图顶点覆盖问题决策神经网络模型

南晋华　　齐　欢

（华中科技大学控制科学与工程系　武汉　430074）

摘　要　图的顶点覆盖问题是一个困难的 NP-完全问题，并且有许多良好的应用. 文中将在已有的应用 Hopfield 神经网络模型来求解图的顶点覆盖问题的基础上，将人脑决策思维的思想加入其中，建立称为图顶点覆盖问题决策神经网络模型. 该方法不仅简化了过去此领域的工作，而且通过增加决策约束项，加速了网络的运行速度.

关键词　决策神经网络；图的顶点覆盖问题

中图法分类号　TP18　　　**DOI 号**：10.3724/SP.J.1016.2009.01683

A Graph Vertex-Covering Problem Decision-Making Neural Network Model

NAN Jin-Hua　QI Huan

(*Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan*　430074)

Abstract　Graph vertex-covering problem is a NP-complete problem. It can be used to many aspects. This paper is aimed to establish a kind of graph vertex-covering problem neural networks model that are of local-connection, of simulation human's decision-making thinking, called graph vertex-covering problem decision-making neural network model. The advantages of the model can be converged in speed than Hopfield neural network.

Keywords　decision-making neural network; vertex-covering problem

1　引　言

图的顶点覆盖问题(Vertex-Covering Problem, VCP)是指找给定图中顶点的一个最小子集，使得覆盖给定图中的所有边. 它在分子生物学、调度问题、信息检索、错误诊断和恢复、集装线平衡、油轮行程安排及开关理论[1-8]方面有着广泛的应用. 由于顶点覆盖问题是 NP-完全问题，在已有的近似算法中，仅根据局部信息来进行决策. 因此在许多情况下，这类算法不能确定最小覆盖问题[1]. 基于遗传算法和邻近查找技术，本文提出了图的顶点覆盖问题的优化算法. 本文提出的算法，改进了这一不足，可以得到高质量的解. 现有的图的优化技术有随机和模拟退火方法[8]、神经网络算法[8]，由于其算法复杂度太高及因受问题规模大小的限制，具有一定的局限性. 传统的精确算法有分枝限界法、割平面法、对偶启发式方法[5-8]. 尽管这些方法能求得 VCP 的最优解，但其计算复杂度高，花费时间长，而且不能应用到规模大的问题.

2　定义与记号

若图 G 中的一个顶点和一条边相互关联，则称它们相互覆盖. 覆盖图 G 的所有边的一个顶点子集称为图 G 的一个顶点覆盖. 类似地，覆盖图 G 的所有顶点的一个边子集称为图 G 的一个边覆盖. G 的所有顶点覆盖中顶点最少的数目称为图 G 的顶点

最终修改稿收到日期：2009-07-10. **南晋华**，女，1972 年生，博士，主要研究方向为系统工程、决策支持系统. **齐　欢**（通信作者），男，1948 年生，博士，教授，主要研究领域为系统分析与建模等. E-mail：qihuan@mail.hust.edu.cn.

覆盖数，或者简称为点覆盖数，记为 $\alpha_0(G)$，或简记为 α_0. 类似地，我们可以定义一个图 G 的边覆盖、最大边覆盖以及边覆盖数. 并用 α_1 来表示一个图 G 的边覆盖数. 我们分别用 β_0 和 β_1 来表示图 G 的独立数和匹配数. 业已得知，关于一个阶数为 p 的非平凡的连通图的覆盖数与独立数具有如下关系：

$$\alpha_0+\beta_0=\alpha_1+\beta_1=p.$$

由此结果容易看出，求一个图 G 的最小覆盖数等价于求这个图的最大独立集. 而图的最小覆盖问题、图的最大团问题以及图的最大独立集问题两两等价. 因此，求一个图的最小覆盖问题完全可以转化为求这个图的最大独立集问题，或者最大团问题. 但由于图的最小覆盖问题的特殊性，人们还是独立地应用神经网络方法对图的最小覆盖问题进行了研究.

设 $G=(V,E)$ 是一无向图，其中 V 是图中顶点集合，E 是边的集合. $|V|$ 表示图中顶点的个数. $|E|$ 表示图中的边数. 顶点覆盖问题是找一 V 的子集 $S\subseteq V$，满足对于 $(i,j)\in E$，i 和 j 至少有一个属于 S. 数学形式描述如下：

$$\min_{x_i\in S}\boldsymbol{cx} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}a_{ij}(1-x_i)(1-x_j)=0 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{c}=[1\ 1\ \cdots\ 1]$ 和 $\boldsymbol{x}=[x_1 x_2\cdots x_p]$ 分别是长为 p 的向量，$(a_{ij})_{p\times p}$ 为图的邻接矩阵，且

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{顶点 } v_i\in S\\ 0, & \text{否则}\end{cases}.$$

3 顶点覆盖问题的决策神经网络模型

本节建立了一种基于人脑决策思维模式的图顶点最小覆盖问题人工神经网络计算模型，称为顶点覆盖问题的决策神经网络模型，该模型可以得到问题的满意解，但不一定能得到问题的最优解. 但是，有些问题在得到问题的满意解后，经过简单的修正，仍然可以得到问题的最优解.

在给出顶点覆盖问题决策神经网络模型之前，我们先介绍一下与本文紧密相关的此方面已有的研究成果. 为方便，在此给出由 p 个神经元组成的 Hopfield 神经网络模型，该模型可由如下的微分方程来描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_i(t)}{r}+\dfrac{\partial E}{\partial v_i(t)}, & i=1,2,\cdots,p\\ v_i=f(u_i(t))\end{cases} \tag{3}$$

其中 u_i，v_i 分别表示神经元 i 在 t 时刻的输入和输出，f 为某一个闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数，通常这个闭区间 $[a,b]$ 选取 $[0,1]$ 或者 $[-1,1]$，r 为衰减系数，E 为能量函数.

下面，我们来介绍应用 Hopfield 神经网络求解图的最小覆盖问题的算法. 设 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，神经元为 x_i，它表示图 G 的顶点 x_i 是否在 G 的某个覆盖集 S 之中. 文献[9]中所构造的能量函数为

$$E=\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1,\neq i}^{p}x_i x_j+\frac{B}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1,\neq i}^{p}a_{ij}(1-x_i)(1-x_j) \tag{4}$$

其中第 1 项为优化项，它表示 $(\sum_{i\in S}x_i)^2$，即覆盖集大小的平方. 第 2 项是约束项，只要 x_i 或 x_j 中的一个属于 S，则相应的 $1-x_i$ 或 $1-x_j$ 为零，该项取最小值. 网络的运行方程为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i}{\tau}=-A\sum_{j=1}^{p}x_j+B\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(1-x_j) \tag{5}$$

文献[10]中提出了应用混沌神经网络模型求解集合覆盖问题的计算模型. 文献[9]提出了一种改进的 Hopfield 神经网络模型，该模型的运行方程为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i}{\tau}=-A+2B\sum_{j=1}^{p}d_{ij}x_j+2B\sum_{j=1}^{p}d_{ij}-T(t)\left(1-\frac{degree(i)}{EdgesNum}\right) \tag{6}$$

其中 $degree(i)$ 表示第 i 个顶点的度数；$EdgesNum$ 表示图的所有边的数目；而 $T(t)$ 称为温度变量. $T(t)$ 可由下列方程递推：

$$T(t+1)=\beta T(t),$$

其中 β 是衰减因子.

我们在本文所给出的神经网络模型是依赖于人脑思维模式的一种新型的神经网络模型. 自然，在求解一个给定图 G 的最小顶点覆盖时，我们最先考虑的是寻找关联其它顶点最多的顶点，即度数最大的顶点，记做 v，删去此顶点以及与此顶点相关联的所有的边得到的图为 $G-v$；在 $G-v$ 中如法炮制，如此循环，便可得到图 G 的一个顶点覆盖，这种算法实际上就是一种典型的近似贪心算法. 此算法所得到的覆盖可能不是所要求的最小覆盖，但一般而言，可能是问题的满意解. 如图 1 中所示的图，首先选择顶点 1，然后是顶点 2，3，4，5，其结果是得到 5 个顶点的覆盖. 但是最优的顶点覆盖只有 4 个顶点 2，3，4，5. 在选择了 2，3，4，5 顶点之后，顶点 1 变为冗余顶点，而贪心算法不能去掉覆盖中任何冗余的顶点.

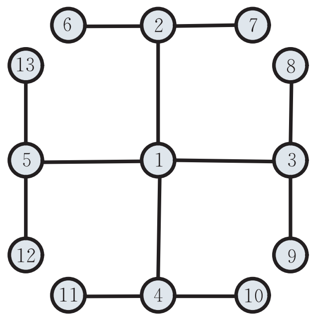

图 1　说明人脑贪心决策求解最小覆盖问题的一个不成功的例子

但是，有些问题可在这种模型所求解的基础上，稍加修改，便可得到问题的最优解，如在图 1 所示的例子中，在解{1,2,3,4,5}的基础上，容易得到最优解{2,3,4,5}.

下面，我们在上述准备工作的基础上来建立“图顶点覆盖问题决策神经网络模型”.

设 G 表示是一个 p-阶图，令 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$. 设 $x_i\in V(G)$，我们用 $\Gamma(x_i)$ 来表示顶点 x_i 在图 G 中的邻域，用 $d_i=|\Gamma(x_i)|$ 来表示顶点 x_i 的度数，$i=1,2,\cdots,p$. 我们约定，一个图 G 的度序列，记作 $\pi(G)$，是指满足单调递增的度序列：

$$\pi(G)=(d_1,d_2,\cdots,d_p),$$

其中，

$$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_p.$$

我们所设置的神经元的数目与图的顶点数相同. 一般假定共有 p 个顶点，相应的 p 个神经元为 $x_i(i=1,2,\cdots,p)$. 该神经元的最后输出设为 $v_i(i=1,2,\cdots,p)$.

$$v_i=\begin{cases}1, & \text{神经元 } x_i \text{ 在某个覆盖集合中}\\ 0, & \text{神经元 } x_i \text{ 不在某个覆盖集合中}\end{cases}\tag{7}$$

图的顶点覆盖问题，就是寻找最少的顶点数目来覆盖图的所有的边. 因此，我们可得到能量函数 E 的第 1 项：

$$\sum_{i=1}^{p}x_i\tag{8}$$

此项称为优化约束项.

由于我们利用人脑决策思维的模式，即对此问题而言，就是选择大度数的顶点，因而，选择的定的度数应该为

$$\sum_{i=1}^{p}d_ix_i\geq\sum_{i=1}^{p}d_{\sigma(i)}x_i\tag{9}$$

其中式(9)中第 2 项下标中的 σ 是 $(1,2,\cdots,p)$ 的一个置换，即 1-1 映射，即

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(p)\end{pmatrix}.$$

自然，当 $i\neq j$ 时，必有 $\sigma(i)\neq\sigma(j)$. 于是，由式(9)我们可以得到第 2 个优化约束项：

$$\sum_{i=1}^{p}d_{\sigma(i)}x_i-\sum_{i=1}^{p}d_ix_i=\sum_{i=1}^{p}(d_{\sigma(i)}-d_i)x_i\tag{10}$$

当然，此项的值越小，说明覆盖集合中对应的度数之和越大，我们把此项约束称为决策约束.

给定一个图 G，就相当于给定了这个图的相邻矩阵. 我们在此仍用

$$\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{p\times p}$$

来表示图 G 的相邻矩阵. 只要 x_i 或 x_j 中的一个属于 S，则相应的 $1-x_i$ 或 $1-x_j$ 为零，该项取最小值. 于是，我们得到了第 3 个约束条件：

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(1-x_i)(1-x_j)\tag{11}$$

此项简称为行、列约束项.

基于式(8)、(10)和式(11)，我们得到了决策神经网络的能量函数为

$$E=-A\sum_{i=1}^{p}x_i+B\sum_{i=1}^{p}(d_{\sigma(i)}-d_i)x_i+\frac{C}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(1-x_i)(1-x_j)\tag{12}$$

显然，这个能量函数较已有神经网络模型的简单，且增加的第二项可加速网络的运行速度.

由式(3)和式(12)，我们得到了网络的运行方程为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i(t)}{r}-A+B\sum_{j=1}^{p}(d_{\sigma(i)}-d_i)+C\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(1-x_j)\tag{13}$$

$$v_i(t)=\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{u_i(t)}{\beta}\right)\tag{14}$$

其中 A，B，C 以及 β 表示实验参数.

由式(13)得到网络的权值 $w_{il,jm}$ 和偏置电流 I_{il} 为

$$\begin{cases}w_{i,j}=-Ca_{ij}\delta_{ij}\\ I_{il}=-A+B\sum_{i=1}^{p}(d_{\sigma(i)}-d_i)+C\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\end{cases},\quad i,j=1,2,\cdots,p\tag{15}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=j\\ 0, & \text{若 } i\neq j\end{cases}.$$

基于上述准备工作，下面我们来给出图的顶点覆盖问题的 Hopfield 神经网络算法.

1. 设置 $t=0, A, B, C, \beta$;

2. 读入图 G 的相邻矩阵$(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,p)$文件;

3. 计算神经元之间的权重 w_{ij} 和输入偏置 I_i

$$w_{i,j}=-Ca_{ij}\delta_{ij},$$

$$I_{il}=-A+B\sum_{i=1}^{p}(d_{\sigma(i)}-d_i)+C\sum_{j=1}^{p}a_{ij}.$$

4. 在 0 的附近随机地产生 $u_i(t)(i=1,2,\cdots,p)$的初始值;

5. 计算 $v_i(t)(i=1,2,\cdots,p)$的值:

$$v_i=\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{u_i(t)}{\beta}\right).$$

6. 利用神经元动态方程来计算 $\Delta u_i(t)(i=1,2,\cdots,p)$:

$$\Delta u_i(t)=\sum_{j=1}^{p}w_{ij}v_j(t)+I_i.$$

7. 根据一阶 Euler 法计算 $u_i(t+1)$:$u_i(t+1)=u_i(t)+\Delta u_i(t)\Delta t$,这里,$i=1,2,\cdots,p$, Δt 取 1.

如果系统达到平衡状态,终止程序,否则返回步 5.

4 结论与展望

本文提出了一种新型的求解图顶点覆盖问题的人工神经网络模型,该模型的特点是将人脑决策思维的思想加入其中,从而加入了一项新的约束条件.按照此模型,网络的收敛速度得到了加快,可能得不到问题的最优解,但可以获得问题的满意解.相信此模型的思想可进一步应用于其它优化计算领域之中.

参 考 文 献

[1] Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Englewood Cliffs, NJ: Prence Hall, 1982: 358-409

[2] Tinhofer G et al. Computational Graph Theory. Vienna: Springer-Verlag, 1990

[3] Golumbic M C. Algorithmic Graph Theory and Peffect Graphs. New York: Academic Press, 1980

[4] Vinnakota B, Andrews J. Repair of RAMs with clustered faults//Proceedings of the International Conference on Computer-Aided-Design. Santa Clara, 1992: 582-585

[5] Paias A, Paixao J. State space relaxation for set covering problem related to bus driver scheduling. European Journal of Operational Research, 1993, 71: 303-316

[6] Beasley J E, Jornsten K. Enhancing an algorithm for set covering problems. European Journal of Operational Research, 1992, 58: 293-300

[7] Lorena L A N, Belo Lopes F. A surrogate heuristics for set covering problems. European Journal of Operational Research, 1994, 79: 138-150

[8] Fisher M L, Kedia D. Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics. Management Science, 1990, 36: 674-688

[9] Chen Guo-Liang. Neural computing with applications in optimization. Journal of Computer Research and Development, 1992, (5): 1-21(in Chinese)
(陈国良. 神经计算及其在组合优化中的应用. 计算机研究与发展, 1992, (5): 1-21)

[10] Yuan S Y, Kuo S Y. A new technique for optimization problems in graph theory. IEEE Transactions on Computers, 1998, 47(2): 190-196

NAN Jin-Hua, born in 1972, Ph. D.. Her research interests include system engineering, DSS etc.

QI Huan, born in 1948, Ph. D., professor. His major research interests include systems analysis, modeling and simulation.

Background

This research is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 60774036). It is well-known that Hopfield neural networks are applied to solve some optimization problems for many years. However, Hopfield neural networks is a kind of fully connected network, that is any two artificial neural neurons can be linked. Thus, the run times and local minimal values are greatly increased. To overcome the phenomena, we propose a novel artificial neural network model, called decision-making neural network model. Furthermore, the computing model is set up by decision-making neural network model for a graph vertex-covering problem .