形态学联想记忆框架研究

冯乃勤 刘春红 张聪品 徐久成 王双喜

(河南师范大学计算机与信息技术学院 河南 新乡 453007)

摘 要 形态学联想记忆(MAM)是一类极为新颖的人工神经网络. 典型的MAM实例对象包括:实域MAM(RMAM)、复域MAM(CMAM)、双向MAM(MBAM)、模糊MAM(FMAM)、增强的FMAM(EFMAM)、模糊MBAM(FMBAM)等. 它们虽有许多诱人的优点和特点,但有相同的形态学理论基础,本质上是相通的,将其统一在一个MAM框架中是可能的. 同时,联想记忆统一框架的建立也是当前的研究重点和难点之一. 为此作者构建了一个形态学联想记忆框架. 文中首先分析MAM类的代数结构,奠定可靠的MAM框架计算基础;其次,分析MAM类的基本操作和共同特征,抽取它们的本质属性和方法,引入形态学联想记忆范式和算子;最后,提炼并证明主要的框架定理. 该框架的意义在于:(1)从数学的角度将MAM对象统一在一起,从而能以更高的视角揭示它们的特性和本质;(2)有助于发现一些新的形态学联想记忆方法,从而解决更多的联想记忆、模式识别、模糊推理等问题.

关键词 形态学神经网络;形态学联想记忆;范式;算子;框架

中图法分类号 TP18 **DOI号**: 10.3724/SP.J.1016.2010.00157

Research on the Framework of Morphological Associative Memories

FENG Nai-Qin LIU Chun-Hong ZHANG Cong-Pin XU Jiu-Cheng WANG Shuang-Xi

(*College of Computer & Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang, Henan* 453007)

Abstract The morphological associative memories (MAM) are a class of extremely new artificial neural networks. Typical objects of MAM include real MAM (RMAM), complex MAM (CMAM), morphological bidirectional associative memories (MBAM), fuzzy MAM (FMAM), enhanced FMAM (EFMAM), fuzzy MBAM (FMBAM), and so on. They have many attractive advantages and features. However, they have the same morphological theoretical base in essence and it is therefore possible to unify them in a framework of MAM. At the same time, it is one of the most important and difficult researches to construct the unified framework of associative memories. The paper tries to solve the problem. Firstly, in this paper, the algebraic structure in computing of MAM is analyzed in order to establish reliable computing base of the framework. Secondly, the basic operations and the common features in the class of MAM are analyzed, and the essential attributes and methods of MAM are extracted. On this basis, the norms and operators of MAM are defined. And finally, the main theorems of MAM are refined and proved. Thus, a unified theoretical framework of MAM is established. The significance of the framework consists in: (1) The objects of MAM are unified together in mathematics and are therefore better for revealing their peculiarities and the essence of MAM; (2) It can help people find some new methods for morphological associative memories, thereby solving more problems of associative memories, pattern recognition and fuzzy reasoning.

收稿日期:2007-08-13;最终修改稿收到日期:2009-01-15. 本课题得到国家自然科学基金(60873104)、河南省自然科学基金(0511012300)、河南师范大学博士基金(521662)资助. **冯乃勤**,男,1953年生,博士,教授,主要研究领域为神经计算、联想记忆、模糊理论. E-mail: fengnaiqin@163.com. **刘春红**,女,1969年生,副教授,主要研究方向为多媒体信息处理、联想记忆. **张聪品**,女,1968年生,副教授,主要研究方向为粗糙集理论、形态学神经网络、分布式人工智能. **徐久成**,男,1963年生,博士,教授,主要研究领域为粗糙集理论、粒计算、数据挖掘. **王双喜**,男,1984年生,硕士研究生,主要研究方向为人工神经网络、模式识别.

Keywords morphological neural networks; morphological associative memories; norm; operator; framework

1 引 言

最近几年,不同于传统神经网络的一些形态学神经网络(Morphological Neural Networks,MNN)模型及其应用逐渐兴起[1-6].最初有用的MNN的尝试出现在文献[7].之后,只有少数论文涉及MNN. Davidson利用MNN解决模式识别和目标分类问题[8-9]. Gader等人设计了一个有趣的网络,它由一个MNN和一个传统前向网络组成,可用于特征抽取和分类问题[10-11].所有这些研究都为各自特定的应用设计了多层MNN.一个更加易于理解和更加严格的MNN出现在文献[12],该文证明MNN有能力解决任何传统计算问题. 1998年,Ritter等人提出了形态学联想记忆(Morphological Associative Memories,MAM),这是以前没有详细讨论过的一类网络[13]. 1999年,他们又进一步提出了形态双向联想记忆(Morphological Bidirectional Associative Memories,MBAM)[14].

MAM是基于代数格结构(R, $\wedge$, $\vee$, $+$)或者说基于形态学运算的.与传统的半线性模型(例如Hopfield网络)相比,MAM的行为更像人类的联想记忆.一个模式一旦被记忆,那么当该模式提供给网络的时候,回忆就是即刻的.在没有噪声的情况下,自联想MAM(auto-MAM)总是能够对任何数量通过编程而被记忆的模式提供完全回忆. auto-MAM $\boldsymbol{M}_{XX}$对由于膨胀噪声而变得面目全非的模式表现出良好的健壮性;而auto-MAM $\boldsymbol{W}_{XX}$则在对由于腐蚀变化而被破坏的模式的回忆中表现出是健壮的.

中国学者对MAM的研究亦卓有成效. 2002年,陈等人通过定义复数域上的偏序关系$\leq'$和$\leq''$,将Ritter的实域MAM(Real MAM,RMAM)推广至复域MAM(Complex MAM,CMAM),从而可以处理复模式或复信号[15].不过,其形态学本质并未改变.

2003年,王敏、王士同等人提出了基于形态学和模糊运算的模糊形态学联想记忆模型(Fuzzy Morphological Associative Memories,FMAM)[16].源于MAM的基本思想,FMAM使用了两种基本的形态学运算($\wedge$, $\cdot$),($\vee$, $\cdot$). FMAM解决了MAM的模糊规则记忆问题.自联想FMAM和自联想MAM一样有着同样诱人的优点,例如无限存储能力,一步回忆记忆以及对腐蚀噪声或膨胀噪声的良好容限.然而它们对于既有腐蚀又有膨胀的含混合噪声的模式的回忆是脆弱的.为克服这些缺点,2005年,Wang和Chen针对auto-MAM通过对输入模式的适当处理,提出基于核映射的增强的模糊形态学联想记忆(Enhanced FMAM,EFMAM)[17]. 2007年,王敏等人对EFMAM又进行了改进尝试,约简了网络规模,但其模式识别的性能相对于原始EFMAM并未提高.

2005年,吴、王两人提出了模糊形态双向联想记忆网络FMBAM,解决了双向联想记忆模糊规则、提高存储能力以及二值图像抗随机噪声问题[18]. 2006年,他们又研究了灰度图像的抗随机噪声问题,提出构造灰度图像的核需要满足的条件,并给出寻找核的方法和途径,从而对含有一定随机噪声的灰度图像具有抗噪和完全记忆的能力,并应用于细胞图像的联想和识别[19].

2008年,Valle和Sussner重点研究了FMAM,并给出了FMAM的一般框架[2].

按照面向对象(Object-Oriented,OO)的方法和观点来看,联想记忆(AM)是一个类(Class),MAM也是一个类且是AM的一个子类(Subclass). RMAM、MBAM、CMAM、FMAM、EFMAM、FMBAM等都是该子类的实例对象(Object).它们在修改父类属性和方法、形成特定对象的同时,都继承了父类最基本的属性和方法,即形态学联想记忆的本质属性和方法.

在较细的信息粒度上看,MAM对象为数不少,各有千秋.但在较粗的信息粒度上模糊地、粗糙地看,却又基本相同:它们都有相同的理论基础,即形态学联想记忆的理论基础,因而,在较高的抽象层级上,是能够统一在一起的.同时,有专家指出,联想记忆统一框架的建立是当前的研究重点之一[20].迄今为止,人们尚无全面地、系统地研究和解决MAM统一框架问题.有鉴于此,论文试图建立起一个MAM理论框架.人们对事物的抽象程度越高,对该事物的认识就越深,从而,就有可能得到一些原来没有的新东西,例如,得到一些新的概念、新的方法.本文从分析MAM的计算基础出发,抽取其最本质的属性和操作,定义了一些形态学联想记忆范式和算

子，提炼并证明了一些重要定理，从而初步形成了一个 MAM 的理论框架.

2 计算基础

传统人工神经网络模型由网络拓扑、结点特征以及训练或学习规则所确定.这些模型中使用的基本代数系统是实数集合 R 上的加和乘运算以及支配这些运算的法则.称这个代数系统为环，一般用 $(R,+,\times)$ 表示.

在 Ritter 等人所提出的 RMAM 中，所使用的基本计算基于代数格结构 $(R,\wedge,\vee,+)$，其中，符号 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别表示极小和极大运算.在 FMAM 和 EFMAM 中，基本的计算基于代数格结构 $(R_+,\wedge,\vee,\cdot)$，$(R_+=(0,\infty))$.而在 CMAM 中，基本计算基于偏序格结构 $(C,\wedge,\vee,+)$，其中，C 是复数域上定义的偏序集[15].

在统一的形态学联想记忆框架（Unified Framework of Morphological Associative Memories，UFMAM）中，基本计算基于代数格结构 $(U,\wedge,\vee,\bigcirc)$，其中，U 代表非空集合或域，例如 $U=R$，$U=R_+$，或 $U=C$；$\bigcirc$ 代表在 U 上封闭的运算，例如，$\bigcirc=+$、$-$，或 $\bigcirc=\cdot$、$/$.

在 UFMAM 中，对象满足以下可纳条件：

(1) 有序性：设 $a,b\in U$，则 $a\leq b$，或 $b\leq a$；

(2) 封闭性：设 $a,b\in U$，$a\bigcirc b=r$，则 $r\in U$；

(3) 正确性：遵循正确的运算法则.

满足以上条件的 MAM 对象，对 UFMAM 来说是可纳的.典型地，如果 $U=R$，$\bigcirc=+$，那么 $(U,\wedge,\vee,\bigcirc)=(R,\wedge,\vee,+)$，即构成了 RMAM 的计算基础；如果 $U=R_+$ 且 $\bigcirc=\cdot$，那么 $(U,\wedge,\vee,\bigcirc)=(R_+,\wedge,\vee,\cdot)$，即组成了 FMAM 和 EFMEM 的计算基础；如果 $U=C$，$O=+$，则 $(U,\wedge,\vee,\bigcirc)=(C,\wedge,\vee,+)$，即构成了 CMAM 的计算基础.

3 形态学联想记忆范式和算子

3.1 RMAM，CMAM，FMAM 和 EFMAM 的算子

首先，我们来分析一下典型的、有代表性意义的 RMAM、CMAM、FMAM 和 EFMAM 中的算子.

如前所述，RMAM 基于格代数结构 $(R,\wedge,\vee,+)$.给定一对向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in R^n$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)'\in R^m$，当对网络提供输入向量 $\boldsymbol{x}$，那么，将回忆向量 $\boldsymbol{y}$ 的形态学联想记忆定义如下：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{y}\boxed{\wedge}(-\boldsymbol{x})'=\begin{pmatrix} y_1-x_1 & \cdots & y_1-x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m-x_1 & \cdots & y_m-x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\boldsymbol{W}$ 被称为 $\boldsymbol{y}$ 和 $(-\boldsymbol{x})'$ 的极小积，$\boldsymbol{W}$ 满足方程 $\boldsymbol{W}\boxed{\vee}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即有

$$\boldsymbol{W}\boxed{\vee}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \bigvee_{i=1}^{n} y_1-x_i+x_i \\ \vdots \\ \bigvee_{i=1}^{n} y_m-x_i+x_i \end{pmatrix}=\boldsymbol{y} \tag{2}$$

同样，也可以使用极大算子 $\boxed{\vee}$ 定义 $\boldsymbol{y}$ 和 $(-\boldsymbol{x})'$ 的极大积，即另一个形态学联想记忆 $\boldsymbol{M}$：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{y}\boxed{\vee}(-\boldsymbol{x})'=\begin{pmatrix} y_1-x_1 & \cdots & y_1-x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m-x_1 & \cdots & y_m-x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{M}$ 满足方程 $\boldsymbol{M}\boxed{\wedge}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即有

$$\boldsymbol{M}\boxed{\wedge}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \bigwedge_{i=1}^{n} y_1-x_i+x_i \\ \vdots \\ \bigwedge_{i=1}^{n} y_m-x_i+x_i \end{pmatrix}=\boldsymbol{y} \tag{4}$$

类似地，设 $(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1),(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2),\cdots,(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k)$ 是 k 个向量对，$\boldsymbol{x}^\xi=(x_1^\xi,x_2^\xi,\cdots,x_n^\xi)'\in R^n$，$\boldsymbol{y}^\xi=(y_1^\xi,y_2^\xi,\cdots,y_m^\xi)'\in R^m$，$\xi=1,2,\cdots,k$.对于一个给定的模式联想集合 $\{(\boldsymbol{x}^\xi,\boldsymbol{y}^\xi):\xi=1,2,\cdots,k\}$，可以定义一对联想模式矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，其中 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k)$，$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}^k\}$.这样，$\boldsymbol{X}$ 是 $n\times k$ 维矩阵，它的第 i,j 项是 x_i^j；$\boldsymbol{Y}$ 是 $m\times k$ 维矩阵，它的第 i,j 项是 y_i^j.对每一对矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，定义两个自然的形态学 $m\times n$ 维记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 和 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 如下：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_{XY}&=\bigwedge_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\wedge}(-\boldsymbol{x}^\xi)'] \\ \boldsymbol{M}_{XY}&=\bigvee_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\vee}(-\boldsymbol{x}^\xi)'] \end{aligned} \tag{5}$$

很明显，$\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\wedge}(-\boldsymbol{x}^\xi)'=\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\vee}(-\boldsymbol{x}^\xi)'$.由此定义，下式成立：

$$\boldsymbol{W}_{XY}\leq\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\wedge}(-\boldsymbol{x}^\xi)'=\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\vee}(-\boldsymbol{x}^\xi)'\leq\boldsymbol{M}_{XY},\quad \forall\xi=1,2,\cdots,k \tag{6}$$

根据方程(2)、(4)和(5)，不等式(6)隐含着

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}_{XY}\boxed{\vee}\boldsymbol{x}^\xi&\leq[\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\wedge}(-\boldsymbol{x}^\xi)']\boxed{\vee}\boldsymbol{x}^\xi=\boldsymbol{y}^\xi \\ &=[\boldsymbol{y}^\xi\boxed{\vee}(-\boldsymbol{x}^\xi)']\boxed{\wedge}\boldsymbol{x}^\xi\leq\boldsymbol{M}_{XY}\boxed{\wedge}\boldsymbol{x}^\xi \end{aligned} \tag{7}$$

$\forall\xi=1,2,\cdots,k$.或者，等价地有

$$\boldsymbol{W}_{XY}\boxed{\vee}\boldsymbol{X}\leq\boldsymbol{Y}\leq\boldsymbol{M}_{XY}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X} \tag{8}$$

如果 $\boldsymbol{W}_{XY}\boxed{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，那么 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 称为对 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\vee}$

完全回忆记忆;如果 $\boldsymbol{M}_{XY}\boxed{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,那么 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 称为对 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的 $\boxed{\wedge}$ 完全回忆记忆.

在 CMAM 中,基本计算基于复数偏序格结构 $(C,\wedge,\vee,+)$. 与 RMAM 相比,除了论域被扩展(但仍满足可纳条件)、用符号 $\triangle$ 代替 $\boxed{\wedge}$、用符号 $\triangledown$ 代替 $\boxed{\vee}$ 之外,其它方面与 RMAM 基本相同.

FMAM 和 EFMAM 中的基本计算基于格结构 $(R_+,\wedge,\vee,\cdot)$,$(R_+=(0,\infty))$. 如果输入向量 $\boldsymbol{x}^l=(x_1^l,x_2^l,\cdots,x_n^l)'$ 定义在 R_+^n,输出向量 $\boldsymbol{y}^l=(y_1^l,y_2^l,\cdots,y_m^l)'$ 定义在 R_+^m,通过使用某些变换,例如使用 $\exp(x)$ 和 $\exp(y)$,那么可以将输入向量和输出向量分别变换到 R_+^n 和 R_+^m. 设 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k)$,$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}^k\}$,对每一对矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,两个新的形态学 $m\times n$ 记忆 $\boldsymbol{A}_{XY}$ 和 $\boldsymbol{B}_{XY}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{A}_{XY}=\bigwedge_{l=1}^{k}(\boldsymbol{y}^l\owedge(\boldsymbol{x}^l)^{-1}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B}_{XY}=\bigvee_{l=1}^{k}(\boldsymbol{y}^l\ovee(\boldsymbol{x}^l)^{-1}) \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{x}^l)^{-1}=\left(\frac{1}{x_1^l},\frac{1}{x_2^l},\cdots,\frac{1}{x_n^l}\right),\ x_i^l>0,\ \forall i=1,\cdots,n \tag{11}$$

$$\boldsymbol{y}^l\owedge(\boldsymbol{x}^l)^{-1}=\boldsymbol{y}^l\ovee(\boldsymbol{x}^l)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{y_1^l}{x_1^l} & \cdots & \dfrac{y_1^l}{x_n^l}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{y_m^l}{x_1^l} & \cdots & \dfrac{y_m^l}{x_n^l}\end{pmatrix} \tag{12}$$

其中 $\owedge$ 和 $\ovee$ 分别表示模糊集合理论中常用的模糊组合运算 $(\wedge,\cdot)$ 和 $(\vee,\cdot)$.

在 FMAM 和 EFMAM 中,回忆由下式给出:

$$\boldsymbol{A}_{XY}\ovee\boldsymbol{x}^l=\bigwedge_{l=1}^{k}(\boldsymbol{y}^l\owedge(\boldsymbol{x}^l)^{-1})\ovee\boldsymbol{x}^l \tag{13}$$

$$\boldsymbol{B}_{XY}\owedge\boldsymbol{x}^l=\bigvee_{l=1}^{k}(\boldsymbol{y}^l\ovee(\boldsymbol{x}^l)^{-1})\owedge\boldsymbol{x}^l \tag{14}$$

通过以上典型分析,容易看出,在 MAM 类的记忆和回忆中存在互逆运算. 对于 RMAM 和 CMAM,记忆和回忆中的互逆运算分别是 $-$ 和 $+$;对于 FMAM 和 EFMAM,记忆和回忆中的互逆运算分别是/和 $\times$. 另外我们还注意到,MAM 类的记忆和回忆中还存在另一对互逆运算,即取大 $(\vee)$ 和取小 $(\wedge)$ 运算. 符号对 $(\boxed{\vee},\boxed{\wedge})$、$(\triangledown,\triangle)$、$(\ovee,\owedge)$ 是三对包含取大和取小操作的互逆算符,分别用在 RMAM、CMAM、FMAM 和 EFMAM 中.

3.2 形态学范式和算子

3.2.1 形态学范式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times p$ 矩阵,其每一项 $a_{ik}\in U$,$\boldsymbol{B}$ 是 $p\times n$ 矩阵,其每一项 $b_{kj}\in U$,其中 $i=1,2,\cdots,m$;$k=1,2,\cdots,p$;$j=1,2,\cdots,n$. 我们有以下定义 1 和 2.

定义 1. 形态学极大积范式 $M(\cdot,\cdot)$ 是一个二元运算 $M(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\underset{\vee}{\bigcirc}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,其定义由下式给出:

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{p}a_{ik}\bigcirc b_{kj}=(a_{i1}\bigcirc b_{1j})\vee(a_{i2}\bigcirc b_{2j})\vee\cdots\vee(a_{ip}\bigcirc b_{pj}) \tag{15}$$

称 $\underset{\vee}{\bigcirc}$ 为形态学 $\bigcirc$ 极大积算子,c_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素,符号 $\bigcirc$ 表示 U 上封闭的运算,例如,可以是 $+$、$-$ 运算,它们在 $U=R$ 上是封闭的;也可以是 $\times$ 或/运算,它们在 $U=R_+$ 上是封闭的(0 不能作除数).

定义 2. 形态学极小积范式 $W(\cdot,\cdot)$ 是一个二元运算 $W(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\underset{\wedge}{\bigcirc}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$,其定义由下式给出:

$$d_{ij}=\bigwedge_{k=1}^{p}(a_{ik}\bigcirc b_{kj})=(a_{i1}\bigcirc b_{1j})\wedge(a_{i2}\bigcirc b_{2j})\wedge\cdots\wedge(a_{ip}\bigcirc b_{pj}) \tag{16}$$

称 $\underset{\wedge}{\bigcirc}$ 为形态学 $\bigcirc$ 极小积算子. d_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的元素,$\bigcirc$ 的含义与定义 1 相同.

又设 $(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1)$,$(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2)$,$\cdots$,$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k)$ 是 k 个向量对,$\boldsymbol{x}^\xi=(x_1^\xi,x_2^\xi,\cdots,x_n^\xi)'\in U^n$,$\boldsymbol{y}^\xi=(y_1^\xi,y_2^\xi,\cdots,y_m^\xi)'\in U^m$,$\xi=1,2,\cdots,k$. 对于一个给定的模式联想集合 $\{(\boldsymbol{x}^\xi,\boldsymbol{y}^\xi):\xi=1,2,\cdots,k\}$ 和一对联想模式矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,其中 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k)$,$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}^k)$,则我们有以下定义 3 和 4.

定义 3. 对每一对矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,形态学 $\bigcirc$ 极小积记忆范式 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{W}_{XY}=\boldsymbol{Y}\underset{\wedge}{\bigcirc}\boldsymbol{X}'=\bigwedge_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^\xi\underset{\wedge}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)']=\bigwedge_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix}y_1^\xi\bigcirc x_1^\xi & \cdots & y_1^\xi\bigcirc x_n^\xi\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_m^\xi\bigcirc x_1^\xi & \cdots & y_m^\xi\bigcirc x_n^\xi\end{pmatrix} \tag{17}$$

定义 4. 对每一对矩阵 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,形态学 $\bigcirc$ 极大积记忆范式 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{M}_{XY}=\boldsymbol{Y}\underset{\vee}{\bigcirc}\boldsymbol{X}'=\bigvee_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^\xi\underset{\vee}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)']=\bigvee_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix}y_1^\xi\bigcirc x_1^\xi & \cdots & y_1^\xi\bigcirc x_n^\xi\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_m^\xi\bigcirc x_1^\xi & \cdots & y_m^\xi\bigcirc x_n^\xi\end{pmatrix} \tag{18}$$

因为 $\boldsymbol{y}^\xi\underset{\wedge}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)'=\boldsymbol{y}^\xi\underset{\vee}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)'$,因此,根据定义,$\boldsymbol{W}_{XY}$ 和 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 满足下式

$$\boldsymbol{W}_{XY}\le\boldsymbol{y}^\xi\underset{\wedge}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)'=\boldsymbol{y}^\xi\underset{\vee}{\bigcirc}(\boldsymbol{x}^\xi)'\le\boldsymbol{M}_{XY}\quad\forall\xi=1,2,\cdots,k \tag{19}$$

设 $\bigcirc$ 和 $\ominus$ 是互逆运算,即如果 $\bigcirc=+$ 或 $\times$,那么 $\ominus=-$ 或 $\div$;反之,如果 $\bigcirc=-$ 或 $\div$,那么 $\ominus=+$ 或

$\times$，则 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 和 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 满足下式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{XY}\overset{\ominus}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi} &\le [\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\circ}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\overset{\ominus}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi} = \boldsymbol{y}^{\xi}\\ &= [\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\circ}{\vee}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\overset{\ominus}{\wedge}\boldsymbol{x}^{\xi} \le \boldsymbol{M}_{XY}\overset{\ominus}{\wedge}\boldsymbol{x}^{\xi},\\ &\forall \xi = 1,2,\cdots,k \end{aligned} \tag{20}$$

等价于

$$\boldsymbol{W}_{XY}\overset{\ominus}{\vee}\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{M}_{XY}\overset{\ominus}{\wedge}\boldsymbol{X} \tag{21}$$

定义 5.　一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 被称为是一个对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\circ}{\vee}$-完全回忆记忆，当且仅当 $\boldsymbol{A}\overset{\circ}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$；矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 被称为是一个对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\circ}{\wedge}$-完全回忆记忆，当且仅当 $\boldsymbol{B}\overset{\circ}{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

3.2.2　形态学算子

设 U 为论域，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times p$ 矩阵，其每一项 $a_{ik}\in U$，$\boldsymbol{B}$ 是 $p\times n$ 矩阵，其每一项 $b_{kj}\in U$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；$k=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,n$. 根据定义 1 和 2，当○分别等于＋、－、·、/时，可分别得到不同的形态学算子.

定义 6.　形态学＋极大积算子$\overset{+}{\vee}$是一个二元运算 $\boldsymbol{A}\overset{+}{\vee}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，其定义由下式给出：

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \bigvee_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{kj})\\ &= (a_{i1}+b_{1j}) \vee (a_{i2}+b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip}+b_{pj})\end{aligned} \tag{22}$$

类似地，可以定义形态学－极大积算子$\overset{-}{\vee}$、形态学·极大积算子$\overset{\cdot}{\vee}$和形态学/极大积算子$\overset{/}{\vee}$.

定义 7.　形态学＋极小积算子$\overset{+}{\wedge}$是一个二元运算 $\boldsymbol{A}\overset{+}{\wedge}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，其定义由下式给出：

$$\begin{aligned}d_{ij} &= \bigwedge_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{kj})\\ &= (a_{i1}+b_{1j}) \wedge (a_{i2}+b_{2j}) \wedge \cdots \wedge (a_{ip}+b_{pj})\end{aligned} \tag{23}$$

类似地，可以定义形态学－极小积算子$\overset{-}{\wedge}$、形态学·极小积算子$\overset{\cdot}{\wedge}$和形态学/极小积算子$\overset{/}{\wedge}$.

设$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1),(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2),\cdots,(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k)$是 k 个向量对，$\boldsymbol{x}^{\xi}=(x_1^{\xi},x_2^{\xi},\cdots,x_n^{\xi})'\in U^n$，$\boldsymbol{y}^{\xi}=(y_1^{\xi},y_2^{\xi},\cdots,y_m^{\xi})'\in U^m$，$\xi=1,2,\cdots,k$. 对于一个给定的模式联想集合$\{(\boldsymbol{x}^{\xi},\boldsymbol{y}^{\xi}):\xi=1,2,\cdots,k\}$和一对联想模式矩阵$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，其中 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^k)$，$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}^1,\cdots,\boldsymbol{y}^k)$，我们有以下定义.

定义 8.　对每一对矩阵$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，形态学－极小积记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{XY} &= \boldsymbol{Y}\overset{-}{\wedge}\boldsymbol{X}' = \bigwedge_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{-}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\\ &= \bigwedge_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix} y_1^{\xi}-x_1^{\xi} & \cdots & y_1^{\xi}-x_n^{\xi}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_m^{\xi}-x_1^{\xi} & \cdots & y_m^{\xi}-x_n^{\xi}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{24}$$

实质上，这就是 RMAM 和 CMAM 中定义的记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$. 类似地，可以定义形态学/极小积记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$.

定义 9.　形态学/极小积记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{XY} &= \boldsymbol{Y}\overset{/}{\wedge}\boldsymbol{X}' = \bigwedge_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{/}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\\ &= \bigwedge_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix} {y_1}^{\xi}/{x_1}^{\xi} & \cdots & {y_1}^{\xi}/{x_n}^{\xi}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {y_m}^{\xi}/{x_1}^{\xi} & \cdots & {y_m}^{\xi}/{x_n}^{\xi}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{25}$$

实质上，这就是 FMAM(EFMAM)中定义的记忆 $\boldsymbol{A}_{XY}(\boldsymbol{A}_{XX})$. 当然，这里我们并不排除用其余的形态学算子$\overset{+}{\wedge}$和$\overset{\cdot}{\wedge}$定义形态学记忆 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 的可能性.

定义 10.　形态学－极大积记忆 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{XY} &= \boldsymbol{Y}\overset{-}{\vee}\boldsymbol{X}' = \bigvee_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{-}{\vee}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\\ &= \bigvee_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix} y^{\xi}-x_1^{\xi} & \cdots & y_1^{\xi}-x_n^{\xi}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_m^{\xi}-x_1^{\xi} & \cdots & y_m^{\xi}-x_n^{\xi}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{26}$$

实质上，这就是 RMAM 和 CMAM 中定义的记忆 $\boldsymbol{M}_{XY}$. 类似地，我们可以定义形态学/极大积记忆 $\boldsymbol{M}_{XY}$.

定义 11.　形态学/极大积记忆 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{XY} &= \boldsymbol{Y}\overset{/}{\vee}\boldsymbol{X}' = \bigvee_{\xi=1}^{k}[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{/}{\vee}(\boldsymbol{x}^{\xi})']\\ &= \bigvee_{\xi=1}^{k}\begin{pmatrix} {y_1}^{\xi}/{x_1}^{\xi} & \cdots & {y_1}^{\xi}/{x_n}^{\xi}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ {y_m}^{\xi}/{x_1}^{\xi} & \cdots & {y_m}^{\xi}/{x_n}^{\xi}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{27}$$

实质上，这就是 FMAM(EFMAM)中定义的记忆 $\boldsymbol{B}_{XY}(\boldsymbol{B}_{XX})$. 同样，这里我们并不排除用其余的形态学算子$\overset{+}{\vee}$和$\overset{\cdot}{\vee}$定义形态学记忆 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 的可能性.

定义 12.　设 $\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{z}^1,\boldsymbol{z}^2,\cdots,\boldsymbol{z}^k)$是一个 $n\times k$ 矩阵. 称 $\boldsymbol{Z}$ 是对于$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的核，当且仅当满足下面两个条件：

(1) $\boldsymbol{M}_{ZZ}\overset{\circ}{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$；

(2) $\boldsymbol{W}_{ZY}\overset{\circ}{\vee}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$.

如果 $\boldsymbol{Z}$ 是对于$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的核，那么必然有

$$\boldsymbol{W}_{ZY}\overset{\circ}{\vee}(\boldsymbol{M}_{ZZ}\overset{\circ}{\wedge}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{W}_{ZY}\overset{\circ}{\vee}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}.$$

4　形态学联想记忆定理

文献[13]给出 7 个关于 RMAM 的定理，文献[15]给出 5 个关于 CMAM 的定理. 在文献[16]中，有 6 个关于 FMAM 的定理，而在文献[17]中，又有 4 个关于 EFMAM 的定理. 另外，在文献[18]和文献[19]中，也分别给出了 4 个和 5 个 FMBAM 定

理. 这些 MAM 定理加起来多达 30 余个. 然而,从面向对象的观点来看,可以归纳并抽象为少数几个重要的基本定理类,并统一在一个 MAM 框架中. 任何具体的、特定的定理都是对基本定理类的继承、修改、扩展、变化或派生. 抽象的基本定理类广泛地适用于 MAM 类对象,而作为 MAM 类对象,其具有典型性和普遍意义的代表有两个,即 RMAM 和 FMAM. 下面,在统一框架的基础上,给出这些定理.

注意,对于理解这些定理及其证明来说,以下几点是很关键的:

(1) 在RMAM(CMAM)中,记忆时用算子$\overset{\bigcirc}{\wedge}=\overset{-}{\wedge}$或$\overset{\bigcirc}{\vee}=\overset{-}{\vee}$,即$\bigcirc=-$;回忆时用逆算子$\overset{\ominus}{\vee}=\overset{+}{\vee}$或$\overset{\ominus}{\wedge}=\overset{+}{\wedge}$,即$\ominus=+$. 在 FMAM(EFMAM)中,记忆时,用算子$\overset{\bigcirc}{\wedge}=\overset{/}{\wedge}$或$\overset{\bigcirc}{\vee}=\overset{/}{\vee}$,即$\bigcirc=/$;回忆时用逆算子$\overset{\ominus}{\vee}=\overset{\cdot}{\vee}$或$\overset{\ominus}{\wedge}=\overset{\cdot}{\wedge}$,即$\ominus=\cdot$.

(2) 对自联想 auto-RMAM 和 auto-CMAM,有 $w_{ii}=m_{ii}=0$, $\forall i=1,2,\cdots,n$;对自联想 auto-FMAM 和 auto-EFMAM,有 $w_{ii}=m_{ii}=1$.

(3) U 是一个抽象域,$U_{\mathrm{RMAM}}=R$, $U_{\mathrm{FMAM}}=R_{+}$, $U_{\mathrm{CMAM}}=C$. RMAM 运算在 R 上是封闭的,FMAM 运算在 R_{+} 上是封闭的. 对于良好定义的偏序集 C,例如 $C=R$,或 $C=J$(纯虚数集)等,CMAM 运算在 C 上亦封闭.

定理 1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\vee}$完全回忆记忆,$\boldsymbol{B}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\wedge}$完全回忆记忆,那么

$$\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\le\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\le\boldsymbol{B},$$

且

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\wedge}\boldsymbol{X}\tag{28}$$

证明. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\vee}$完全回忆记忆,那么,$(\boldsymbol{A}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi})_i=y_i^{\xi}$, $\forall\xi=1,2,\cdots,k$, $\forall i=1,2,\cdots,m$. 等价地有

$$\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\bigcirc x_j^{\xi})=y_i^{\xi},$$

$$\forall\xi=1,2,\cdots,k \text{ 和 } \forall i=1,2,\cdots,m.$$

对于任意索引 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,它满足

$$a_{ij}\bigcirc x_j^{\xi}\le y_i^{\xi},\ \forall\xi=1,2,\cdots,k$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}\le y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi},\ \forall\xi=1,2,\cdots,k$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}\le\bigwedge_{\xi=1}^{k}(y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi})=w_{ij}\tag{29}$$

这表明,$\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$. 按照式(21),我们现在有 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{Y}$. 因此,$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

类似地,可以证明,如果 $\boldsymbol{B}$ 是对于$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\wedge}$完全回忆记忆,那么 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\le\boldsymbol{B}$,同时,$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$. 这样,由式(19),我们有

$$\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\le\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\le\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\wedge}\boldsymbol{X}$$

证毕.

该定理表明 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$ 是所有$\overset{\bigcirc}{\vee}$完全回忆记忆的最小上界,$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}$ 是所有$\overset{\bigcirc}{\wedge}$完全回忆记忆的最大下界.

定理 2. $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\vee}$完全记忆,当且仅当对每一个 $\xi=1,2,\cdots,k$,矩阵$[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\ominus}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']-\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$的每一行包含一个零项;类似地,$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\wedge}$完全记忆,当且仅当对每一个 $\xi=1,2,\cdots,k$,矩阵 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}-[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\ominus}{\vee}(\boldsymbol{x}^{\xi})']$的每一行都包含一个零项.

在以下证明过程中,我们只针对记忆 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$(或 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}$)进行. 另一半证明可以用类似的方法得到.

证明. $\forall\xi=1,2,\cdots,k$ 和 $\forall i=1,2,\cdots,m$, $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$ 是对$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的$\overset{\bigcirc}{\vee}$完全记忆

$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi})_i=\boldsymbol{y}_i^{\xi}$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{y}_i^{\xi}-(\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi})_i=0$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{y}_i^{\xi}-\bigvee_{j=1}^{n}(w_{ij}\bigcirc x_j^{\xi})=0$$

$$\Leftrightarrow\bigwedge_{j=1}^{n}(y_i^{\xi}-(w_{ij}\bigcirc x_j^{\xi}))=0$$

$$\Leftrightarrow\bigwedge_{j=1}^{n}(y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi}-w_{ij})=0$$

$$\Leftrightarrow\bigwedge_{j=1}^{n}([\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\ominus}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']-\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}})_{ij}=0\tag{30}$$

这最后的等式集合为真,当且仅当对每一个 $\xi=1,2,\cdots,k$ 和每一个 $i=1,2,\cdots,m$,矩阵$[\boldsymbol{y}^{\xi}\overset{\ominus}{\wedge}(\boldsymbol{x}^{\xi})']-\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}$的每一行至少包含一个零项. 证毕.

推论 1. $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,当且仅当对每一个行索引 $i=1,2,\cdots,m$ 和每一个 $\gamma\in\{1,2,\cdots,k\}$,存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$x_j^{\gamma}=\bigvee_{\xi=1}^{k}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})\bigcirc y_i^{\gamma}\tag{31}$$

类似地,$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,当且仅当对每一个行索引 $i=1,2,\cdots,m$ 和每一个 $\gamma\in\{1,2,\cdots,k\}$,存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$x_j^{\gamma}=\bigwedge_{\xi=1}^{k}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})\bigcirc y_i^{\gamma}\tag{32}$$

证明. 按照定理 2,$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{XY}}\overset{\bigcirc}{\vee}\boldsymbol{x}^{\xi}=\boldsymbol{y}^{\xi}$, $\forall\xi=1,2,\cdots,k$,当且仅当对每一个行索引 $i=1,2,\cdots,m$ 和每一个 $\gamma\in\{1,2,\cdots,k\}$,存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$y_i^{\gamma}\ominus x_j^{\gamma}=w_{ij}=\bigwedge_{\xi=1}^{k}(y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi})\tag{33}$$

该方程成立当且仅当

$$x_j^{\gamma}\ominus y_i^{\gamma}=\bigvee_{\xi=1}^{k}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})\tag{34}$$

等价地,当且仅当

$$x_j^{\gamma}=\bigvee_{\xi=1}^{k}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})\bigcirc y_i^{\gamma}$$

证毕.

定理 3. 设 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}$ 表示模式 $\boldsymbol{x}^{\gamma}$ 的一个含噪声样

本，那么，$\boldsymbol{W}_{XY}\overset{\bigcirc}{\vee}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}=\boldsymbol{y}^{\gamma}$，当且仅当

$$\tilde{x}_j^{\gamma}\le x_j^{\gamma}\vee\bigwedge_{i=1}^{m}\big(\bigvee_{\xi\ne\gamma}[y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi}]\big),\ \forall j=1,2,\cdots,n \tag{35}$$

同时，对每一个行索引 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，存在一个列索引 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$使得

$$\tilde{x}_{j_i}^{\gamma}=x_{j_i}^{\gamma}\vee\big(\bigvee_{\xi\ne\gamma}[y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_{j_i}^{\xi}]\big) \tag{36}$$

类似地，$\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}=\boldsymbol{y}^{\gamma}$ 当且仅当

$$\tilde{x}_j^{\gamma}\ge x_j^{\gamma}\wedge\bigvee_{i=1}^{m}\big(\bigwedge_{\xi\ne\gamma}[y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi}]\big),\ \forall j=1,2,\cdots,n \tag{37}$$

同时，对每一个行索引 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，存在一个列索引 $j_i\in\{1,2,\cdots,n\}$使得

$$\tilde{x}_{j_i}^{\gamma}=x_{j_i}^{\gamma}\wedge\big(\bigwedge_{\xi\ne\gamma}[y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_{j_i}^{\xi}]\big) \tag{38}$$

证明．　(1)注意到，对于 RMAM 和 CMAM，记忆和回忆中互逆的运算分别是$\ominus=-$和$\bigcirc=+$；对于 FMAM 和 EFMAM，记忆和回忆中互逆的运算分别是$\ominus=/$和$\bigcirc=\cdot$．设 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}$ 表示模式 $\boldsymbol{x}^{\gamma}$ 的一个含噪声样本，对于 $\gamma=1,2,\cdots,k$，$\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}=\boldsymbol{y}^{\gamma}$，那么

$$y_i^{\gamma}=(\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma})_i=\bigwedge_{l=1}^{n}(m_{il}\bigcirc\tilde{x}_l^{\gamma})\le m_{ij}\bigcirc\tilde{x}_j^{\gamma},$$
$$\forall i=1,2,\cdots,m\text{ 和 }\forall j=1,2,\cdots,n \tag{39}$$

因此

$$\tilde{x}_j^{\gamma}\ge y_i^{\gamma}\ominus m_{ij},\ \forall i=1,2,\cdots,m,\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge\bigvee_{i=1}^{m}(y_i^{\gamma}\ominus m_{ij}),\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge\bigvee_{i=1}^{m}[y_i^{\gamma}\ominus\bigvee_{\xi=1}^{k}(y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi})],\ \forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge\bigvee_{i=1}^{m}[y_i^{\gamma}\bigcirc\bigwedge_{\xi=1}^{k}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})],\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge\bigvee_{i=1}^{m}[y_i^{\gamma}\bigcirc\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(x_j^{\xi}\ominus y_i^{\xi})\wedge(x_j^{\gamma}\ominus y_i^{\gamma})],$$
$$\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge\bigvee_{i=1}^{m}[\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi})\wedge x_j^{\gamma}],$$
$$\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge x_j^{\gamma}\wedge\bigvee_{i=1}^{m}[\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi})],$$
$$\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\tilde{x}_j^{\gamma}\ge x_j^{\gamma}\wedge[\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi})],$$
$$\forall j=1,2,\cdots,n,\forall i=1,2,\cdots,m \tag{40}$$

这表明不等式(37)被满足．

设对于 $i=1,2,\cdots,m$，不等式集合(40)不包含等号，即假定存在一个行索引 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$\tilde{x}_j^{\gamma}>x_j^{\gamma}\wedge[\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi})],\forall j=1,2,\cdots,n \tag{41}$$

那么

$$(\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma})_i=\bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij}\bigcirc\tilde{x}_j^{\gamma})$$
$$>\bigwedge_{j=1}^{n}[m_{ij}\bigcirc x_j^{\gamma}\wedge(\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi}))]$$
$$=\bigwedge_{j=1}^{n}[m_{ij}\bigcirc(\bigwedge_{\xi=1}^{k}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi}))]$$
$$=\bigwedge_{j=1}^{n}[m_{ij}\bigcirc y_i^{\gamma}\ominus\bigvee_{\xi=1}^{k}(y_i^{\xi}\ominus x_j^{\xi})]$$
$$=\bigwedge_{j=1}^{n}[m_{ij}\bigcirc y_i^{\gamma}\ominus m_{ij}]$$
$$=y_i^{\gamma} \tag{42}$$

因此，$\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}>\boldsymbol{y}^{\gamma}$，这与 $\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}=\boldsymbol{y}^{\gamma}$ 相矛盾．从而表明，对每一行索引 i 必然存在一个列索引 j_i，满足式(38)．

(2)设

$$\tilde{x}_j^{\gamma}\ge x_j^{\gamma}\wedge\bigvee_{i=1}^{m}[\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_j^{\xi})],\forall j=1,2,\cdots,n.$$

由第一部分的证明可知，该不等式为真当且仅当

$$\tilde{x}_j^{\gamma}\ge y_i^{\gamma}\ominus m_{ij},\forall i=1,2,\cdots,m,\forall j=1,2,\cdots,n$$

或者，等价地，当且仅当

$$m_{ij}\bigcirc\tilde{x}_j^{\gamma}\ge y_i^{\gamma},\ \forall i=1,2,\cdots,m\text{ 和 }\forall j=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow\bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij}\bigcirc\tilde{x}_j^{\gamma})\ge y_i^{\gamma},\forall i=1,2,\cdots,m$$
$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma})_i\ge y_i^{\gamma},\forall i=1,2,\cdots,m \tag{43}$$

这意味着 $\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}\ge\boldsymbol{y}^{\gamma}$，$\forall\gamma=1,2,\cdots,k$．如果我们能够证明 $\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}\le\boldsymbol{y}^{\gamma}$，$\forall\gamma=1,2,\cdots,k$，那么就能够证明 $\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}=\boldsymbol{y}^{\gamma}$，$\forall\gamma=1,2,\cdots,k$．

任意选择 $\gamma\in\{1,2,\cdots,k\}$，$i\in\{1,2,\cdots,m\}$，那么

$$(\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma})_i=\bigwedge_{j=1}^{n}(m_{ij}\bigcirc\tilde{x}_j^{\gamma})\le m_{ij_i}\bigcirc\tilde{x}_{j_i}^{\gamma}$$
$$=m_{ij_i}\bigcirc(x_{j_i}^{\gamma}\wedge\bigwedge_{\xi\ne\gamma}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_{j_i}^{\xi}))$$
$$=m_{ij_i}\bigcirc\bigwedge_{\xi=1}^{k}(y_i^{\gamma}\ominus y_i^{\xi}\bigcirc x_{j_i}^{\xi})$$
$$=m_{ij_i}\bigcirc y_i^{\gamma}\ominus\bigvee_{\xi=1}^{k}(y_i^{\xi}\ominus x_{j_i}^{\xi})$$
$$=m_{ij_i}\bigcirc y_i^{\gamma}\ominus m_{ij_i}$$
$$=y_i^{\gamma} \tag{44}$$

这表明 $\boldsymbol{M}_{XY}\overset{\bigcirc}{\wedge}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}\le\boldsymbol{y}^{\gamma}$．　　证毕．

定理 3 表明 $\boldsymbol{W}_{XY}$ 和 $\boldsymbol{M}_{XY}$ 具有一定抵抗腐蚀噪声和膨胀噪声的能力，且对于那些受到一定干扰和破坏，但仍然能够做到完全回忆记忆的输入模式，在数量上给出了一个边界条件．

定理 4．　$\boldsymbol{W}_{XX}\overset{\ominus}{\vee}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{M}_{XX}\overset{\ominus}{\wedge}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$．

证明．　记忆时，$\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $\forall\xi=1$，

$2,\cdots,k$,我们有

$$[\boldsymbol{x}^{\xi} \overset{\bigcirc}{\wedge} (\boldsymbol{x}^{\xi})']_{ii} = \begin{cases} x_i^{\xi} \bigcirc x_i^{\xi} = 0, & \text{对 RMAM,CMAM}, \\ x_i^{\xi} \bigcirc x_i^{\xi} = 1, & \text{对 FMAM,EFMAM}. \end{cases}$$

$$w_{ii} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} [\boldsymbol{x}^{\xi} \overset{\bigcirc}{\wedge} (\boldsymbol{x}^{\xi})']_{ii} = \begin{cases} 0, & \text{对 RMAM,CMAM}, \\ 1, & \text{对 FMAM,EFMAM}. \end{cases}$$

因此,对于每个 $\xi=1,2,\cdots,k$, $[\boldsymbol{x}^{\xi} \overset{\bigcirc}{\wedge} (\boldsymbol{x}^{\xi})'] - \boldsymbol{W}_{XX}$ 的每一行都包含了一个零项.按照定理 2, $\boldsymbol{W}_{XX}$ 是对 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$ 的 $\overset{\ominus}{\vee}$-完全回忆记忆,即 $\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ 成立.同理可证 $\boldsymbol{M}_{XX} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$. 证毕.

在定理 4 中,对 $\boldsymbol{X}$ 的类型和大小是没有限制的,这表明记忆 $\boldsymbol{W}_{XX}$ 和 $\boldsymbol{M}_{XX}$ 具有无限存储能力,在无噪声情况下,能够保证完全回忆记忆.

定理 5. 如果 $\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{M}_{XX} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}$,那么 $\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{M}_{XX} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

证明. 设 $\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$. 注意到,对于 $i=1,2,\cdots,n$,在 RMAM、CMAM 中, $w_{ii}=0$,且 $\ominus = +$;在 FMAM、EFMAM 中, $w_{ii}=1$,且 $\ominus = \cdot$. 于是我们有

$$(\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v})_i = \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} \ominus v_j) \geq w_{ii} \ominus v_i = v_i \tag{45}$$

因而

$$\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v} \tag{46}$$

令 $i,j,l \in \{1,2,\cdots,n\}$,注意到

$$w_{il} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_i^{\xi} \bigcirc x_l^{\xi}) \leq x_i^{\gamma} \bigcirc x_l^{\gamma}, \forall \gamma = 1,2,\cdots,k \tag{47}$$

$$w_{lj} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_l^{\xi} \bigcirc x_j^{\xi}) \leq x_l^{\gamma} \bigcirc x_j^{\gamma}, \forall \gamma = 1,2,\cdots,k \tag{48}$$

因而

$$w_{il} \ominus w_{lj} \leq x_i^{\gamma} \bigcirc x_j^{\gamma}, \forall \gamma = 1,2,\cdots,k \tag{49}$$

所以 $w_{il} \ominus w_{lj} \leq \bigwedge_{\xi=1}^{k} (x_i^{\xi} \bigcirc x_j^{\xi}) = w_{ij}$. 从而,对 $i=1,2,\cdots,n$,我们有

$$\begin{aligned} v_i &= \bigvee_{j=1}^{n} (w_{ij} \ominus z_j) \\ &\geq \bigvee_{j=1}^{n} (w_{il} \ominus w_{lj} \ominus z_j), \forall l = 1,2,\cdots,n \\ &\geq \bigvee_{l=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} (w_{il} \ominus w_{lj} \ominus z_j) \\ &= \bigvee_{l=1}^{n} [w_{il} \ominus (\bigvee_{j=1}^{n} (w_{lj} \ominus z_j))] \\ &= \bigvee_{l=1}^{n} [w_{il} \ominus v_l] \\ &= (\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v})_i \end{aligned} \tag{50}$$

这表明

$$\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v} \tag{51}$$

由不等式(46)和(51)可知, $\boldsymbol{W}_{XX} \overset{\ominus}{\vee} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. 证毕.

定理 5 表明,回忆能够在一步内完成,并不需要迭代和中间过程.

Hopfieled 网络是著名的联想记忆网络,但它不具有形态学神经网络的这些优点.它能够存储的模式对数量一般不超过网络中神经元总量的 15%,存储能力十分有限;回忆只能重复迭代完成;且对于完全输入,并不能保证完全回忆[21].

定理 6. 若 $\boldsymbol{Z}$ 是对于 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的核,那么 $\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{X}$.

证明. 设 $\boldsymbol{Z}$ 是对于 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的核,那么, $\boldsymbol{M}_{ZZ} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{x}^{\xi} = \boldsymbol{z}^{\xi}$, $\forall \xi = 1,2,\cdots,k$. 这意味着

$$\begin{aligned} z_i^{\xi} &= (\boldsymbol{M}_{ZZ} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{x}^{\xi})_i \\ &= \bigwedge_{j=1}^{n} (m_{ZZ}(i,j) \ominus x_j^{\xi}) \\ &\leq m_{ZZ}(i,i) \ominus x_i^{\xi} = x_i^{\xi} \end{aligned} \tag{52}$$

$\forall \xi = 1,2,\cdots,k$, $\forall i = 1,2,\cdots,n$. 所以, $\boldsymbol{z}^{\xi} \leq \boldsymbol{x}^{\xi}$, $\forall \xi = 1,2,\cdots,k$,亦即 $\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{X}$. 证毕.

定理 7. 如果 $\boldsymbol{Z}$ 是对于 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的核, $\tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{x}^{\gamma}$ 的一个含噪声样本, $z_j^{\gamma} \leq \tilde{x}_j^{\gamma}$, $\forall j = 1,2,\cdots,n$,且对任何 $m_{ZZ}(i,j) = z_i^{\gamma} \bigcirc z_j^{\gamma}$,有 $z_j^{\gamma} = \tilde{x}_j^{\gamma}$,那么 $\boldsymbol{M}_{ZZ} \overset{\ominus}{\wedge} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma} = \boldsymbol{z}^{\gamma}$.

证明. 由 $z_j^{\gamma} \leq \tilde{x}_j^{\gamma}$, $\forall j = 1,2,\cdots,n$ 可得

$$\tilde{x}_j^{\gamma} \geq z_j^{\gamma} \wedge [\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{\xi \neq \gamma} (z_i^{\gamma} \bigcirc z_i^{\xi} \ominus z_j^{\xi})], \forall j = 1,2,\cdots,n \tag{53}$$

按照定理 4, $\boldsymbol{M}_{ZZ} \overset{\ominus}{\wedge} \boldsymbol{z}^{\xi} = \boldsymbol{z}^{\xi}$, $\forall \xi = 1,2,\cdots,k$. 这样,由推论 1,对每一个行索引 $i = 1,2,\cdots,n$ 和每一个 $\alpha \in \{1,2,\cdots,k\}$,存在一个依赖于 i 和 α 的列索引 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$z_j^{\alpha} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (z_j^{\xi} \bigcirc z_i^{\xi} \ominus z_i^{\alpha}) \tag{54}$$

令 $\gamma = \alpha$,我们有

$$z_j^{\gamma} = \bigwedge_{\xi=1}^{k} (z_j^{\xi} \bigcirc z_i^{\xi} \ominus z_i^{\gamma}) \tag{55}$$

或者,等价地

$$z_i^{\gamma} \bigcirc z_j^{\gamma} = \bigcirc \bigwedge_{\xi=1}^{k} (z_j^{\xi} \bigcirc z_i^{\xi}) = \bigvee_{\xi=1}^{k} (z_i^{\xi} \bigcirc z_j^{\xi}) = m_{ZZ}(i,j) \tag{56}$$

根据假设和式(55)可得

$$\tilde{x}_j^{\gamma} = z_j^{\gamma} = z_j^{\gamma} \wedge z_j^{\gamma} = z_j^{\gamma} \wedge \bigwedge_{\xi=1}^{k} (z_j^{\xi} \bigcirc z_i^{\xi} \ominus z_i^{\gamma}) \tag{57}$$

因而

$$\tilde{x}_j^{\gamma} = z_j^{\gamma} \wedge \bigwedge_{\xi=1}^{k} (z_i^{\gamma} \bigcirc z_i^{\xi} \ominus z_j^{\xi}) \tag{58}$$

按定理 3,式(53)和(58)隐含着 $\boldsymbol{M}_{ZZ} \overset{\ominus}{\wedge} \tilde{\boldsymbol{x}}^{\gamma} = \boldsymbol{z}^{\gamma}$. 证毕.

定理 7 表明对任何包含膨胀和腐蚀噪声但仍满

足定理假设条件的输入模式 x^γ 的受损样本 $\tilde{x}^\gamma$，当系统执行如下过程：$\{input \to M_{ZZ} \to W_{ZY} \to output\}$ 时，将能够正确联想起模式 y^γ.

定理 6 和 7 对我们寻找核是一个指导.

5 结　论

本文提出了一个基于格代数的形态学联想记忆神经计算理论框架. 主要致力于 MAM 类对象的统一：统一的计算基础、统一的记忆方法和统一的定理. 满足可纳条件的 MAM 对象可以纳入统一框架；反之，通过对统一框架的继承、修改、扩展、变化和派生，可以得到具体的 MAM 对象.

形态学联想记忆框架有重要的理论意义和实际意义：一方面，透过统一框架 UFMAM 的建立，使我们更加深刻认识到了各种 MAM 类对象的共同形态学本质和特征，加速我们从必然王国走向自由王国的步伐；另一方面，统一框架蕴含着更多的记忆方法，这些方法对联想记忆、尤其是对于异联想来说是非常有用的. 由于这些方法的互补性，使得 UFMAM 能够解决更多的模式识别和联想记忆问题. 由于篇幅所限，对此，我们另文发表[22].

神经网络的格代数方法是新颖的一类方法，很多开放的问题等待我们去探索. 例如，新的联想记忆方法需要进一步去研究；形态学联想记忆框架的应用需要进一步被拓展. 我们相信这些问题在未来会解决得更好.

参　考　文　献

[1] Sussner P, Valle M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2008, 32(2): 139-159

[2] Valle M E, Sussner P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(7): 747-768

[3] Sussner P, Valle M E. Gray-scale morphological associative memories. IEEE Transactions on Neural Networks, 2006, 17(3): 559-570

[4] Sussner P, Valle M E. Implicative fuzzy associative memories. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(6): 793-807

[5] Ritter G X, Urcid G. Lattice algebra approach to single-neuron computation. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14(2): 282-295

[6] Graña M, Sussner P, Ritter G X. Innovative applications of associative morphological memories. Mathware and Softcomputing, 2003, 10(3): 155-168

[7] Davidson J L, Ritter G X. Theory of morphological neural networks//Proceedings of the SPIE, Digital Optical Computing Ⅱ. Los Angeles, CA, USA, 1990, 1215: 378-388

[8] Davidson J L, Hummer F. Morphology neural networks: An introduction with applications. IEEE Circuits System Signal Processing, 1993, 12(2): 177-210

[9] Davidson J L, Srivastava R. Fuzzy image algebra neural network for template identification//Proceedings of the 2nd Annual Midwest Electrotechnology Conference, Ames, IA, 1993: 68-71

[10] Gader P D, Won Y, Khabou M A. Image algebra network for pattern classification//Proceedings of SPIE, Image Algebra and Morphological Image Processing V. San Diego, CA, 1994, 2300: 157-168

[11] Won Y, Gader P D. Morphological shared weight neural network for pattern classification and automatic target detection//Proceedings of the 1995 IEEE International Conference Neural Networks. Perth Australia, 1995(4): 2134-2138

[12] Ritter G X, Sussner P. An introduction to morphological neural networks//Proceedings of the 13th International Conference Pattern Recognition. Vienna, Austria, 1996, 4: 709-717

[13] Ritter G X, Sussner P, Diaz-de-Leon J L. Morphological associative memories. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(2): 281-293

[14] Ritter G X, Diaz-de-Leon J L, Sussner P. Morphological bidirectional associative memories. Neural Network, 1999, 12(6): 851-867

[15] Chen Song-Can, Liu Wei-Long. Complex morphological associative memories and their performance analysis. Journal of Software, 2002, 13(3): 453-459(in Chinese)
(陈松灿，刘伟龙. 复形态联想记忆及其性能分析. 软件学报，2002，13(3)：453-459)

[16] Wang M, Wang S T, Wu X J. Initial results on fuzzy morphological associative memories. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(5): 690-693(in Chinese)
(王敏，王士同，吴小俊. 新模糊形态学联想记忆网络的初步研究. 电子学报，2003，31(5)：690-693)

[17] Wang M, Chen S C. Enhanced FMAM based on empirical kernel map. IEEE Transactions on Neural Networks, 2005, 16(3): 557-564

[18] Wu Xi-Sheng, Wang Shi-Tong. Bidirectional fuzzy morphological associative memory and its robust analysis for random noise. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005, 18(3): 257-262(in Chinese)
(吴锡生，王士同. 双向模糊形态联想记忆网络及其抗随机噪声的研究. 模式识别与人工智能，2005，18(3)：257-262)

[19] Wu Xi-Sheng, Wang Shi-Tong. Fuzzy morphological associative memories and their application in storing and recalling cell images. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(10): 1450-1455(in Chinese)

(吴锡生，王士同. 模糊形态联想记忆网络及其在细胞图像联想识别中的应用. 中国图象图形学报，2006，11(10)：1450-1455)

[20] Chen Song-Can. Advance in research on neural networks of discrete associative memories//Zhou Zhi-Hua，Cao Cun-Gen Eds. Neural Networks and Their Applications. Beijing：Tsinghua University Press，2004：295-320(in Chinese)
(陈松灿. 离散联想记忆神经网络研究进展//周志华，曹存根主编. 神经网络及其应用. 北京：清华大学出版社，2004：295-320)

[21] Hagan M T，Demuth H B，Beale M. Neural Network Design. Beijing：China Machine Press，Citic Publishing House，2002：18.1-18.36

[22] Feng N Q，Cao X Z，Li S J，Ao L H，Wang S X. A new method of morphological associative memories//Proceddings of the 5th International Conference on Intelligent Ccomputing (ICIC 2009). Ulsan，South Korea，2009：407-416

FENG Nai-Qin，born in 1953，Ph.D.，professor. His current research interests include neural computing，morphological associative memories，and fuzzy theory.

LIU Chun-Hong，born in 1969，M. S.，associate professor. Her main research interests include associative memories，and multimedia information processing.

ZHANG Cong-Pin，born in 1968，M. S.，associate professor. Her main research interests include morphological neural networks，rough set theory，and distributed artificial intelligence.

XU Jiu-Cheng，born in 1963，Ph. D.，professor. His main research interests include rough set theory，granular computing，and data mining.

WANG Shuang-Xi，born in 1984，M. S. candidate. His research interests include artificial neural networks，and pattern recognition.

Background

In recent years，a number of different morphological neural network models，such as RMAM，MBAM，CMAM，FMAM，EFMAM，FMBAM，etc.，have emerged. They have many attractive advantages such as unlimited storage capacity，one-short recall speed and good noise-tolerance to erosive or dilative noise. Through researching in depth the authors find out that although RMAM，MBAM，CMAM，FMAM，EFMAM and FMBAM are different and easily distinguishable from each other，they have the same morphological theoretical base，and therefore they can be unified together in a framework. At the same time，it is one of the most important and difficult researches to construct the unified framework of associative memories. So far this problem has not been researched and solved in the round and systematically. The paper tries to solve the problem.

Through analyzing the computational base of various kinds of objects of MAM，and extracting the common attributes of the class of MAM，and defining the morphological norms and operators，and refining and proving several fundamental theorems of MAM，the unified framework of morphological associative memories (UFMAM) is constructed by authors. It makes people have a deeper understanding in essence for the class of MAM and its objects while having the unified theoretical framework. Also，it can help people find some new methods for morphological associative memories and pattern recognition. According to the UFMAM，authors' research group has found several new methods of morphological associative memories. Their experiments show that these methods are effective and efficient for associative memories，special for hetero associative memories. New methods and original methods complement each other very well. But they are not mentioned here because of the limit of the paper's length.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60873104，the Natural Science Foundation of Henan Province under grant No. 0511012300 and Doctor Fund of Henan Normal University under grant No. 521662.