Chuang, Qu Yang, Li Ya-Juan. Modeling, consistency and inference of extended interval temporal logic. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(12): 1338-1347 (in Chinese)  
(林闯, 曲扬, 李雅娟. 扩展时段时序逻辑的模型、一致性和推理. 计算机学报, 2002, 25(12): 1338-1347)
- [12] Lin C, Shan Z G, Liu T, Qu Y, Ren F Y. Modeling and inference of extended interval temporal logic for nondeterministic intervals. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A, 2005, 35(5): 682-696
- [13] Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541-580
- [14] Berard B, Cassez F, Haddad S, Lime D, Roux O H. Comparison of different semantics for time Petri nets//Proceedings of the 3rd International Symposium on Automated Technology for Verification and Analysis. Taipei, Taiwan, China. LNCS 3707. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 293-307
- [15] Boyer M, Diaz M. Multiple enabledness of transitions in Petri nets with time//Proceedings of the 9th International Workshop on Petri Nets and Performance Models. Aachen, Germany, 2001: 219-228
- [16] Lime D, Roux O H. Model checking of time Petri nets using the state class timed automaton. Journal of Discrete Events Dynamic Systems—Theory and Applications, 2006, 16(2): 179-205



**PAN Li**, born in 1975, Ph. D. , lecturer. His research interests include Petri net theory and workflow technology.

**DING Zhi-Jun**, born in 1974, Ph. D. , associate professor. His research interests include Petri net theory and services computing.

**CHEN Gang**, born in 1981, Ph. D. candidate. His research interests include data mining and image processing.

## Background

Time Petri nets are a popular formal model for specification and verification of real-time systems. In time Petri nets, the time interval is adopted to represent the time range of firing an event, which to a certain extent describes the uncertainty of event occurrence. At present, theoretical studies on timed properties of time Petri nets aims at the computation and reasoning based on interval endpoints, and emerges some representative results, such as state class methods and the extended interval temporal logic (EITL). But few focus on the quantitative analysis of the uncertainty within an interval. It is very disadvantageous to further promoting the performance evaluation and dynamic simulation work of time Petri nets. This paper proposes a time Petri net model based on uniform distribution, which supposes the firing time of any transition follows uniform distribution on its firing interval, to address efficiently this problem. The authors put forward

a calculation approach to the probability of the transition firing and a state class method for timing analysis of the proposed model, also give some simulation experiments to verify the correctness of the theoretical analysis. The model can not only compute the firing intervals of transitions, but also calculate the firing probabilities of transitions, and is therefore suitable for quantitative analysis of those real-time systems that consider both the execution time of a task and its execution probability, such as embedded systems, workflow systems, and flexible manufacturing systems. By using the proposed model, one can get a lot of valuable information like the operation frequency of a task, the average workload of a path, and the probability that a state is reached. The quantitative data are very helpful to us in evaluating system performance, analyzing system reliability, and adjusting system design.