

Biswapped 网络(BSN)的拓扑性质研究: 点对称性和极大容错性

陈卫东¹⁾ 肖文俊²⁾

¹⁾(华南师范大学计算机学院 广州 510631)

²⁾(华南理工大学软件学院 广州 510641)

摘 要 Biswapped 网络(BSN)是一类两层结构的互连网络,它以任意图为模块且模块间采用一种完全两部图方式互连. BSN 的互连形式与 OTIS 网络(即 Swapped 网络)类似但互连规则更一致,使得 BSN 展现出更好的性能. 文中主要研究 BSN 的点传递性和容错性能. 首先证明 BSN 能继承因子网络的点传递性质,为 BSN 上的分析和算法简单性找到理论依据. 其次,通过直接构造网络中两点间最大数目的点不相交路径证明以任意连通图为因子网络的 BSN 是一致极大容错的. 这些结果表明 BSN 既能继承因子网络的理想性能还展现某些好的新特性. 最后,通过与 OTIS 网络、卡式积网络等层次类网络比较表明,BSN 提供了一种构建可扩展性、模块化、容错性的大规模并行计算机系统的潜在有竞争力的体系结构形式.

关键词 互连网络; OTIS 网络; Biswapped 网络; 拓扑性质; 点传递性; 极大容错性

中图法分类号 TP393 **DOI 号:** 10.3724/SP.J.1016.2010.00822

Topological Properties of Biswapped Networks (BSNs): Node Symmetry and Maximal Fault Tolerance

CHEN Wei-Dong¹⁾ XIAO Wen-Jun²⁾

¹⁾(School of Computer, South China Normal University, Guangzhou 510631)

²⁾(School of Software Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract Recent Biswapped Networks (BSNs) are a class of two-level structure interconnection networks taking any graph as modules and connecting them in a complete bipartite manner. A simple rule for connectivity in BSNs, similar to but more uniform than the one in well-known OTIS networks or swapped networks, leads to better performances in BSNs. In this paper, the node symmetry and the fault tolerance of BSNs are investigated. It is shown that if a factor network is node transitive then so is the resulting BSN, which gives a justification for simplicities in analyses and algorithms in BSNs. Moreover, by giving a simple general construction of a maximal number of node-disjoint paths between nodes in a BSN built of a connected graph, it is proven the BSN possesses uniformly maximal fault tolerance property regardless of whether the factor network is maximally fault tolerant or not. In contrast with OTIS networks and Cartesian product networks, these results further confirm that the connectivity rule in BSNs provides a systematic competitive construction scheme for large, scalable, modular, and robust parallel architectures, while maintaining favorable properties of their factor networks.

Keywords interconnection network; OTIS network; Biswapped network; topological property; node transitivity; maximal fault tolerance

1 引言

OTIS(Optical Transpose Interconnection System)网络(也称为 Swapped 网络)提供了一种用任何网络构建更大网络的一般方式^[1-2]. 以规模为 n 的任意图 Ω 为因子网络构建的 OTIS 网络(记作 $OTIS(\Omega)$)是由 n 个与 Ω 同构的子网络(称作是簇)组成,且采用如下方式将这些簇连通起来:簇 g 中点 p 与簇 p 中的点 g 相连($p \neq g$). 直观上,如果将每个簇看作是一个超点,则 $OTIS(\Omega)$ 网络可以看作是这些超点经过簇间链形成的完全图 K_n . OTIS 网络扩展成本小,能继承因子网络的某些理想性能(如哈密顿圈性^[3]),且是少数已经实现的互连网络方案之一,因此成为近年来研究的一个热点^[4-7]. 然而,由于 OTIS 网络中每个簇 g 中除点 g 外所有点都有簇间链连到别的簇,这个似乎不起眼的不对称性却导

致了许多分析和算法变得较为复杂,这是因为需要用不同的方法处理网络中两类不同节点. OTIS 网络不属于 Cayley 图,自然不能从现有的 Cayley 图(点传递图)相关理论和算法结论中受益.

人们希望能改造 OTIS 或者找到一种新的网络结构,它有类似 OTIS 网络的特性,但能消除其不对称性,特别是当因子网络是 Cayley 图时其对应网络也应是 Cayley 图^[3]. 最近的 Biswapped 网络(BSN)正是在这样的背景下被提出的^[8-9]. 以规模为 n 的任意图 Ω 为因子网络构建的 Biswapped 网络(记作 $BSN(\Omega)$)是由 $2n$ 个与 Ω 同构的子网络(称作是簇)组成,它们被等分为两个部,且采用如下方式将这些簇连通起来:一部的簇 g 中点 p 与另外一部的簇 p 中点 g 相连. 直观上,如果将每个簇看作是一个超点,则 $BSN(\Omega)$ 网络可以看作是这些超点经过簇间链形成的完全两部图 $K_{n,n}$. 图 1 给出以环网络 R_4 为因子网络的 OTIS 网络和 BSN.

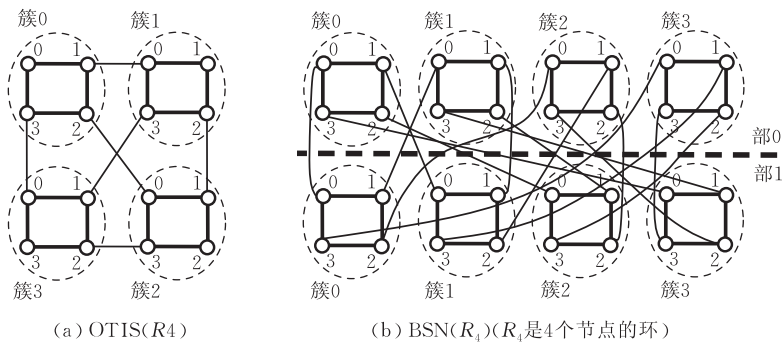
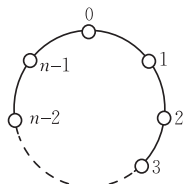


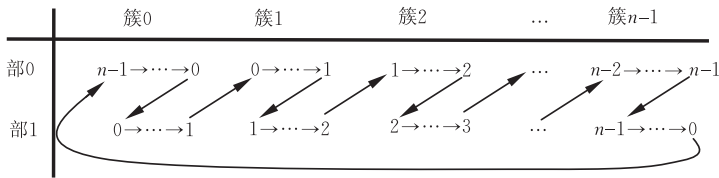
图 1

BSN 的互连方式与 OTIS 网络的相类似但互连接规则更一致. 最近的研究表明,BSN 有类似于 OTIS 网络的好特性(比如低扩展成本、继承因子网络的哈密顿圈性等),此外它还能继承因子网络的 Cayley 图特性^[8]. 特别地,BSN 上的分析和算法明

显比 OTIS 网络上的简单得多. 例如,根据因子网络中的哈密顿圈来构造 BSN 上的哈密顿圈相当简单(见图 2),而在 OTIS 网络上相应的构造要复杂得多^[3].



(a) 因子网络 Ω 中的哈密顿圈



(b) $BSN(\Omega)$ 中哈密顿圈的构造

图 2

本文研究动机如下. BSN 作为一种新网络拓扑结构,许多性质还有待研究,其中点传递性和容错性是互连网络性能很重要的方面. 点传递图是一类对称性较强的图(Cayley 是特殊类型的点传递图),因其

具有理想的特性而被广泛用来给互连网络建模. 事实上,文献中研究的和实践中使用的互连网络大多都是点传递图. 例如,环(Ring)、超立方体(Hypercube)、蝶图(Butterfly)、立方体连接圈(Cube-Connected

Cycles)、星图 (Star graphs) 等都是 Cayley 图, 而 Petersen 图则是非 Cayley 图的点传递图. 网络的点传递性能导致网络分析和算法简单、容错性能好、以及容易嵌入和模拟已被广泛认同^[10-12]. 容错性研究特别是点不相交路的构造对加速结点间大量数据传输和当节点或链出错时能提供替代路径十分有意义^[3,5]. 一个很自然的问题是: 鉴于 BSN 互连的规则性以及其上呈现出的分析和算法的简单性, 那么 BSN 是否能继承因子网络的点传递性? 进一步地, 如果 BSN 能继承因子网络的点传递性, 那么是否具有与 OTIS 网络同样甚至更好的容错性能? 本文围绕这些问题展开研究. 首先将证明 BSN 能继承因子网络的点传递性质, 这个结论一方面推广了已有的关于继承因子网络 Cayley 图性质的结论, 另一方面也对 BSN 上分析与算法简单性给予理论支持. 然后, 通过引入一个比极大容错性更强的一致极大容错性的概念, 来证明以任意连通图为因子网络的 BSN 是一致极大容错的 (对应的 OTIS 网络一般仅是极大容错的^[6]), 这说明 BSN 有比 OTIS 网络更好的容错性能. 在证明中给出一种构造两点间的点不相交路的简单一般性方法, 它仅要求因子网络是连通图即可, 无需借助因子网络中点不相交路的任何构造. 研究 BSN 这类层次网络的一般拓扑性质具有普遍意义, 因为所得的结论和构造方法可用于以各种具体因子网络构造出的一大类 BSN 网络. 我们也将 BSN 与另两类流行的层次网络即 OTIS 网络和卡式积网络进行比较来表明 BSN 的一些性能优势, 并通过实例说明研究这些层次类网络的一般拓扑性质对网络设计和网络分析的重要意义.

本文第 2 节介绍 BSN 的基本概念和一些已有的性质; 第 3 节和第 4 节分别讨论 BSN 的点传递性和极大容错性; 第 5 节将 BSN 和其它两类层次网络进行比较; 最后一节是总结并给出一些未来的研究方向.

2 基本概念和性质

既然互连网络是用图来建模的, 本文中不加区别地使用图和网络这两个概念. 在介绍 Biswapped 网络 (BSN) 之前, 先介绍图的几个术语.

设 G 是一个简单无向图 (简称为图), 其结 (节) 点集记作 $V(G)$, 边 (链) 集记作 $E(G)$. 用 $N_G(v)$ 表示图 G 中所有与点 v 相邻的点的集合, 称作是点 v

的开邻域, 并称 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 是点 v 的闭邻域. 图 G 中与节点 v 的相邻点的个数称作是 v 的点度, 记作 $deg_G(v)$. G 中最大点度和最小点度分别用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示. 在图 G 中任意两点 u, v 之间的最短路的长度称作是这两点间的距离, 记作 $d_G(u, v)$; 而 G 中所有点对间的距离的最大值称作是图的直径, 记作 $D(G)$. 在图 G 中, 如果从节点 u 到节点 v 的一组路径满足其中任意两条路径的内部节点都不相交, 称这些路径是从节点 u 到节点 v 的点不相交路径 (或称为并行路). 满足图 G 中任意不同两点之间均存在有至少 k 条并行路的最大 k 值被称作是图 G 的连通度, 记作 $k(G)$. 若 $k(G) = \delta(G)$, 则称图 G 是极大容错的. 本文中用到的其它图论概念和术语参见文献[13].

定义 1 (Biswapped 网络 (BSN)^[8-9]). 设 Ω 是一个无向图, $|V(\Omega)| = n$. 以 Ω 为因子网络构建的 Biswapped 网络是一个无向图, 记作 $BSN(\Omega)$, 其点集 $V(BSN(\Omega)) = \{\langle i, g, p \rangle \mid g, p \in V(\Omega), i = 0, 1\}$, 边集 $E(BSN(\Omega)) = \{(\langle i, g, p_1 \rangle, \langle i, g, p_2 \rangle) \mid (p_1, p_2) \in E(\Omega), g \in V(\Omega), i = 0, 1\} \cup \{(\langle i, g, p \rangle, \langle 1-i, p, g \rangle) \mid g, p \in V(\Omega), i = 0, 1\}$.

由定义 1, 若 Ω 有 n 个节点 (设 $V(\Omega) = \{0, 1, \dots, n-1\}$), 则 $BSN(\Omega)$ 是一个有 $2n^2$ 个节点的网络, 它由 $2n$ 个点不相交的子网络 (被称作簇) 组成, 每个簇均同构于因子网络 Ω , 它们被均分为两部分, 分别称为 0 部和 1 部, 每部内的 n 个簇被编号为 $0, 1, \dots, n-1$. $BSN(\Omega)$ 中的节点 $\langle i, g, p \rangle$ 对应于第 i 部中簇 g 的处理器 p , 称 i, g, p 分别是节点 $\langle i, g, p \rangle$ 的部号、簇号和处理器号 (或点号). 在一个 BSN 中, 簇间链将一部内的 g 簇中的点 p 与另一部内的 p 簇中的点 g 相连. 一个具体例子见图 1(b) 所示.

因 $BSN(\Omega)$ 中不同两部内簇号和处理器号互换的两点间有簇间链相连, 且直观上如果将每个簇看作是一个超点, $BSN(\Omega)$ 网络则可看作是这些超点经过簇间链形成的完全两部图 $K_{n,n}$, 故称 $BSN(\Omega)$ 为基于图 Ω 的通过两部图连接的交换网络 (Bipartite Swapped Networks).

下面是 BSN 的一些已知的性质^[8-9], 它们在后文中将被用到.

(1) 对于 $i = 0, 1$, 任意 $g, p, g_1, p_1, g_2, p_2 \in V(\Omega)$, 有

$$deg_{BSN(\Omega)}(\langle i, g, p \rangle) = deg_{\Omega}(p) + 1;$$

$$d_{BSN(\Omega)}(\langle i, g, p_1 \rangle, \langle i, g, p_2 \rangle) = d_{\Omega}(p_1, p_2),$$

$$d_{\text{BSN}(\Omega)}(\langle i, g_1, p_1 \rangle, \langle i, g_2, p_2 \rangle) = d_{\Omega}(p_1, p_2) + d_{\Omega}(g_1, g_2) + 2 \quad (g_1 \neq g_2),$$

$$d_{\text{BSN}(\Omega)}(\langle i, g_1, p_1 \rangle, \langle 1-i, g_2, p_2 \rangle) = d_{\Omega}(p_1, g_2) + d_{\Omega}(g_1, p_2) + 1;$$

$$D(\text{BSN}(\Omega)) = 2D(\Omega) + 2.$$

(2) 如果因子网络 Ω 是 Cayley 图, 则 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是 Cayley 图.

(3) 如果因子网络 Ω 是极大容错的, 则 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是极大容错的.

另外, 基于因子网络 Ω 的最短路由算法容易设计出 $\text{BSN}(\Omega)$ 上的最短路由算法^[8-9]. 其路由策略十分简单: 簇内路由和簇间路由交替地进行, 簇内用 Ω 的路由算法进行路由, 利用簇间链可从一簇直接进入另一簇. 例如, 当 $i_1 \neq i_2$ 时, 从源点 $\langle i_1, g_1, p_1 \rangle$ 到目标点 $\langle i_2, g_2, p_2 \rangle$ 的路由过程如下: 从源点 $\langle i_1, g_1, p_1 \rangle$ 出发在第 i_1 部的簇 g_1 内使用 Ω 的路由算法到达该簇内的点 $\langle i_1, g_1, g_2 \rangle$, 然后通过簇间链 $\langle i_1, g_1, g_2 \rangle, \langle i_2, g_2, g_1 \rangle$ 到达目标点所在簇中的点 $\langle i_2, g_2, g_1 \rangle$, 最后在该簇内使用 Ω 的路由算法到达目标点 $\langle i_2, g_2, p_2 \rangle$. 完整的路由算法参见文献^[8-9].

与 OTIS 网络的情形类似, 在实际构建 BSN 网络时, 可选用性能较好(比如直径小、点度小)的网络为因子网络, 且簇内链通常是短距离的通信链, 簇间链是较长距离的通信链. 基于 BSN 网络的模块化结构, 在大规模并行计算中, 可将任务图中通信密集的子任务尽可能地映射到同一簇中, 这些子任务间的通信将局限在簇内, 通信开销较小. 应用中可采用类似于 OTIS 网络上的划分与路由策略^[4,14].

3 BSN 的点对称性

互连网络中被广泛使用的点传递图是一类具有较强对称性的图, 其定义如下: 给定图 G , 设 $u, v \in V(G)$, 如果存在图 G 的一个自同构映射 f 使得 $f(u) = v$, 则称点 u 与 v 相似^[12]. 如果 G 中任何两点均相似, 则称 G 是点传递图或点可迁图(这里也称图 G 具有点对称性). 点传递图上所有点的相似性意味着从任何点来看图都是一样的, 这导致了图上的分析和算法的简单性. 注意, 图的一个自同构映射是图的点集上一个双射, 它保持图中点间的相邻性不变.

Cayley 图是点传递图, 但点传递图不一定是 Cayley 图. 一个典型例子就是 Petersen 图. 已有的研

究表明, 如果因子网络 Ω 是 Cayley 图, 则 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是 Cayley 图^[8]. 本节将证明更一般的结论: 如果 Ω 是点传递图, 则 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是点传递图. 这一结论也为 BSN 上所呈现出的分析与算法的简单性提供理论证据. 为了方便, 先证下面引理.

引理 1. 设 f 是图 Ω 的自同构映射, $V(\Omega) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 定义 $V(\text{BSN}(\Omega))$ 上映射 F_j^1, F_j^2 和 F_j^3 :

$F_j^1(\langle i, g, p \rangle) = \langle i, f(g), f(p) \rangle$, 其中 $i = 0, 1$ 且 $g, p = 0, 1, \dots, n-1$;

$F_j^2(\langle i, g, p \rangle) = \langle 1-i, f(g), f(p) \rangle$, 其中 $i = 0, 1$ 且 $g, p = 0, 1, \dots, n-1$;

$F_j^3(\langle 0, g, p \rangle) = \langle 0, g, f(p) \rangle, F_j^3(\langle 1, g, p \rangle) = \langle 1, f(g), p \rangle$, 其中 $g, p = 0, 1, \dots, n-1$, 则 F_j^1, F_j^2 和 F_j^3 都是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的自同构映射.

证明. 首先, 由 f 是 Ω 上的双射易知 F_j^1 是 $V(\text{BSN}(\Omega))$ 上的双射. 下面只需证明对于图 $\text{BSN}(\Omega)$ 中任意两点 u 和 v 有 (u, v) 是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的边当且仅当 $(F_j^1(u), F_j^1(v))$ 是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的边. 考虑到 $\text{BSN}(\Omega)$ 的定义及 f 是 Ω 的自同构映射, 我们有

① 当 (u, v) 是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的簇内边时,

$$(u, v) = (\langle i, g, p_1 \rangle, \langle i, g, p_2 \rangle) \in E(\text{BSN}(\Omega)) \\ \Leftrightarrow (p_1, p_2) \in E(\Omega) \\ \Leftrightarrow (f(p_1), f(p_2)) \in E(\Omega) \\ \Leftrightarrow (\langle i, f(g), f(p_1) \rangle, \langle i, f(g), f(p_2) \rangle) \\ = (F_j^1(u), F_j^1(v)) \in E(\text{BSN}(\Omega));$$

② 当 (u, v) 是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的簇间边时,

$$(u, v) = (\langle i, g, p \rangle, \langle 1-i, p, g \rangle) \in E(\text{BSN}(\Omega)) \\ \Leftrightarrow (\langle i, f(g), f(p) \rangle, \langle 1-i, f(p), f(g) \rangle) \\ = (F_j^1(u), F_j^1(v)) \in E(\text{BSN}(\Omega)),$$

故得证 F_j^1 保持了 $\text{BSN}(\Omega)$ 中点间的相邻性不变. 因此, F_j^1 是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的自同构映射.

同理可证 F_j^2 和 F_j^3 均是 $\text{BSN}(\Omega)$ 的自同构映射.

证毕.

定理 1. 如果图 Ω 是点传递图, 则图 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是点传递图.

证明. 考虑下面 3 种情况:

(1) $\forall g, p \in V(\Omega)$, 我们证明存在某个 $p' \in V(\Omega)$, 使得 $\langle 0, 0, p \rangle$ 相似于点 $\langle 0, g, p' \rangle$. 由 Ω 是点传递图知存在图 Ω 的自同构映射 f 满足 $f(0) = g$. 由引理 1, F_j^1 是图 $\text{BSN}(\Omega)$ 的一个自同构映射且 $F_j^1(\langle 0, 0, p \rangle) = \langle 0, f(0), f(p) \rangle = \langle 0, g, f(p) \rangle$. 由 g 和 p 的任意性, 得证 0 部 0 簇任一点 p 均与 0 部任一簇 g 内的某点 $p' = f(p)$ 相似, 且 p 不同, p' 也不同.

(2) $\forall g, p \in V(\Omega)$, 我们证明存在某个 $p'' \in V(\Omega)$, 使得 $\langle 0, 0, p \rangle$ 与节点 $\langle 1, g, p'' \rangle$ 相似. 由 Ω 是点传递图知存在图 Ω 的自同构映射 f 满足 $f(0) = g$. 由引理 1, F_f^2 是图 $\text{BSN}(\Omega)$ 的一个自同构映射且 $F_f^2(\langle 0, 0, p \rangle) = \langle 1, f(0), f(p) \rangle = \langle 1, g, f(p) \rangle$. 由 g 和 p 的任意性, 得证 0 部 0 簇 p 点与 1 部任一簇 g 内的 $p'' = f(p)$ 点相似, 且 p 不同, p'' 也不同.

(3) $\forall p \in V(\Omega)$, 我们证明点 $\langle 0, 0, 0 \rangle$ 与点 $\langle 0, 0, p \rangle$ 相似. 由 Ω 是点传递图知存在 Ω 的自同构映射 f 满足 $f(0) = p$. 由引理 1, F_f^3 是图 $\text{BSN}(\Omega)$ 的一个自同构映射且 $F_f^3(\langle 0, 0, 0 \rangle) = \langle 0, 0, f(0) \rangle = \langle 0, 0, p \rangle$. 由 p 的任意性, 得证 0 部 0 簇内任一点均与该簇内 0 点相似.

相似关系满足传递性^[12], 由上可得 $\text{BSN}(\Omega)$ 中任两点都相似, 即 $\text{BSN}(\Omega)$ 是点传递图. 证毕.

作为点对称性一个应用, 容易导出当因子网络 Ω 为点传递图时的 $\text{BSN}(\Omega)$ 中的平均点距.

推论 1. 如果 n 个点的图 Ω 是点传递图, 且 Δ_Ω 是图 Ω 的平均点距, 则图 $\text{BSN}(\Omega)$ 的平均点距 $\Delta_{\text{BSN}(\Omega)} = 2\Delta_\Omega - 1/n + 1.5$.

证明. 由于图 Ω 是点传递图, 由定理 1 知 $\text{BSN}(\Omega)$ 也是点传递图. 既然 $\text{BSN}(\Omega)$ 中任一节点都与节点 $\langle 0, 0, 0 \rangle$ 相似, $\text{BSN}(\Omega)$ 中所有点对间平均距离 $\Delta_{\text{BSN}(\Omega)}$ 就等于点 $\langle 0, 0, 0 \rangle$ 到 $\text{BSN}(\Omega)$ 中所有节点的平均距离.

$\forall g, p \in V(\Omega)$, 由于 $d_{\text{BSN}(\Omega)}(\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, p \rangle) = d_\Omega(0, p)$, $d_{\text{BSN}(\Omega)}(\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, g, p \rangle) = d_\Omega(0, p) + d_\Omega(0, g) + 2(g \neq 0)$, 且 $d_{\text{BSN}(\Omega)}(\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 1, g, p \rangle) = d_\Omega(0, g) + d_\Omega(0, p) + 1$, 于是有

$$2n^2 \Delta_{\text{BSN}(\Omega)} = \sum_{p \in V(\Omega)} d_\Omega(0, p) + \sum_{g \neq 0, p, g \in V(\Omega)} (d_\Omega(0, p) + d_\Omega(0, g) + 2) + \sum_{p, g \in V(\Omega)} (d_\Omega(0, g) + d_\Omega(0, p) + 1) \\ = n\Delta_\Omega + n^2(2\Delta_\Omega + 2) - n(\Delta_\Omega + 2) + n^2(2\Delta_\Omega + 1).$$

因此, $\Delta_{\text{BSN}(\Omega)} = 2\Delta_\Omega - 1/n + 1.5$. 证毕.

4 BSN 的极大容错性

本节我们将证明当 Ω 是连通图时, $\text{BSN}(\Omega)$ 拥有一种比极大容错性更强的容错性能.

容易知道, 任意连通图 G 中不同两点 u 和 v 间最多存在有 $\min\{\deg_G(u), \deg_G(v)\}$ (即这两点的最小度) 条并行路. 即使图 G 是极大容错的, 也只能保证 G 中任意不同两点间至少有 $\delta(G)$ 条并行路, 而某些点对间的并行路实际条数可能要少于这两点的最

小度数. 因此, 如果图 G 满足图中任意不同两点间的并行路条数达到这两点的最小度数, 则 G 是极大容错的; 反之不然. 为了方便讨论我们引入下面的一致极大容错性的概念, 它比极大容错性的概念更强.

定义 2 (一致极大容错性). 若连通图 G 中任意不同两点 u 和 v 间均存在有 $\min\{\deg_G(u), \deg_G(v)\}$ 条并行路, 则称图 G 是一致极大容错性的.

设 Ω 是连通图, 已经知道 $\text{OTIS}(\Omega)$ 是极大容错但不一定是一致极大容错性的^[6] (例如当因子网络为完全图 K_4 时, 可验证 $\text{OTIS}(K_4)$ 中的点 $\langle 0, 1 \rangle$ 和 $\langle 1, 0 \rangle$ 间的并行路的条数是 3, 比这两点的点度 4 要少 1). 既然 BSN 能继承因子网络的点传递性, 是否有比 OTIS 网络更好的容错性能呢? 本节我们通过构造出 $\text{BSN}(\Omega)$ 中任两不同点 src 和 dst 间的 $\min\{\deg_{\text{BSN}(\Omega)}(src), \deg_{\text{BSN}(\Omega)}(dst)\}$ 条并行路来证明 $\text{BSN}(\Omega)$ 是一致极大容错的. 所给出的并行路的构造方法仅要求因子网络 Ω 是连通图即可 (而不管 Ω 中是否有并行路的构造), 因此具有一般性.

为了证明方便, 先引入几个记号. 设 M_1 和 M_2 是 $V(\Omega)$ 的子集, 若 $M \subseteq M_1 \times M_2$ 满足 $|M| = \min\{|M_1|, |M_2|\}$ 且对任意两个不同序偶 $\langle m_1, m_2 \rangle, \langle m'_1, m'_2 \rangle \in M$ 有 $m_i \neq m'_i (i=1, 2)$ 成立, 则称 M 是 M_1, M_2 的一个最大匹配. 类似地, 设 M_1, M_2, M_3 是 $V(\Omega)$ 子集, 且 $M_1 \cap M_3 = \emptyset$, 若 $M \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3$ 满足 $|M| = \min\{|M_1|, |M_2|, |M_3|\}$ 且对任意两个不同三元组 $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle, \langle m'_1, m'_2, m'_3 \rangle \in M$ 有 $m_i \neq m'_i (i=1, 2, 3)$ 成立, 则称 M 是 M_1, M_2, M_3 的一个最大匹配. 显然, 根据给定 M_1, M_2 (或 M_1, M_2, M_3), 容易构造出一个最大匹配 M . 表示路径时, 我们用 $g \rightarrow p$ 表示 Ω 中点 g 到 p 的边, 用 $\langle i, g, p \rangle \rightarrow \langle 1-i, p, g \rangle$ 表示 $\text{BSN}(\Omega)$ 中点 $\langle i, g, p \rangle$ 到点 $\langle 1-i, p, g \rangle$ 的簇间边, 用 $\langle i, g, p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_t \rangle$ 或 $\langle i, g, p_1 \Rightarrow p_t \rangle$ 来表示 $\text{BSN}(\Omega)$ 中第 i 部簇 g 内的从 p_1 到 p_t 的一条最短路径, 其中 $p_1 \Rightarrow p_t$ 是 Ω 中从 p_1 到 p_t 的一条最短路. 为了表示简单和一致性, 我们允许使用形如 $p \rightarrow p$ 或 $\langle i, g, p \rangle \rightarrow \langle i, g, p \rangle$ 的空链. 现在我们来证明下面的主要定理.

定理 2. 设 Ω 是连通图, $src = \langle i_1, g_1, p_1 \rangle$ 和 $dst = \langle i_2, g_2, p_2 \rangle$ 是网络 $\text{BSN}(\Omega)$ 中任意两不同点, 则 $\text{BSN}(\Omega)$ 中 src 和 dst 间存在有 $d+1$ 条并行路, 其中 $d+1 = \min\{\deg_{\text{BSN}(\Omega)}(src), \deg_{\text{BSN}(\Omega)}(dst)\}$.

证明. 由于 $\deg_{\text{BSN}(\Omega)}(src) = \deg_\Omega(p_1) + 1$, $\deg_{\text{BSN}(\Omega)}(dst) = \deg_\Omega(p_2) + 1$, 因此 $d = \min\{\deg_\Omega(p_1), \deg_\Omega(p_2)\}$. 不失一般性, 设 $\deg_\Omega(p_2) \geq \deg_\Omega(p_1) =$

d , 则有 $|N_\Omega[p_2]| \geq |N_\Omega[p_1]| = d + 1$. 下面将构造从 src 到 dst 的 $d + 1$ 条路, 并证明这些路是两两内点不相交的.

构造思路如下: 先构造从 src 到 dst 的一条最短路(注意 Ω 是连通图, 因此 Ω 中任意两点间存在最短路且 $BSN(\Omega)$ 中从 src 到 dst 存在最短路). 然后构造从 src 到 dst 的另外 d 条路, 其中每条路一般是从第 i_1 部簇 g_1 中点 p_1 (即源点 src) 出发经过 $N_\Omega[p_1]$ 中某点后直接沿簇间边出来, 途中依次最多经过 3 个中间簇, 最后经簇间边直接进入第 i_2 部簇 g_2 的 $N_\Omega[p_2]$ 中某点后即到达该簇内点 p_2 (即目标点 dst). 所构造的路径满足两两内点不相交的性质是基于: (a) 这些路径在簇 g_1 和簇 g_2 中是两两内点不交的(因为它们一般经过簇间边立即离开簇 g_1 和簇 g_2); (b) 这些路经过的中间簇互不相同(也不同于簇 g_1 和簇 g_2) 且每个中间簇恰被一条路通过一次. 具体分下面 3 种情况来构造.

(i) 当 $i_1 = i_2 = i$ 且 $g_1 = g_2 = g$ 时(此时有 $p_1 \neq$

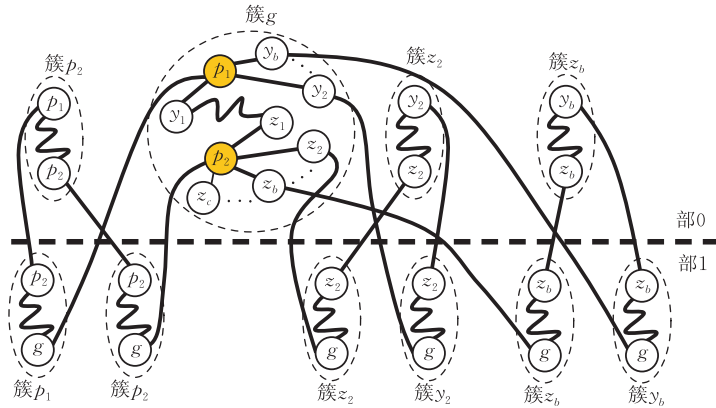


图 3 当 $p_1 \neq p_2$ 时, 构造的点 $\langle 0, g, p_1 \rangle$ 和 $\langle 0, g, p_2 \rangle$ 间并行路(其中 $s_1 = y_1, s_2 = z_1, A = \emptyset, M = \{\langle p_1, p_2, p_2 \rangle, \langle y_2, z_2, z_2 \rangle, \dots, \langle y_b, z_b, z_b \rangle\}$)

根据 A 和 M 的定义, 所构造的路径有 $1 + |A| + |M|$ 条. 由于 A 是 $N_\Omega[p_1]$ 和 $N_\Omega[p_2]$ 的子集, $s_1 \in N_\Omega[p_1], s_2 \in N_\Omega[p_2]$ 且 $s_1, s_2 \notin A$, 因此 $|M_1| = d - |A|, |M_2| \geq d - |A|$ 且 $|M_3| \geq d - |A|$, 从而有 $|M| = d - |A|$. 因此, 上述所构造路径共有 $1 + |A| + |M| = d + 1$ 条.

另一方面, 前 $1 + |A|$ 条路完全包含在 i 部 g 簇内, 后 $|M|$ 条路中对应于 $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle \in M$ 的那一路依次经过了 3 个中间簇: 第 $1 - i$ 部内编号属于 M_1 的簇 m_1 、 i 部内编号属于 M_2 的簇 m_2 、 $1 - i$ 部内编号属于 M_3 的簇 m_3 . 根据上述构造, 所有这些路径在簇 g 内显然是两两内点不相交的. 其次, 因 $g \notin M_2$ 且 $M_1 \cap M_3 = \emptyset$, 根据匹配 M 的定义, 后 $|M|$ 条

p_2), 即 src 和 dst 是同一部同一簇内的不同两点.

设 Ω 中从 p_1 到 p_2 的一条最短路 $p_1 \Rightarrow p_2$ 为 $p_1 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow p_2$, 其中 $s_1 \in N_\Omega[p_1]$ 且 $s_2 \in N_\Omega[p_2]$ (特别地, 若 $p_1 \in N_\Omega[p_2]$, 则 $p_1 \Rightarrow p_2$ 即为 $p_1 \rightarrow p_2$, 且 $s_1 = p_2, s_2 = p_1$). 由此得到从 $src = \langle i, g, p_1 \rangle$ 到 $dst = \langle i, g, p_2 \rangle$ 的一条最短路:

$$\langle i, g, p_1 \Rightarrow p_2 \rangle \tag{1}$$

设 $A = N_\Omega[p_1] \cap N_\Omega[p_2] - \{s_1, s_2\}, M_1 = N_\Omega[p_1] - A - \{s_1\}, M_3 = N_\Omega[p_2] - A - \{s_2\}, M_2 = N_\Omega[p_1] \cup N_\Omega[p_2] - \{g\}$, 则显然有 $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. 令 M 是 M_1, M_2, M_3 的一个最大匹配, 由此可构造从 $src = \langle i, g, p_1 \rangle$ 到 $dst = \langle i, g, p_2 \rangle$ 的另外 $|A| + |M|$ 条路如下(一种典型情形见图 3):

$$\langle i, g, p_1 \rightarrow x \rightarrow p_2 \rangle, \text{任意 } x \in A \tag{2}$$

$$\langle i, g, p_1 \rightarrow m_1 \rangle \rightarrow \langle 1 - i, m_1, g \Rightarrow m_2 \rangle \rightarrow$$

$$\langle i, m_2, m_1 \Rightarrow m_3 \rangle \rightarrow \langle 1 - i, m_3, m_2 \Rightarrow g \rangle \rightarrow$$

$$\langle i, g, m_3 \rightarrow p_2 \rangle, \text{任意 } (m_1, m_2, m_3) \in M \tag{3}$$

路经过的所有中间簇互不相同(也不同于簇 g) 且每个中间簇恰被一条路通过一次. 因此这 $1 + |A| + |M| = d + 1$ 条路是从 src 到 dst 的并行路.

(ii) 当 $i_1 = i_2 = i$ 且 $g_1 \neq g_2$ 时, 即 src 和 dst 是同一部不同簇内的两点.

设 Ω 中从 p_1 到 p_2 的一条最短路 $p_1 \Rightarrow p_2$ 为 $p_1 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow p_2$, 其中 $s_1 \in N_\Omega[p_1]$ 且 $s_2 \in N_\Omega[p_2]$ (特别地, 若 $p_1 \in N_\Omega[p_2]$, 则 $p_1 \Rightarrow p_2$ 即为 $p_1 \rightarrow p_2$, 且 $s_1 = p_2, s_2 = p_1$). 由此得到从 $src = \langle i, g_1, p_1 \rangle$ 到 $dst = \langle i, g_2, p_2 \rangle$ 的一条最短路:

$$\langle i, g_1, p_1 \Rightarrow p_2 \rangle \rightarrow \langle 1 - i, p_2, g_1 \Rightarrow g_2 \rangle \rightarrow \langle i, g_2, p_2 \rangle \tag{4}$$

设 $A = N_\Omega[p_1] \cap N_\Omega[p_2] - \{s_1, s_2\}, M_1 =$

$N_\alpha[p_1] - A - \{s_1\}, M_3 = N_\alpha[p_2] - A - \{s_2\}, M_2 = N_\alpha[p_1] \cup N_\alpha[p_2] - \{g_1, g_2\}$, 则显然有 $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. 令 M 是 M_1, M_2, M_3 的一最大匹配, 由此可构造从 $src = \langle i, g_1, p_1 \rangle$ 到 $dst = \langle i, g_2, p_2 \rangle$ 的另外 $|A| + |M|$ 条路如下(一种典型情形见图 4):

$$\langle i, g_1, p_1 \rightarrow x \rangle \rightarrow \langle 1-i, x, g_1 \Rightarrow g_2 \rangle \rightarrow \langle i, g_2, x \rightarrow p_2 \rangle, \text{任意 } x \in A \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\langle i, g_1, p_1 \rightarrow m_1 \rangle \rightarrow \langle 1-i, m_1, g_1 \Rightarrow m_2 \rangle \rightarrow \\ &\langle i, m_2, m_1 \Rightarrow m_3 \rangle \rightarrow \langle 1-i, m_3, m_2 \Rightarrow g_2 \rangle \rightarrow \\ &\langle i, g_2, m_3 \rightarrow p_2 \rangle, \text{任意 } (m_1, m_2, m_3) \in M \quad (6) \end{aligned}$$

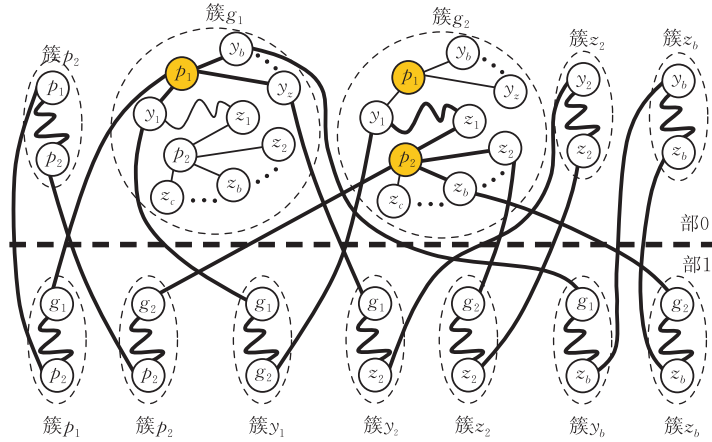


图 4 当 $g_1 \neq g_2$ 时, 构造的点 $\langle 0, g_1, p_1 \rangle$ 和 $\langle 0, g_2, p_2 \rangle$ 间并行路(其中 $s_1 = y_1, s_2 = z_1, A = \emptyset, M = \{\langle p_1, p_2, p_2 \rangle, \langle y_2, z_2, z_2 \rangle, \dots, \langle y_b, z_b, z_b \rangle\}$)

根据 A 和 M 的定义, 所构造的路径显然有 $1 + |A| + |M|$ 条. 由于 A 是 $N_\alpha[p_1]$ 和 $N_\alpha[p_2]$ 的子集, $s_1 \in N_\alpha[p_1], s_2 \in N_\alpha[p_2]$ 且 $s_1, s_2 \notin A$, 于是 $|M_1| = d - |A|, |M_2| \geq d - |A|$ 且 $|M_3| \geq d - |A|$, 从而有 $|M| = d - |A|$. 因此, 上述所构造路径共有 $1 + |A| + |M| = d + 1$ 条.

根据上述构造, 所有这些路径在簇 g_1 和 g_2 内显然是两两内点不相交的. 其次, 因为 $g_1, g_2 \notin M_2$ 且 $M_1 \cap M_3 = \emptyset$, 根据匹配 A 和 M 的定义, 这些路径通过的所有中间簇互不相同(也不同于簇 g_1 和 g_2) 且每个中间簇恰被一条路通过一次. 因此这 $d + 1$ 条路是从 src 到 dst 的并行路.

(iii) 当 $i_1 \neq i_2$ 时, 即 src 和 dst 是不同部内的两点.

设在 Ω 中从 p_1 到 g_2 的一条最短路 $p_1 \Rightarrow g_2$ 为 $p_1 \rightarrow s_1 \Rightarrow g_2$ (其中 $s_1 \in N_\alpha[p_1]$, 特别地, 若 $g_2 = p_1$, 则 $p_1 \Rightarrow p_1$ 为空路径, 此时 $s_1 = p_1$); 从 g_1 到 p_2 的一条最短路 $g_1 \Rightarrow p_2$ 为 $g_1 \Rightarrow s_2 \rightarrow p_2$ (其中 $s_2 \in N_\alpha[p_2]$, 特别地, 若 $g_1 = p_2$, 则 $g_1 \Rightarrow g_1$ 为空路径, 此时 $s_2 = p_2$). 于是得到从 src 到 dst 的一条最短路:

$$\langle i_1, g_1, p_1 \Rightarrow g_2 \rangle \rightarrow \langle i_2, g_2, g_1 \Rightarrow p_2 \rangle \quad (7)$$

设 $M_1 = N_\alpha[p_1] - \{s_1\}, M_2 = N_\alpha[p_2] - \{s_2\}$, 显然有 $g_2 \notin M_1$ 且 $g_1 \notin M_2$. 令 M 是 M_1, M_2 上的一个最大匹配, 则有 $|M| = d$. 于是, 可构造从 src 到 dst 的另外 d 条路如下(一种典型情形见图 5):

$$\langle i_1, g_1, p_1 \rightarrow y \rangle \rightarrow \langle i_2, y, g_1 \Rightarrow z \rangle \rightarrow \langle i_1, z, y \Rightarrow g_2 \rangle \rightarrow \langle i_2, g_2, z \rightarrow p_2 \rangle, \text{任意 } (y, z) \in M \quad (8)$$

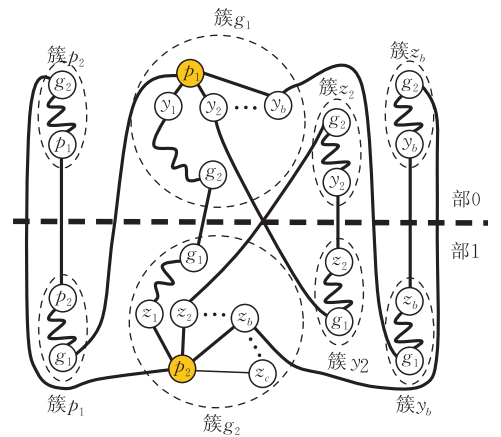


图 5 构造的点 $\langle 0, g_1, p_1 \rangle$ 和 $\langle 1, g_2, p_2 \rangle$ 间的并行路(其中 $s_1 = y_1, s_2 = z_1, M = \{\langle p_1, p_2 \rangle, \langle y_2, z_2 \rangle, \dots, \langle y_b, z_b \rangle\}$)

显然所构造路有 $1 + |M| = d + 1$ 条. 根据上述构造, 所有这些路径在簇 g_1 和 g_2 内显然是两两内点不相交的. 其次, 因为 $g_2 \notin M_1$ 且 $g_1 \notin M_2$, 故这些路径所经过的中间簇互不相同(也不同于簇 g_1 和 g_2) 且每个中间簇恰被一条路通过一次. 因此这 $d + 1$ 条路是从 src 到 dst 的并行路. 证毕.

由定理 2 可直接得到如下结论.

推论 2. 如果图 Ω 是连通图, 则图 $BSN(\Omega)$ 是极大容错的, 且是一致极大容错的.

在互连网络的容错性能分析中,为了将容错性和有效性结合起来,在并行路的基础上人们提出了容错直径和宽直径的概念^[15]. 描述宽直径需要用到容器的概念. 图 G 中的从点 u 到 v 的一组并行路也被称作是一个 (u, v) -容器,容器的宽度为其中并行路的条数,容器的长度为其中最长路的长度. 某两点间宽度为 d 的所有容器的最小长度称作这两点间的 d -宽距离. 所有点对间的 d -宽距离的最大值称作是图 G 的 d -宽直径. 求一般图的宽直径是 NP 难的,但求容错直径是否是 NP 难的目前尚未知^[15]. 因此,在一个网络中,确定这些参数的界是很有意义的.

当图 Ω 是连通图时,根据上述推论 2 知, $\text{BSN}(\Omega)$ 的连通度为 $\delta(\text{BSN}(\Omega))$. 因此,图 $\text{BSN}(\Omega)$ 的容错直径为在 $\text{BSN}(\Omega)$ 中删除至多 $\delta(\text{BSN}(\Omega)) - 1$ 个节点后所剩图的最大直径. 此外,根据定理 2 容易知道, $\text{BSN}(G)$ 中任意不同两点间存在宽度为 $\delta(\text{BSN}(\Omega))$ 的容器. $\delta(\text{BSN}(\Omega))$ -宽直径这里简称为宽直径. 注意到,对任意 $p, q \in V(\Omega)$,最短路 $p \Rightarrow q$ 的长度不超过 Ω 的直径 $D(\Omega)$. 因此容易验证定理 2 在各种情况下所构造的每条路(见式(1)~(8))的长度 $\leq 3D(\Omega) + 6 = 1.5D(\text{BSN}(\Omega)) + 3$. 由此得到 BSN 的容错直径和宽直径的一个上界.

推论 3. 如果图 Ω 是连通图,则 $\text{BSN}(\Omega)$ 的容错直径和宽直径均不超过 $1.5D(\text{BSN}(\Omega)) + 3$.

5 几类层次网络的性能比较

本节先将 BSN 与另两类流行的层次网络即 OTIS 网络和卡式积网络进行比较来展示 BSN 的一些优势,然后通过实例说明研究这些层次类网络上诸如点传递性和极大容错性等一般拓扑性质对网络设计和网络分析的重要意义.

随着互连网络的发展,人们提出了一些复杂的构图方式来构建互连网络. 其中一些构图方式具有一般性,它们相对于具体的网络拓扑结构(比如 Ring、Mesh、Hypercube 等)有一定的灵活性和通用性,能够用不同大小、不同类型的因子网络来构造性能各异的互连网络. 研究互连网络的一般构图方式的性质具有普遍意义,得出的结论适用于一大类具体的网络体系结构. 在构建大规模并行计算机系统时,网络成本和网络性能是必需考虑的重要因素^[3]. 大规模并行计算机的性能主要依赖于其基础互连网络的拓扑特性,已有的研究表明互连网络的对称性

对于算法的简单高效和好的容错性很重要^[10-12]. 网络成本常用“点度 \times 直径”来度量,网络的扩展性能可用单位节点的成本即“点度 \times 直径/节点数”来衡量,我们称作是扩展成本. 既能继承因子网络的诸如对称性等理想性能又具有较小网络扩展成本的一般构图方式是富有吸引力的.

BSN 和 OTIS 网络显然都提供了使用任意因子网络构建两层复合网络的一般方式. 被广泛研究的卡式积(笛卡儿积)也提供了这样的一种方式,它使用任意两个因子网络来构建两层复合网络^[15-16]. 对于任意图 X 和 Y ,卡氏积 $X \times Y$ 是一个图,其点集 $V(X \times Y) = V(X) \times V(Y)$,边集 $E(X \times Y) = \{(\langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle) | (x_1, x_2) \in E(X) \text{ 且 } y \in V(Y)\} \cup \{(\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle) | x \in V(X) \text{ 且 } (y_1, y_2) \in E(Y)\}$. 卡式积网络构造简单、使用灵活,且有较好性能,因此得到了广泛研究和实际应用,成为设计大规模互连网络的重要方法之一. 例如,超立方体 Q_n 是 n 个 K_2 的卡式积. 文献[17]中的 $\text{RP}(k)$ 网络实际上是卡式积 $R_k \times P$,文献[18]中的 $\text{TCP}(k)$ 网络是卡式积 $R_n \times (R_m \times P)$ 且 $\text{DCP}(k)$ 网络是卡式积 $DR_n \times (DR_m \times P)$ (其中 $k = m + n$,文献[19]中的 $\text{RHP}(n)$ 是卡氏积 $R_5 \times (P \times Q_{n-5})$,这里 R_t 是 t 个节点的环, DR_t 是 t 个节点的双环, P 是 Petersen 图.

人们已为层次网络 BSN 、 OTIS 网络、卡式积网络得出许多一般性质,比如图的某些参数(点数、直径、连通度等)可方便地根据因子网络的对应参数计算出来,能继承因子网络的一些好的特性等;并且针对任意因子网络设计了网络上一些通用有效的算法(包括最短路由算法). 表 1 给出了它们的典型性能的一个对照^[3,8,15]. 这些性能可分为 3 类:第 1 类为扩展性(节点数、直径、点度、扩展成本);第 2 类为继承性(正则性、点传递性、Cayley 图、哈密尔顿圈、极大容错性),即当因子网络具有某个理想特性时,给出对应的层次网络是否能继承相应的特性;第 3 类为新特性(极大容错性能),即当因子网络仅是连通图时,给出对应的层次网络是否具有这个新特性. 由于卡式积网络的点度等于两个因子网络点度之和,直径等于两个因子网络直径之和,因此其扩展成本往往较大. 然而,卡氏积网络能继承因子网络的诸如对称性等理想性能(导致算法和分析简单). OTIS 网络扩展成本较小,但是对称性方面稍差(导致算法和分析较为复杂). BSN 则兼备了这两者的优点,具有更小扩展成本、能更好地继承因子网络的理想特性,并展示出更好的容错性能.

表 1 BSN(Ω), OTIS(Ω)和 $\Omega \times \Omega$ 典型性能对照(其中因子网络 Ω 的点数为 n , 点度为 d , 直径为 D)

特性类	拓朴性质	BSN(Ω)	OTIS(Ω)	$\Omega \times \Omega$
扩展性	节点数(N)	$2n^2$	n^2	n^2
	点度(d)	$d+1$	d 或 $d+1$	$2d$
	直径(D)	$2D+2$	$2D+1$	$2D$
	扩展成本(dD/N)	$(d+1)(D+1)/n^2$	$(d+1)(2D+1)/n^2$	$4dD/n^2$
继承性	正则性	✓	×	✓
	点传递性	✓	×	✓
	Cayley 图	✓	×	✓
	哈密尔顿圈	✓	✓	✓
	极大容错性	✓	✓	✓
新特性	极大容错性 (因子网络为连通图)	✓*	✓	?*

*注: 当因子网络仅是连通时, 已证明 BSN(Ω) 是一致极大容错性的, OTIS(Ω) 一般只是极大容错性的, 而卡式积目前的最好结果是 $k(\Omega \times \Omega) = \min\{nk(\Omega), 2\delta(\Omega)\}$, 由此尚不能得出 $\Omega \times \Omega$ 是极大容错的结论(见文献[15]中 pp. 73-78).

显然, 层次类网络的一般拓朴性质可以直接应用到由具体因子网络构建的具体的层次网络上, 而没有必要对每个具体的层次网络再去一一分析和证明这些性质. 因此研究层次类网络的一般拓朴性质(例如点传递性和极大容错性)对网络设计与网络分析都十分有意义. 下面考察两个具体实例, 一个是 RP(k) 网络^[17], 另一个是被广泛研究和应用的超立方体网络 Q_k ^[19-20].

注意到卡式积有如下性质^[15-16]: 如果因子网络 X, Y 都是正则图(点传递图、Cayley 图), 那么 $X \times Y$ 也是正则图(点传递图、Cayley 图); 如果因子网络 X, Y 中都有哈密尔顿圈, 那么由此能构造出 $X \times Y$ 的哈密尔顿圈; 如果因子网络 X, Y 都是极大容错的, 那么 $X \times Y$ 也是极大容错的, 并且由 X, Y 中并行路的构造容易得到 $X \times Y$ 中并行路的构造. 因此, 根据 Ring 网络和 Petersen 图的性质, 立即可得出它们的卡式积是正则图、点传递图、极大容错的、有哈密尔顿圈(因此一个环可最优地嵌入到网络中)等. 既然 RP(k) 网络是 k 个点的 Ring 网络和 Petersen 图的卡式积, 因此这些性质可直接得出, 而不必去一一详细分析和证明了, 并且基于 Ring 网络和 Petersen 图上各自的并行路的构造可直接使用卡式积中构造并行路的一般方法来得到 RP(k) 中

并行路的构造. 此外, 由 RP(k) 的点传递性也很容易理解其上各种分析和算法的简单性. Ring 网络简单易于扩展, Petersen 图直径小且连接性好, 它们巧妙结合使得当 k 较小时 RP(k) 的扩展成本不太大, 从而总体性能较好. 对于文献[18-19]中的卡式积网络可作类似讨论. 总之, 它们都是利用了不同因子网络的某些理想性能并使用卡式积结合得到有更多理想性能的复合网络. 按照这一思路可有望设计出更多有更好性能的卡式积网络(另一方面, 作为一个反例, 如果我们用线(Line)网络与 Petersen 图来构造卡式积网络, 由于 Line 网络不是点传递图、直径较大、容错性能较差, 所得卡式积网络性能显然不会理想. 比如, 它不是点传递图, 因此路由算法会复杂些).

作为另一个例子, 按照上述一思路, 我们使用超立方体 Q_k 为因子网络分别来设计 BSN、OTIS 网络和卡式积网络, 并分析它们的性能. 注意到, Q_k 的节点数为 $n = 2^k$, 点度和直径都是 $\log n$, 它是 Cayley 图, 也是极大容错的并且有简单的并行路的构造方法. 因此, 根据 BSN、OTIS 网络和卡式积网络的一般拓朴性质立即可得到 BSN(Q_k)、OTIS(Q_k) 和 $Q_{2k} = Q_k \times Q_k$ 的相应性能特点和构造(表 2 仅给出了性能特点). 可以看出, BSN(Q_k) 具有更好的总体性能.

表 2 BSN(Q_k), OTIS(Q_k), $Q_k \times Q_k$ 典型性能对照(其中 $n = 2^k$)

拓朴性质	BSN(Q_k)	OTIS(Q_k)	$Q_{2k} = Q_k \times Q_k$
节点数(N)	$2n^2$	n^2	n^2
点度(d)	$\log n + 1$	$\log n$ 或 $\log n + 1$	$2\log n$
直径(D)	$2\log n + 2$	$2\log n + 1$	$2\log n$
扩展成本(dD/N)	$(\log n + 1)^2 / n^2$	$(\log n + 1)(2\log n + 1) / n^2$	$(2\log n)^2 / n^2$
正则性	✓	×	✓
点传递性	✓	×	✓
Cayley 图	✓	×	✓
哈密尔顿圈	✓	✓	✓
极大容错性	✓	✓	✓

6 结 论

本文对 BSN 这类网络的点对称性和容错性进行了研究,得到了两个一般性结论. (1) 证明了 BSN 能继承其因子网络的点传递性质. 这是一个比已有的关于继承因子网络的 Cayley 图特性更一般的结论. 这一特性也为 BSN 上的分析和算法简单性找到了某种理论依据. (2) 在引入一个比极大容错性更强的一致极大容错性概念的基础上,证明了以任意连通图为因子网络构建的 BSN 一定是一致极大容错的. 这是一个与因子网络的容错性能无关的 BSN 的新特性,这一新特性显然得益于 BSN 的互连规则. 在证明中给出了一种构造两点间最多数目的并行路的简单有效的一般性方法. 由此说明 BSN 具有很强的对称性和鲁棒性. BSN 与 OTIS 网络呈现出许多类似特性. 然而,由于 BSN 构造更为规则(簇中任何点都使用相同的规则连到其它簇),使得 BSN 展现出某些更好特性. 因此在某种意义上 BSN 可看作是 OTIS 网络的一个改进. 通过比较表明,BSN 提供了一种低成本扩展互连网络的一般方式,能保持其因子网络的理想性能几乎不变,并且展现出一些更好性能特点,因此是对广泛使用的互连网络体系结构的一个有益补充(因为可以使用任何现存网络作为模块来构建 BSN,这样既能利用这些具体模块的好特性又能获得 BSN 互连规则带来的新特性).

本文所得出的性质和构造具有一般性,适用于一大类具体的 BSN,因此不需要再针对每个具体的 BSN 来分别讨论这些性质和构造. 未来研究工作中将基于 BSN 极大容错性的结论,对多种情况下的容错路由进行研究. 为了找到 BSN 实际应用,还需要研究其上的嵌入、负载平衡等重要问题.

参 考 文 献

[1] Marsden G C, Marchand P J, Harvey P, Esener S C. Optical transpose interconnection system architectures. *Optical Letters*, 1993, 18(13): 1083-1085

[2] Yeh C H, Parhami B. Swapped networks: Unifying the architectures and algorithms of a wide class of hierarchical parallel processors//*Proceedings of the 1996 International Conference on Parallel and Distributed Systems*. Tokyo, Japan. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1996: 230-237

[3] Parhami B. Swapped interconnection networks: Topological, performance, and robustness attributes. *Journal of Parallel*

and Distributed Computing, 2005, 65(11): 1443-1452

[4] Wang C F, Sahni S. Matrix multiplication on the OTIS-Mesh optoelectronic computer. *IEEE Transactions on Computers*, 2001, 50(7): 635-646

[5] Day K, Al-Ayyoub A E. Topological properties of OTIS-networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2002, 13(4): 359-366

[6] Chen Weidong, Xiao Wenjun, Parhami Behrooz. Swapped (OTIS) networks built of connected basis networks are maximally fault tolerant. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2009, 20(3): 361-366

[7] Zhao Chenggui, Xiao Wenjun, Parhami B. Load-balancing on swapped or OTIS networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2009, 69(4): 389-399

[8] Xiao Wenjun, Chen Weidong, He Mingxin, Wei Wenhong, Parhami B. Biswapped networks and their topological properties//*Proceedings of the 8th ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing*, Qingdao, China, 2007. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 2007: 193-198

[9] Xiao Wenjun, Parhami B, Chen Weidong, He Mingxin, Wei Wenhong. Fully symmetric swapped networks based on bipartite cluster connectivity. *Information Processing Letters*, 2010, 110(6): 211-215

[10] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, 1989, 38(4): 555-566

[11] Lakshminarayanan S, Jwo J S, Dhall S K. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey. *Parallel Computing*, 1993, 19(4): 361-407

[12] Heydemann M. Cayley graphs and interconnection networks//Hahn G, Sabidussi G. *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997: 167-224

[13] West D B. *Introduction to Graph Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2001

[14] Wei Wenhong, Xiao Wenjun. Matrix multiplication on the Biswapped-mesh network//*Proceedings of the 8th ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing*. Qingdao, China, 2007. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 2007: 211-215

[15] Xu Jun-Ming. *Combinatorial Network Theory*. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese)
(徐俊明. 组合网络理论. 北京: 科学出版社, 2007)

[16] Imrich W, Klavžar S. *Product Graphs: Structure and Recognition*. New York: John Wiley & Sons, 2000

[17] Liu Fang-Ai, Liu Zhi-Yong, Qiao Xiang-Zhen. A practical interconnection network $RP(k)$ and its routing algorithms. *Science in China (Series F)*, 2001, 44(6): 461-473

- [18] Wang Lei, Lin Ya-Ping, Chen Zhi-Pin, Wen Xue. Topology and routing algorithms of 2-D torus/double-loops connected Petersen graph network. *Chinese Journal of Computers*, 2004, 27(9): 1290-1296(in Chinese)
(王雷, 林亚平, 陈治平, 文学. 二维环/双环连接 Petersen 图网络及其路由算法. *计算机学报*, 2004, 27(9): 1290-1296)
- [19] Wang Lei, Lin Ya-Ping. Research on hypercube & ring connected Petersen graph interconnection networks. *Chinese Journal of Computers*, 2005, 28(3): 409-413(in Chinese)

(王雷, 林亚平. 基于超立方体环连接的 Petersen 图互联网网络研究. *计算机学报*, 2005, 28(3): 409-413)

- [20] Gao Feng, Li Zhong-Cheng, Min Ying-Hua, Wu Jie. A fault-tolerant routing strategy based on extended safety vectors in hypercube multicomputers. *Chinese Journal of Computers*, 2000, 23(3): 248-254(in Chinese)
(高峰, 李忠诚, 闵应骅, 吴杰. 超立方体多处理机系统中基于扩展安全向量的容错路由. *计算机学报*, 2000, 23(3): 248-254)



CHEN Wei-Dong, born in 1968, Ph. D., associate professor. His research interests include graph theory, optimization theory, and parallel computing.

XIAO Wen-Jun, born in 1950, Ph. D., professor, Ph.D. supervisor. His research interests include discrete mathematics, parallel and distributed computing, and complex networks.

Background

This work is supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province under grant No. 04020130, and the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60973150.

The swapped or OTIS (optical transpose interconnection system) architecture has received considerable attention in recent years due to many favorable attributes coming from its simple connectivity rule. However, the very connectivity rule causes a small asymmetry in OTIS networks, because there is exactly one node having no inter-cluster link in every cluster of an OTIS network so that it is different from the other nodes in this cluster. Consequently, many analyses and algorithms for OTIS networks become complicated. This lack of full symmetry prevents us from using results that are applicable to classes of symmetric networks, such as the ubiquitous Cayley graphs. Thus, the existence question for “an alternate or modified form of OTIS network that is a Cayley graph when the factor network is a Cayley graph” was raised. The recent Biswapped networks (BSNs) have given a positive answer to this interesting question. A simple rule for connectivity in BSNs, similar to but more unified than the one in OTIS networks, removes the inherent asymmetry of OTIS networks, as well as the attendant complications in analyses and applications. The recent research has shown that BSNs have many better performances, including simplicities in analyses and algorithms, than OTIS networks. In particular, if the

factor network is a Cayley graph then so is the resulting BSN. On the other hand, many researchers have emphasized the importance of node symmetry properties of the networks for both algorithmic efficiency and good fault-tolerance. In view of exhibited simplicities of analyses and algorithms in BSNs, it is an interesting problem that whether BSNs preserve the node symmetry of their factor networks, and if this is true, whether BSNs have better fault tolerance than OTIS networks.

This paper gives the following two general results on BSNs, which constitute the positive answer to the above problem. First, the authors prove that if a factor network is node transitive then so is the resulting BSN, which is a generalization of the conclusion about a Cayley graph as the factor network; by giving a simple and general construction of node-disjoint paths between nodes in a BSN built of any connected factor network, prove the BSN is maximally fault tolerant regardless of whether its factor network is maximally fault tolerant or not. Furthermore, the authors show the BSN has better fault tolerance than the corresponding OTIS network by introducing the concept of uniformly maximal fault tolerance. These results further confirm that the connectivity rule in BSNs provides a systematic construction strategy for large, scalable, modular, and robust parallel architectures, while maintaining favorable properties of the factor networks.