

二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组设计

陈 冬 张田文 李 东

(哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150001)

摘 要 基于提升格式的第二代小波可以通过对第一代小波滤波器组采用劳伦多项式的欧几里德分解而得到,而直接设计符合提升格式的二代小波一直是需要研究的热点问题.文中把 Neville 滤波器理论和 Lagrange 插值理论结合起来,构造了二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组,并证明了其线性相位性质,讨论了其归一化方法.文中给出了二通道线性相位的 Neville-Lagrange-44(简称 N-L-44)提升小波滤波器组实例,并与 JPEG2000 的 9/7 小波做了图像压缩实验比较.实验结果表明:N-L-44 提升小波滤波器组的图像压缩效果要明显好于 9/7 小波滤波器组,其在低比特率($bpp < 1$)时的图像压缩效果要好于 9/7 小波的 lifting 格式.而且相对于 9/7 小波,二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组还具有良好的潜在发展空间,例如其可以用来构建自适应提升小波滤波器组,可以扩展到纯二维提升小波滤波器组等等.

关键词 Neville 滤波器;拉格朗日插值;提升小波;图像压缩;线性相位

中图法分类号 TP391

DOI号: 10.3724/SP.J.1016.2009.01413

Design of Two-Channel Neville-Lagrange Lifting Wavelet Filter Banks with Linear Phase

CHEN Dong ZHANG Tian-Wen LI Dong

(School of Computer Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract The second generation wavelets based on lifting scheme can be obtained by applying the Euclidean algorithm to Laurent polynomial of the first generation wavelets. To design the second generation wavelets fit into lifting scheme is a focus problem that need to be studied deeply. This paper constructs the two-channel Neville-Lagrange lifting wavelet filter banks with linear phase by combining the Neville filter theory and Lagrange interpolation theory. Furthermore, the linear phase property is proved and the normalization of two-channel Neville-Lagrange lifting wavelet filter banks is discussed. As an example, the two-channel Neville-Lagrange-44 (N-L-44 for short) is given, and the comparison with 9/7 wavelet of JPEG2000 for image compression is discussed. Experimental results show that the N-L-44 lifting wavelet filter bank is better than the 9/7 wavelet filter bank of JPEG2000 for image compression obviously, and compared to the lifting scheme of 9/7 wavelet, N-L-44 lifting wavelet filter bank improves the image compression performance at low bit rate ($bpp < 1$). In addition, two-channel Neville-Lagrange lifting wavelet filter banks with linear phase show the great potential advantages, such as the design of adaptive lifting wavelet filter bank, the construction of the True-2D lifting wavelet filter bank.

Keywords Neville filter; Lagrange interpolation; lifting wavelet; image compression; linear phase

收稿日期:2007-05-09;最终修改稿收到日期:2009-01-05. 本课题得到国家自然科学基金(60875013,60475011)资助. 陈 冬,男,1976年生,博士研究生,主要研究方向为小波分析、数据压缩、信号处理、计算机视觉等. E-mail: grin_cd@yahoo.com.cn. 张田文,男,1940年生,教授,博士生导师,主要研究领域为主动视觉、人工智能、图像处理、虚拟现实、模式识别等. 李 东,男,1967年生,教授,主要研究领域为网络信息安全技术、并行计算、计算机系统结构、计算机图形学等.

1 引言

近年来,离散小波变换(Discrete Wavelet Transform, DWT)^[1-2]在图像压缩领域逐渐占据了主导地位,并被新的图像编码标准 JPEG2000 所采用,成为其静态图像压缩的核心方法^[3-4]. 基于提升格式(lifting scheme)^[5-7]的第二代小波能够从简单的传统小波分解开始逐渐提升小波的一些重要性质(例如消失矩等)到所期望的值,且其结构本身为超大规模集成电路(VLSI)^[8-10]的实现提供了崭新的思路,所以设计用于图像压缩的第二代小波滤波器组具有重要意义. 提升格式给出了由现有的小波滤波器组通过劳伦多项式的欧几里德分解方法获得提升步的方法,但如何由提升格式直接设计适合具体应用的提升小波滤波器组仍然是个需要深入研究的课题. 小波滤波器组的线性相位属性对图像处理、语音处理、通信等许多领域的应用来讲都是至关重要的^[11-12],因此对于提升小波滤波器组设计来讲,使其具有线性相位属性是很关键的.

Kovačević 和 Sweldens 构造了任意维小波族^[13],作为其理论核心的 Neville 滤波器理论对于二代小波滤波器组的设计具有重要意义. Neville 滤波器理论很好地解释了 lifting 结构中预测算子 P 和更新算子 U 的含义,但该理论存在着一些缺陷. 首先,该理论在建立过程中使用的是劳伦多项式系数的反转形式,这就造成了其理论本身表述的混乱. 其次,在把该理论应用到 lifting 小波滤波器组的设计时,其所使用的 FIR 滤波器组的通道表示形式并不符合 Mallat 关于多分辨率信号分解的小波滤波器组表示方法^[14],这就造成了其所设计出的预测滤波器和更新滤波器必须根据 Mallat 方法进行相应的转换才能使用,而 Kovačević 和 Sweldens 并没有考虑到这一点,也没有给出相应的转换方法. 最后,该理论并没有考虑小波滤波器在实际应用中的归一化问题. 本文修正了这些问题,引入了小波滤波器组的多相表示形式,把小波滤波器组的通道表示、多相表示和 lifting 表示结合起来,建立了这三种表示之间的等式关系,给出了小波滤波器组的通道表示和 lifting 表示之间的转换公式,解决了归一化问题,从而建立了一套完整实用的二代小波滤波器设计理论.

本文首先根据 Mallat 关于多分辨率信号分解的小波滤波器组表示方法,重新推导并完善了 Neville 滤波器理论,给出了 FIR 滤波器组的通道表

示、多相表示和 lifting 表示之间的相互转化公式. 然后,采用拉格朗日插值方法^[15-16]构造了用于提升小波结构的预测滤波器 P ,并根据 Neville 滤波器理论的相关定理得到更新滤波器 U ,我们称用这种方法构造的滤波器组为 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组. 其次,本文给出了二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的设计定理,并给出了线性相位性质的证明. 进一步,本文讨论了二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的归一化方法. 最后,本文设计了二通道的具有 4 阶对偶消失矩和 4 阶主消失矩的 N-L-44 提升小波滤波器组,并与 JPEG2000 的 9/7 小波做图像压缩实验的比较和分析.

2 Neville 滤波器理论

2.1 符号及其含义

信号 x 是用指标集 κ 作下标的实值序列 $x = \{x_k \in \mathbf{R} | k \in \kappa\}$, κ 为整数集 \mathbf{Z} 或其子集. 有限信号是指信号序列中只有有限个 x_k 值非零的信号.

$\pi(x)$ 表示以信号 x 为变量的多项式. $\pi(\mathbf{Z})$ 表示 $\pi(x)$ 在以整数集 \mathbf{Z} 为下标时的取值. Π_N 表示所有阶数严格小于 N 的多项式序列组成的空间.

称线性时不变算子 A 为一个滤波器,表现为脉冲响应序列 $A = \{a_k | k \in \kappa = \mathbf{Z}\}$.

脉冲响应序列的 z 变换是一个劳伦多项式 $A(z) = \sum_k a_k z^{-k}$,如果令 $z = e^{j\omega}$,那么 $A(e^{j\omega})$ 就成了脉冲响应的离散傅立叶变换.

抽取因子 $M=2$ 时,可得到整数集 \mathbf{Z} 的两个不相交子集,偶整数集 $\mathbf{Z}_e = 2\mathbf{Z}$ 和奇整数集 $\mathbf{Z}_o = 2\mathbf{Z} + 1$,且有 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_e + \mathbf{Z}_o$.

差分算子定义为 $\Delta = \frac{d}{jd\omega}$, Δ 总是与 ω 相关联的,当把符号 Δ 与 z 变换结合使用时, z 仅仅是 $e^{j\omega}$ 的符号表示.

由以上的定义可以得到如下公式:

$$\Delta z^a = a z^a \quad (1)$$

$$\Delta^n A(z) = A^{(n)}(z) = \sum_k a_k (-k)^n z^{-k} \quad (2)$$

$$\Delta^n A(z^a) = A^{(n)}(z^a) = a^n \sum_k a_k (-k)^n z^{-ak} \quad (3)$$

2.2 Neville 滤波器理论

如引言所述, Kovačević 和 Sweldens 的 Neville 滤波器理论在建立过程中使用的是劳伦多项式系数的反转形式,这就造成了其理论本身表述的混乱. 本

节采用脉冲响应序列 z 变换的劳伦多项式表示形式重新建立了 Neville 滤波器理论,作为后面 lifting 小波滤波器组设计的理论基础.

定义 1. 如果滤波器 P 满足 $P\pi(Z)=\pi(Z+\tau)$, for $\pi\in\Pi_N$, 则称 P 是 N 阶 $\tau\in\mathbf{R}$ 平移的 Neville 滤波器.

定理 1. 称 P 为 N 阶 $\tau\in\mathbf{R}$ 平移的 Neville 滤波器,当且仅当其脉冲响应满足

$$\sum_k p_k(-k)^n = P^{(n)}(1) = \tau^n, \text{ for } n < N.$$

证明. 首先证明必要条件.

用脉冲响应 $\{p_k\}$ 来表示 Neville 滤波器的定义式,且令 $P[k]=p_k$.

把单项式 $\pi(l)=l^n (l\in\mathbf{Z})$ 代入 $P\pi(Z)=\pi(Z+\tau)$, for $\pi\in\Pi_N$ 得

$$P\pi(l)=\pi(l+\tau)=(l+\tau)^n, l\in\mathbf{Z}, \text{ for } n < N \quad (4)$$

这里的 $P\pi(l)$ 相当于 $P[l]=p_l$ 与 $\pi[l]=l^n$ 的卷积

$$\begin{aligned} P\pi(l) &= P[l] * \pi[l] = \sum_k P[k] \cdot \pi[l-k] \\ &= \sum_k p_k \cdot \pi[l-k] = \sum_k p_k \cdot (l-k)^n \end{aligned} \quad (5)$$

综合式(4)和式(5)得

$$\sum_k p_k \cdot (l-k)^n = (l+\tau)^n, l\in\mathbf{Z}, \text{ for } n < N \quad (6)$$

对移不变的多项式空间,只需考虑 $l=0$ 的情况,即

$$\sum_k p_k(-k)^n = \tau^n, \text{ for } n < N \quad (7)$$

$$\text{由式(2)有 } \Delta^n P(z) = P^{(n)}(z) = \sum_k p_k(-k)^n z^{-k}$$

当 $z=1$ 时

$$P^{(n)}(1) = \sum_k p_k(-k)^n \quad (8)$$

综合式(7)和式(8)得

$$\sum_k p_k(-k)^n = P^{(n)}(1) = \tau^n, \text{ for } n < N \quad (9)$$

所以定理 1 的必要条件得证.

由以上的推导过程可知其是可逆推的,所以定理 1 得证, 证毕.

定理 2. 如果 P 是 N 阶 $\tau\in\mathbf{R}$ 平移的 Neville 滤波器,则 $P^*(P^*(z)=P(z^{-1}))$ 是 N 阶 $-\tau$ 平移的 Neville 滤波器.

证明. 设 q 是 P^* 的脉冲响应,即 $Q(z)=P(z^{-1})$,故 $Q^{(n)}(z)=P^{(n)}(z^{-1})$.

由式(3)得

$$P^{(n)}(z^\alpha) = \alpha^n \sum_k p_k(-k)^n z^{-\alpha k} \quad (10)$$

当 $\alpha=1$ 时,有

$$P^{(n)}(z) = \sum_k p_k(-k)^n z^{-k} \quad (11)$$

当 $\alpha=-1$ 时,有

$$P^{(n)}(z^{-1}) = (-1)^n \sum_k p_k(-k)^n z^k \quad (12)$$

令式(11)和式(12)中 $z=1$ 得

$$P^{(n)}(1) = \sum_k p_k(-k)^n \quad (13)$$

$$Q^{(n)}(1) = (-1)^n \sum_k p_k(-k)^n \quad (14)$$

因 P 是 N 阶 τ 平移的 Neville 滤波器,故由定理 1 得

$$P^{(n)}(1) = \tau^n, \text{ for } n < N \quad (15)$$

综合式(13)~(15)得

$$Q^{(n)}(1) = (-1)^n P^{(n)}(1) = (-\tau)^n, \text{ for } n < N \quad (16)$$

由定理 1 和式(16)可知定理 2 得证. 证毕.

3 小波滤波器组的通道表示、多相表示和 Lifting 表示之间的关系

虽然提升小波理论已经建立很多年了,但目前为止还没有资料系统地给出它和小波滤波器组的通道表示,多相表示之间的公式关系,这主要是由小波滤波器组 lifting 表示的预测步和更新步的数目不定所造成的.本文基于 Neville 滤波器理论的 lifting 小波滤波器组设计能够保证其只含有一个预测步和一个更新步,基于此,本节建立了小波滤波器组的通道表示、多相表示和 lifting 表示之间的公式关系,这些公式关系是应用 Neville 滤波器理论设计二通道 lifting 小波滤波器组的前提和条件.

小波理论的本质是用空间的基来逼近函数,小波消失矩就是这个逼近的一个度量尺度.小波消失矩在滤波器组上的表现为:如果高通滤波器消去了某些阶的多项式,相应地,在通道的另一端的低通滤波器就要重建相应阶的多项式.所以有结论:分析高通滤波器 \tilde{G} 和综合低通滤波器 H 具有相同的消失矩阶数 \tilde{N} ;分析低通滤波器 \tilde{H} 和综合高通滤波器 G 具有相同的消失矩阶数 N ;其中 \tilde{N} 称为对偶消失矩, N 称为主消失矩.

定义 2. 小波滤波器组具有 \tilde{N} 阶对偶消失矩和 N 阶主消失矩,如果 $\tilde{G}^*\pi=0$, for $\pi\in\Pi_{\tilde{N}}$, and $G^*\pi=0$, for $\pi\in\Pi_N$.

其中 $\tilde{G}^*(z)=\tilde{G}(z^{-1})$, $G^*(z)=G(z^{-1})$, \tilde{G} 和 G 分别表示分析小波滤波器和综合小波滤波器(参看图 1).

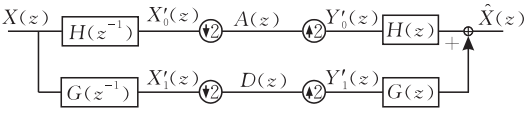


图 1 FIR 滤波器组的通道表示

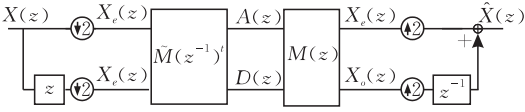


图 2 FIR 滤波器组的多相表示

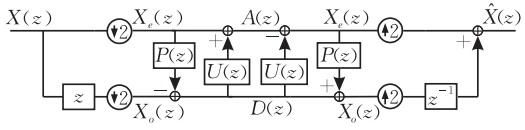


图 3 FIR 滤波器组的 lifting 表示

3.1 小波滤波器组的通道表示与多相表示之间的关系

3.1.1 分析端

令

$$\tilde{M}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{G}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) & \tilde{G}_o(z) \end{bmatrix} \quad (17)$$

把 $\tilde{H}(z^{-1})$ 和 $\tilde{G}(z^{-1})$ 的各项作奇偶分解得

$$\tilde{H}(z^{-1}) = \tilde{H}_e(z^{-2}) + z\tilde{H}_o(z^{-2}) \quad (18)$$

$$\tilde{G}(z^{-1}) = \tilde{G}_e(z^{-2}) + z\tilde{G}_o(z^{-2}) \quad (19)$$

综合式(17)~(19)得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{H}(z^{-1}) \\ \tilde{G}(z^{-1}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z^{-2}) & \tilde{H}_o(z^{-2}) \\ \tilde{G}_e(z^{-2}) & \tilde{G}_o(z^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \\ &= \tilde{M}(z^{-2})^t \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

其作用于信号后,可表示如下(参看图 1)

$$\begin{bmatrix} X'_0(z) \\ X'_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}(z^{-1}) \\ \tilde{G}(z^{-1}) \end{bmatrix} X(z) = \tilde{M}(z^{-2})^t \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} X(z) \quad (21)$$

注意:式(21)中矢量乘法的顺序是先右后左.

式(21)的等效表示图如图 4 所示.

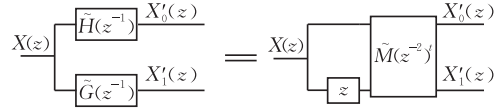


图 4

由滤波器组理论可知图 2 左半部分的等效易位表示图如图 5 所示.

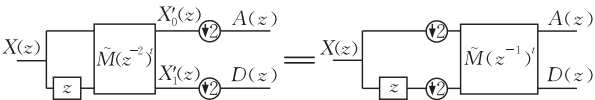


图 5

所以,综合以上的推导,参考图 1、图 2 以及上面的两个等效表示图得出结论:

FIR 滤波器组的通道表示的左半部分(分析部分)与多相表示的左半部分是等价的,且有

$$\tilde{M}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_e(z) & \tilde{G}_e(z) \\ \tilde{H}_o(z) & \tilde{G}_o(z) \end{bmatrix}.$$

3.1.2 综合端

由滤波器组理论可知图 2 右半部分的等效易位关系图如图 6 所示.

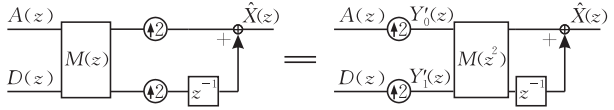


图 6

由图 6 得

$$\begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot M(z^2) \cdot \begin{bmatrix} Y'_0(z) \\ Y'_1(z) \end{bmatrix} = \hat{X}(z) \quad (22)$$

注意:式(22)中矢量乘法的顺序是先右后左.

设 $M(z) = \begin{bmatrix} m_{11}(z) & m_{12}(z) \\ m_{21}(z) & m_{22}(z) \end{bmatrix}$, 有

$$M(z^2) = \begin{bmatrix} m_{11}(z^2) & m_{12}(z^2) \\ m_{21}(z^2) & m_{22}(z^2) \end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} M(z^2) \cdot \begin{bmatrix} Y'_0(z) \\ Y'_1(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11}(z^2) & m_{12}(z^2) \\ m_{21}(z^2) & m_{22}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y'_0(z) \\ Y'_1(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11}(z^2)Y'_0(z) + m_{12}(z^2)Y'_1(z) \\ m_{21}(z^2)Y'_0(z) + m_{22}(z^2)Y'_1(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

综合式(22)和式(23)得

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot M(z^2) \cdot \begin{bmatrix} Y'_0(z) \\ Y'_1(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}(z^2)Y'_0(z) + m_{12}(z^2)Y'_1(z) \\ m_{21}(z^2)Y'_0(z) + m_{22}(z^2)Y'_1(z) \end{bmatrix} \\ &= (m_{11}(z^2)Y'_0(z) + m_{12}(z^2)Y'_1(z)) + \\ &\quad z^{-1}(m_{21}(z^2)Y'_0(z) + m_{22}(z^2)Y'_1(z)) \\ &= (m_{11}(z^2) + z^{-1}m_{21}(z^2))Y'_0(z) + \\ &\quad (m_{12}(z^2) + z^{-1}m_{22}(z^2))Y'_1(z) \end{aligned} \quad (24)$$

由图 1 得

$$H(z)Y'_0(z) + G(z)Y'_1(z) = \hat{X}(z) \quad (25)$$

综合式(24)和式(25)得

$$H(z) = m_{11}(z^2) + z^{-1}m_{21}(z^2),$$

$$G(z) = m_{12}(z^2) + z^{-1}m_{22}(z^2),$$

又因为

$$H(z) = H_e(z^2) + z^{-1}H_o(z^2),$$

$$G(z) = G_e(z^2) + z^{-1}G_o(z^2),$$

可得

$$m_{11}=H_e, m_{12}=G_e, m_{21}=H_o, m_{22}=G_o,$$

故

$$M(z)=\begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix} \quad (26)$$

综合以上的推导,参考图 1、图 2 及式(24)~(26)

得出结论:

FIR 滤波器组的通道表示的右半部分(综合部分)与多相表示的右半部分是等价的,且有

$$M(z)=\begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix}.$$

3.2 小波滤波器组的多相表示与 Lifting 表示之间的关系

由图 2 得

$$\begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix}=\widetilde{M}(z^{-1})^t \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix} \text{ 和} \\ \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix}=M(z) \begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix} \quad (27)$$

由图 3 的左半部分得

$$D(z)=-P(z) \cdot X_e(z)+X_o(z) \quad (28)$$

$$A(z)=X_e(z)+U(z) \cdot D(z) \quad (29)$$

式(28)等效表示为

$$\begin{bmatrix} X_e(z) \\ D(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(29)等效表示为

$$\begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(z) \\ D(z) \end{bmatrix} \quad (31)$$

由式(30)和式(31)得

$$\begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix} \quad (32)$$

由式(27)和式(32)得

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(z^{-1})^t &= \begin{bmatrix} 1 & U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P(z) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-U(z)P(z) & U(z) \\ -P(z) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

由图 3 的右半部分得

$$X_e(z)=A(z)-U(z) \cdot D(z) \quad (34)$$

$$X_o(z)=P(z)X_e(z)+D(z) \quad (35)$$

式(34)等效表示为

$$\begin{bmatrix} X_e(z) \\ D(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix} \quad (36)$$

式(35)等效表示为

$$\begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(z) \\ D(z) \end{bmatrix} \quad (37)$$

由式(36)和式(37)得

$$\begin{bmatrix} X_e(z) \\ X_o(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(z) \\ D(z) \end{bmatrix} \quad (38)$$

由式(27)和(38)得

$$\begin{aligned} M(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ P(z) & 1-U(z)P(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P(z) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

综合式(33)、(39)和(40)得

$$M(z) \cdot \widetilde{M}(z^{-1})^t = I,$$

即

$$\begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{H}_e(z^{-1}) & \widetilde{G}_e(z^{-1}) \\ \widetilde{H}_o(z^{-1}) & \widetilde{G}_o(z^{-1}) \end{bmatrix}^t = I.$$

由以上的推导,得出 $\widetilde{M}(z)$ 、 $M(z)$ 与 P 、 U 之间的内在关系

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(z) &= \begin{bmatrix} \widetilde{H}_e(z) & \widetilde{G}_e(z) \\ \widetilde{H}_o(z) & \widetilde{G}_o(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-U(z^{-1})P(z^{-1}) & -P(z^{-1}) \\ U(z^{-1}) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

$$M(z)=\begin{bmatrix} H_e(z) & G_e(z) \\ H_o(z) & G_o(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -U(z) \\ P(z) & 1-U(z)P(z) \end{bmatrix} \quad (42)$$

3.3 小波滤波器组的 Lifting 表示与通道表示之间的关系

由式(41)和式(42)得

$$\widetilde{G}(z)=\widetilde{G}_e(z^2)+z^{-1}\widetilde{G}_o(z^2)=-P(z^{-2})+z^{-1},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(z) &= \widetilde{H}_e(z^2)+z^{-1}\widetilde{H}_o(z^2) \\ &= 1-U(z^{-2})P(z^{-2})+z^{-1}U(z^{-2}) \\ &= 1+U(z^{-2})(-P(z^{-2})+z^{-1}) \\ &= 1+U(z^{-2}) \cdot \widetilde{G}(z), \end{aligned}$$

$$H(z)=H_e(z^2)+z^{-1}H_o(z^2)=1+z^{-1}P(z^2),$$

$$\begin{aligned} G(z) &= G_e(z^2)+z^{-1}G_o(z^2) \\ &= -U(z^2)+z^{-1}(1-U(z^2)P(z^2)) \\ &= z^{-1}-U(z^2)(1+z^{-1}P(z^2)) \\ &= z^{-1}-U(z^2) \cdot H(z). \end{aligned}$$

综合上面的推导,得出如下公式:

$$\tilde{G}(z)=z^{-1}-P^*(z^2) \tag{43}$$

$$\tilde{H}(z)=1+U^*(z^2)\cdot\tilde{G}(z) \tag{44}$$

$$H(z)=1+z^{-1}P(z^2) \tag{45}$$

$$G(z)=z^{-1}-U(z^2)\cdot H(z) \tag{46}$$

式中 $P^*(z)=P(z^{-1})$, $U^*(z)=U(z^{-1})$, 所以有 $P^*(z^2)=P(z^{-2})$, $U^*(z^2)=U(z^{-2})$.

根据上面的公式可以由 P, U 求出 $\tilde{H}, \tilde{G}, H, G$.

4 Neville 滤波器与二通道 Lifting 小波滤波器的设计

如引言所述, Kovačević 和 Sweldens 的 Neville 滤波器理论应用到 lifting 小波滤波器组的设计时, 其所使用的 FIR 滤波器组的通道表示形式并不符合 Mallat 关于多分辨率信号分解的小波滤波器组表示方法, 这就造成了其所设计出的预测滤波器和更新滤波器必须根据 Mallat 方法进行相应的转换才能使用, 而 Kovačević 和 Sweldens 并没有考虑到这一点, 也没有给出相应的转换方法. 本节根据 Mallat 关于多分辨率信号分解的小波滤波器组表示方法, 重新推导并完善了基于 Neville 滤波器的 lifting 小波滤波器的设计理论, 给出了基于 Neville 滤波器的二通道提升小波滤波器的设计定理.

4.1 预测滤波器 P 与 Neville 滤波器的关系

定理 3. P 是满足定义 1 中对偶消失矩条件 (对偶消失矩阶数是 \tilde{N}) 的二通道小波滤波器, 当且仅当 P 是 \tilde{N} 阶 $\tau=\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器.

证明. 首先证明必要条件

由定义 2 的对偶消失矩条件得

$$\tilde{G}^*\pi(\mathbf{Z})=\tilde{G}_e^*\pi(2\mathbf{Z})+\tilde{G}_o^*(2\mathbf{Z}+1)=0, \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}} \tag{47}$$

由式(41)得 $\tilde{G}_e=-P(z^{-1}), \tilde{G}_o=1$, 所以有 $-P\pi(2\mathbf{Z})+1\cdot\pi(2\mathbf{Z}+1)=0, \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}},$

$$P\pi(2\mathbf{Z})=\pi(2\mathbf{Z}+1), \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}}.$$

进一步得到

$$P\pi(\mathbf{Z})=\pi\left(\mathbf{Z}+\frac{1}{2}\right), \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}} \tag{48}$$

由式(48)和定义 1 得: P 是 \tilde{N} 阶 $\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器

由以上的推导过程可知其是可逆推的, 所以定理 3 得证. 证毕.

4.2 更新滤波器 U 与 Neville 滤波器的关系

定理 4. 设预测滤波器 P 是 \tilde{N} 阶 $\tau=\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器, 且有 $N\leq\tilde{N}$, 那么更新滤波器 U 是满足定义 1 中主消失矩条件 (主消失矩阶数是 N) 的二通道小波滤波器, 当且仅当 U 是 N 阶 $\tau=-\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器的 $\frac{1}{2}$.

证明. 首先证明必要条件.

由定义 2 的主消失矩条件得

$$G^*\pi(\mathbf{Z})=G_e^*\pi(2\mathbf{Z})+G_o^*\pi(2\mathbf{Z}+1)=0, \text{ for } \pi\in\Pi_N \tag{49}$$

由式(42)得 $G_e=-U(z), G_o=1-U(z)P(z)$, 所以有

$$\begin{aligned} -U^*\pi(2\mathbf{Z})+(1-U^*P^*)\pi(2\mathbf{Z}+1)&=0, \text{ for } \pi\in\Pi_N, \\ -U^*\pi(2\mathbf{Z})+\pi(2\mathbf{Z}+1)-U^*P^*\pi(2\mathbf{Z}+1)&=0, \\ &\text{for } \pi\in\Pi_N \end{aligned} \tag{50}$$

由式(48)和定理 2 得

$$\begin{aligned} P^*\pi(\mathbf{Z})&=\pi\left(\mathbf{Z}-\frac{1}{2}\right), \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}}, \\ P^*\pi(2\mathbf{Z})&=\pi(2\mathbf{Z}-1), \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}}, \\ P^*\pi(2\mathbf{Z}+1)&=\pi(2\mathbf{Z}), \text{ for } \pi\in\Pi_{\tilde{N}} \end{aligned} \tag{51}$$

当 $N\leq\tilde{N}$ 时, 综合式(50)和式(51)得 $-U^*\pi(2\mathbf{Z})+\pi(2\mathbf{Z}+1)-U^*\pi(2\mathbf{Z})=0, \text{ for } \pi\in\Pi_N,$ 有

$$2U^*\pi(\mathbf{Z})=\pi\left(\mathbf{Z}+\frac{1}{2}\right), \text{ for } \pi\in\Pi_N \tag{52}$$

由式(52)和定义 1 得: $2U^*$ 是 N 阶 $\tau=\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器.

又由定理 2 得: U 是 N 阶 $\tau=-\frac{1}{2}$ 平移的

Neville 滤波器的 $\frac{1}{2}$.

由以上的推导过程可知其是可逆推的, 所以定理 4 得证. 证毕.

4.3 基于 Neville 滤波器的二通道提升小波滤波器组设计

定理 5. 若 $N\leq\tilde{N}$, 则小波滤波器组是具有 \tilde{N} 阶对偶消失矩和 N 阶主消失矩的二通道提升小波滤波器组, 当且仅当预测滤波器 P 为 \tilde{N} 阶 $\tau_1=\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器, 且更新滤波器 U 为 N 阶 $\tau_2=-\frac{1}{2}$ 平移的 Neville 滤波器的 $\frac{1}{2}$.

证明. 综合定理 3 和定理 4 可证得定理 5.

证毕.

定理 5 的几点说明:

(1) 预测滤波器 $P^{\tilde{N}}$ 是阶 \tilde{N} 、平移 $\tau_1 = \frac{1}{2}$ 的 Neville 滤波器, 更新滤波器 U^N 是阶 N 、平移 $\tau_2 = -\frac{1}{2}$ 的 Neville 滤波器的 $\frac{1}{2}$, 这里的 U^N 本质上不是 Neville 滤波器.

(2) 在图像压缩中, 众所周知的一个规则是对偶消失矩 \tilde{N} 要比主消失矩 N 重要 ($N \leq \tilde{N}$). 因为 \tilde{N} 对应分析小波和综合尺度函数, 大的 \tilde{N} 一方面可以使更多的小波系数为零, 另一方面可以使重建尺度函数更平滑, 从而产生好的重建效果.

(3) 更新算子的直观含义: 更新操作的目的是使小波变换后的低频数据与原始数据有相同的均值. 两个数的平均等于一个数加上这两个数差值的一半 ($avg = a + \frac{b-a}{2}$), 这就解释了因子 $\frac{1}{2}$ 的由来.

5 二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器的设计

拉格朗日插值是一种非常好的多点预测方法. 在基于 lifting 的小波变换中, 首先经过懒散小波变换把信号分解成偶下标集和奇下标集两个子集合, 然后由偶下标集来预测奇下标集. 对于每一个奇下标点, 都可由与这一点相邻的若干个偶下标点来预测. 显然, 距离这个奇下标点越近的偶下标点与其相关性越大, 那么此偶下标点所对应的权重也就越大; 随着与奇下标点距离的加大, 相应的偶下标点的权重逐渐减小. 因为拉格朗日插值完全符合奇偶下标点预测的这一规律, 所以本节把拉格朗日插值理论引入小波滤波器组设计中, 结合 Neville 滤波器理论得出二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器的通用设计公式, 并根据小波滤波器组的双正交条件对其进行修正, 从而建立了一套完善的二通道 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组设计方法.

5.1 Lagrange 的 1/2 点插值

拉格朗日插值公式:

$$P_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{\prod_{\substack{j=0, j \neq k \\ 2N-1}}^{2N-1} (x-x_j)}{\prod_{\substack{j=0, j \neq k}}^{2N-1} (x_k-x_j)} \right) \cdot y_k = \sum_{k=0}^{2N-1} L_{2N,k} \cdot y_k \quad (53)$$

由图 7 知

$$\begin{aligned} & (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2N-1}) \\ &= ((N-1) \cdot 2a+a)((N-2) \cdot 2a+a)\cdots \\ & \quad (2a+a) \cdot a \cdot (-a)(-2a-a)\cdots \\ & \quad (- (N-2) \cdot 2a-a)(- (N-1) \cdot 2a-a) \\ &= (-1)^N a^{2N} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2 \end{aligned} \quad (54)$$

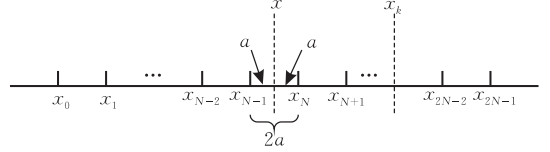


图 7 拉格朗日 1/2 点插值

求 $x-x_k$ 得

$$x-x_k = (2(N-1-k)+1)a \quad (55)$$

由式(54)和式(55)得

$$\begin{aligned} \prod_{j=0, j \neq k}^{2N-1} (x-x_j) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2N-1})}{x-x_k} \\ &= \frac{(-1)^N a^{2N} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2}{(2(N-1-k)+1)a} \\ &= \frac{(-1)^N a^{2N-1} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2}{2(N-1-k)+1} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0, j \neq k}^{2N-1} (x_k-x_j) \\ &= (x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots \\ & \quad (x_k-x_{2N-1}) \\ &= (k \cdot 2a)((k-1) \cdot 2a)\cdots 2a \cdot (-2a)\cdots \\ & \quad (- (2N-1-k) \cdot 2a) \\ &= k(k-1)\cdots 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots (2N-1-k) \cdot \\ & \quad (-1)^{2N-1-k} \cdot (na)^{2N-1} \\ &= (-1)^{2N-1-k} \cdot 2^{2N-1} \cdot a^{2N-1} \cdot k! \cdot (2N-1-k)! \end{aligned} \quad (57)$$

综合式(53)、(56)、(57)得

$$\begin{aligned} L_{2N,k} &= \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^{2N-1} (x-x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^{2N-1} (x_k-x_j)} \\ &= \frac{(-1)^N a^{2N-1} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2 / (2(N-1-k)+1)}{(-1)^{2N-1-k} \cdot 2^{2N-1} \cdot a^{2N-1} \cdot k! \cdot (2N-1-k)!} \\ &= \frac{(-1)^{N-1-k} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2}{(2N-1-2k) \cdot 2^{2N-1} \cdot k! \cdot (2N-1-k)!}, \\ & \quad 0 \leq k \leq 2N-1 \end{aligned} \quad (58)$$

定理 6. 令 $0 \leq k \leq 2N-1$, 若 $L_{2N,k}$ 如式(58)

所示,则有 $L_{2N,k} = L_{2N,2N-1-k}$ 成立.

证明.

由 $L_{2N,k}$ 得

$$L_{2N,k} = \frac{(-1)^{N-1-k} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2}{(2N-1-2k) \cdot 2^{2N-1} \cdot k! \cdot (2N-1-k)!} \quad (59)$$

在 $L_{2N,k}$ 中把 k 用 $2N-1-k$ 表示得

$$L_{2N,2N-1-k} = \frac{(-1)^{N-k} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} (2j+1)^2}{-(2N-1-2k) \cdot 2^{2N-1} \cdot k! \cdot (2N-1-k)!} = L_{2N,k} \quad (60)$$

证毕.

定理 6 说明: $L_{2N,k}$ 是关于中心对称的.

5.2 二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组设计定理

利用式(58)中 $L_{2N,k}$ 的表达式可设计二通道线性相位的提升小波滤波器. 因为设计方法是基于拉格朗日插值系数 $L_{2N,k}$ 的, 且所设计的提升小波滤波器满足定理 5, 所以, 我们称该方法所设计的滤波器组为二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组. 下面给出二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的设计定理及其证明.

定理 7. 若 $N \leq \tilde{N}$, 令 $P_{2\tilde{N}}(z) = \sum_{k=0}^{2\tilde{N}-1} L_{2\tilde{N},k} z^{\tilde{N}-k}$,

则我们可以按如下方法构建具有 $2\tilde{N}$ 阶对偶消失矩和 $2N$ 阶主消失矩的二通道线性相位的提升小波滤波器组: 令预测滤波器为 $P_{2\tilde{N}}(z)$, 选择更新滤波器为 $\frac{1}{2}P_{2N}(z^{-1})$.

证明.

(1) 首先证明 $P_{2\tilde{N}}(z)$ 和 $\frac{1}{2}P_{2N}(z^{-1})$ 构成二通道提升小波滤波器组的预测滤波器和更新滤波器.

由 5.1 节的推导可知: 利用拉格朗日插值系数 $L_{2\tilde{N},k}$ 可以由临近的 $2\tilde{N}$ 个整数点上的值来预测区间中点(1/2 点处)的值, 所以由定义 1 可得 $P_{2\tilde{N}}(z)$ 是 $2\tilde{N}$ 阶 $\tau \in \mathbf{R}$ 平移的 Neville 滤波器, 又由定理 3 知 $P_{2N}(z)$ 是对偶消失矩为 $2\tilde{N}$ 的提升小波滤波器组的预测滤波器, 由定理 5 可知 $\frac{1}{2}P_{2N}(z^{-1})$ 是主消失矩为 $2N$ 的提升小波滤波器组的更新滤波器.

(2) 其次证明该提升小波滤波器组具有线性相位性质. 为了证明小波滤波器组具有线性相位性质,

只需证明其通道表示的 $\tilde{H}(z)$ 和 $H(z)$ 是对称的.

首先证明 $H(z)$ 的对称性:

由 $P_{2\tilde{N}}(z) = \sum_{k=0}^{2\tilde{N}-1} L_{2\tilde{N},k} z^{\tilde{N}-k}$ 和式(45)可得

$$H(z) = 1 + z^{-1} P_{2\tilde{N}}(z^2) = 1 + \sum_{k=0}^{2\tilde{N}-1} L_{2\tilde{N},k} z^{2\tilde{N}-1-2k} \quad (61)$$

在式(61)中, 用 $2\tilde{N}-1-k$ 替代 k 可得 $z^{-(2\tilde{N}-1-2k)}$ 的系数为 $L_{2\tilde{N},2\tilde{N}-1-k}$.

由定理 6 可知 $L_{2\tilde{N},k} = L_{2\tilde{N},2\tilde{N}-1-k}$, 所以 $z^{-(2\tilde{N}-1-2k)}$ 和 $z^{2\tilde{N}-1-2k}$ 有相同的系数 $L_{2\tilde{N},k}$.

因此 $H(z)$ 的对称性得证.

其次证明 $\tilde{H}(z)$ 的对称性:

由式(43)和式(44)得

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z) &= 1 + U_{2N}^*(z^2) \cdot (z^{-1} - P_{2\tilde{N}}^*(z^2)) \\ &= 1 + \frac{1}{2} P_{2N}(z^2) \cdot (z^{-1} - P_{2\tilde{N}}(z^{-2})) \\ &= 1 + \frac{1}{2} z^{-1} P_{2N}(z^2) - \frac{1}{2} z^{-1} P_{2N}(z^2) \cdot z P_{2\tilde{N}}(z^{-2}). \end{aligned}$$

由式(61)对称性的证明可知: $z^{-1} P_{2N}(z^2)$ 和 $z P_{2\tilde{N}}(z^{-2})$ 都是对称的,

因此 $\tilde{H}(z)$ 的对称性得证.

结合(1)、(2)可得定理 7 成立.

证毕.

5.3 二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的修正(系数归一化)

对于图像处理应用来讲, 第一代小波滤波器的系数需要满足归一化条件, 归一化对于图像压缩等应用来讲是至关重要的, 没有归一化的小波滤波器组其图像压缩效果要差很多. 同样的, 提升小波滤波器组也要满足相应的归一化条件, 两者的不同在于它们的归一化模式不同. 第一代小波的归一化是通过放缩小波滤波器组的系数来实现的, 而以提升格式为代表的第二代小波则是通过放缩信号分解之后的系数来实现的. 本节给出二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的归一化方法.

令 $z=1$, 由定理 7 和定理 1 得

$$P_{2\tilde{N}}(1) = (1/2)^0 = 1 \quad (62)$$

令 $z=1$, 由定理 7 和式(62)得

$$U_{2N}(1) = \frac{1}{2} P_{2N}(1) = \frac{1}{2} \quad (63)$$

令 $z=1$, 将式(62)和式(63)代入式(43)~(46)得

$$\tilde{G}(1) = 1 - P(1) = 0 \quad (64)$$

$$\widetilde{H}(1)=1+U(1)\cdot\widetilde{G}(1)=1$$

(65)

$$H(1)=1+P(1)=2$$

(66)

$$G(1)=1-U(1)\cdot H(1)=0$$

(67)

所以由式(64)~(67)可得如下关系式

$$\sum_k \tilde{h}_k=1, \sum_k \tilde{g}_k=0, \sum_k h_k=2, \sum_k g_k=0$$

(68)

由多分辨率分析理论可知:满足标准双正交基条件的小波滤波器组,其滤波器系数满足如下归一化条件:

$$\sum_k \tilde{h}_k=\sqrt{2}, \sum_k \tilde{g}_k=0, \sum_k h_k=\sqrt{2}, \sum_k g_k=0$$

(69)

所以,比较式(68)和式(69)可知其归一化处理方案为

$$\sum_k \tilde{h}_k=\sum_k \tilde{h}_k\cdot\sqrt{2}, \sum_k \tilde{g}_k=\sum_k \tilde{g}_k/\sqrt{2},$$

$$\sum_k h_k=\sum_k h_k/\sqrt{2}, \sum_k g_k=\sum_k g_k\cdot\sqrt{2}$$

(70)

因为传统小波滤波器组的归一化是用通道滤波器组(图 1)来描述的,体现在 lifting 结构上就是对提升之后的系数进行缩放操作,也就是将对应于 $\widetilde{H}, \widetilde{G}, H, G$ 通道的系数分别进行 $\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 操作. 归一化之后的系统才是真正可用的图像压缩系统,修正后的系统结构原理如图 8 所示.

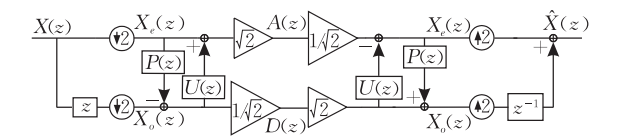


图 8 二通道 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的修正结构图

5.4 设计实例(Neville-Lagrange-44 提升小波滤波器组)

式(58)中,当 $N=2$ 时,有

$$L_{2N,k}=\frac{(-1)^{1-k}\cdot 3^2}{(3-2k)\cdot 2^3\cdot k!\cdot (3-k)!},$$

所以有

$$k=0 \text{ 时}, L_{4,0}=\frac{(-1)^1\cdot 9}{3\cdot 8\cdot (2\cdot 3)}=-\frac{1}{16};$$

$$k=1 \text{ 时}, L_{4,1}=\frac{(-1)^0\cdot 9}{1\cdot 8\cdot 2}=\frac{9}{16}.$$

由定理 6 得

$$k=2 \text{ 时}, L_{4,2}=L_{4,1}=\frac{9}{16};$$

$$k=3 \text{ 时}, L_{4,3}=L_{4,0}=-\frac{1}{16}.$$

由 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的设计定理 7 可知:当 $\widetilde{N}=N=2$ 时,可以构造出对偶消失矩和主消失矩都是 4 的提升小波滤波器组,我们称其为 Neville-Lagrange-44(简称 N-L-44)提升小波滤波器组. 预测滤波器 $P_4(z)$ 和更新滤波器 $U_4(z)$ 如表 1 所示.

表 1 N-L-44 提升小波滤波器系数表

	z^2	z^1	z^0	z^{-1}	z^{-2}
$P_4(z)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{16}$	
$U_4(z)$		$-\frac{1}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$-\frac{1}{32}$

6 二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器的实验分析

用本文设计的二通道线性相位 Neville-Lagrange-44 提升小波滤波器对 $512\times 512\times 8\text{bit}$ 的 Lena 图像进行图像压缩实验,并与 JPEG2000 用于有损压缩的 9/7 小波及其 lifting 结构下的图像压缩效果进行比较分析. 此外,还从波形上分析阐述了 N-L-44 提升小波滤波器和 JPEG2000 的 9/7 小波滤波器的压缩效果比较的深层原因. 图像分解后的小波系数采用 SPIHT 算法进行编码,且压缩过程中不进行熵编码.

6.1 压缩效果与 JPEG2000 的 9/7 小波实验对比分析

图 9 给出了 JPEG2000 的 9/7 小波滤波器组,以及本文所设计的 N-L-44 提升小波滤波器组图像压缩的比特率-峰值信噪比曲线比较图. 从图中可以看出:JPEG2000 的 9/7 小波滤波器组的 lifting 格式和本文的 N-L-44 提升小波滤波器组的图像压缩效果要明显好于 JPEG2000 的 9/7 小波滤波器组;相

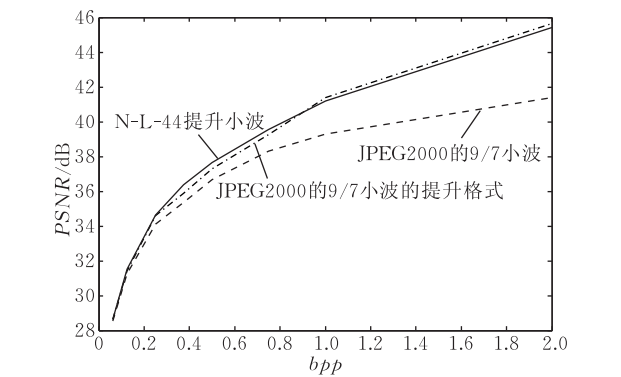


图 9 bpp-PSNR 曲线比较图

比于 JPEG2000 的 9/7 小波滤波器组的 lifting 格式, 本文的 N-L-44 提升小波滤波器组虽然在高比特率($bpp > 1$)时效果差一点, 但是在低比特率时取得了较好的效果.

6.2 波形图与 JPEG2000 的 9/7 小波对比分析

在应用小波滤波器组对图像分解的时候, 希望得到尽可能多的趋近于零的小波系数, 也就是希望分析小波的消失矩尽可能的高; 而重建图像的时候, 希望恢复图像的质量尽可能的好, 也就是要求综合尺度函数的消失矩尽可能的高; 由小波滤波器理论可知, 分析小波和综合尺度函数具有相同的消失矩. 所以, 综合尺度函数的平滑性越好, 滤波器的图像压缩效果也就越好. 从图 10 的波形图可以看出: 本文所设计的具有 4 阶主消失矩和 4 阶对偶消失矩的 N-L-44 提升小波滤波器组的综合尺度函数的平滑性要好于具有相同消失矩阶数的 JPEG2000 的 9/7 小波滤波器的综合尺度函数, 这也是本文所设计的 N-L-44 提升小波滤波器在低比特率($bpp < 1$)下的压缩效果好于 9/7 小波的原因. 影响滤波器图像压缩效果的另外一个因素是小波滤波器的长度, 较长的小波滤波器固然能够使其小波平滑性更好, 但因为用滤波器作图像分解时对图像作更多点的延拓, 所以也会在高比特率时引入更大的误差. 但对于有损图像压缩来讲, 低比特率情况才真正有实际的意义.

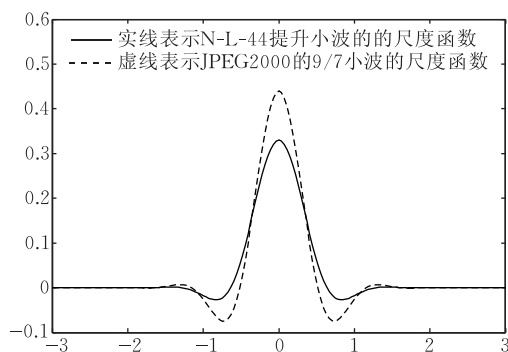


图 10 波形对比图

7 结论及分析

本文根据 Mallat 关于多分辨率信号分解的小波滤波器组表示方法, 重新推导并完善了 Kovačević 和 Sweldens 提出的 Neville 滤波器理论, 建立了小波滤波器组的通道表示、多相表示和 lifting 表示之间的关系, 给出了相互之间的转换公式, 从而建立了一套完整实用的 Neville 滤波器设计理论. 本文结合 Lagrange 插值理论和 Neville 滤波器理论, 建立了

二通道线性相位 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的设计理论和归一化方法, 并给出了二通道的 N-L-44 提升小波滤波器组的设计实例. 实验结果表明: N-L-44 提升小波滤波器组的图像压缩效果要明显好于 JPEG2000 所推荐的 9/7 小波滤波器组, 其在低比特率($bpp < 1$)时的图像压缩效果要好于 JPEG2000 的 9/7 小波的 lifting 格式. 另外, 从 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组的设计过程来分析, 其相对于 JPEG2000 的 9/7 小波还有以下几点优势: (1) Neville-Lagrange 提升小波滤波器组只包含一个预测步和一个更新步, 因此能够用来构造压缩效果更好的自适应的 Neville-Lagrange 提升小波滤波器组, 而 JPEG2000 的 9/7 小波的 lifting 格式是由两组预测步和更新步组成, 不能用来设计自适应的小波滤波器组. (2) Neville 理论可以很容易地扩展到二维(把采样因子扩展到采样矩阵), 从而构建效果更好的不可分离的纯二维 lifting 小波滤波器组.

参 考 文 献

- [1] Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks: Theory and design. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207-2232
- [2] Andreopoulos Y, Munteanu A, Auwera G V, Cornelis J P H, Schelkens P. Complete-to-overcomplete discrete wavelet transforms: Theory and applications. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(4): 1398-1412
- [3] Wu Xiaolin, Dumitrescu S, Zhang Ning. On multirate optimality of JPEG2000 code stream. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(12): 2012-2023
- [4] Lalgudi H G, Bilgin A, Marcellin M W, Nadar M S. Compression of multidimensional images using JPEG2000. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 393-396
- [5] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1998, 29(2): 511-546
- [6] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1998, 4(3): 247-268
- [7] Zhang Xi, Wang Wei, Yoshikawa T, Takei Y. Design of IIR orthogonal wavelet filter banks using lifting scheme. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(7): 2616-2624
- [8] Wang Chao, Gan W S. Efficient VLSI architecture for lifting-based discrete wavelet packet transform. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2007, 54(5): 422-426

- [9] Seo Y H, Kim D W. VLSI architecture of line-based lifting wavelet transform for motion JPEG2000. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2007, 42(2): 431-440
- [10] Tian Xin, Tan Yi-Hua, Tian Jin-Wen. A new design for 9/7-tap wavelet filter and its VLSI implementation. *Chinese Journal of Computers*, 2008, 31(3): 411-418(in Chinese)
(田昕, 谭毅华, 田金文. 一种并行提升小波基的设计方法与 VLSI 实现研究. *计算机学报*, 2008, 31(3): 411-418)
- [11] Brislawn C M, Wohlberg B. The polyphase-with-advance representation and linear phase lifting factorizations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2022-2034
- [12] Nalbalwar S, Joshi S D, Patney R K. On charecterization of linear phase nonuniform filter banks. *Signal Processing*, 2008, 88: 1980-1989
- [13] Kovačević J, Sweldens W. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(3): 480-496
- [14] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11(7): 674-693
- [15] Shi Z, Wei G W, Kouri D J, Hoffman D K, Bao Z. Lagrange wavelets for signal processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(10): 1488-1508
- [16] Yekta M M J. Half-band FIR fractional delay filters with closed-form coefficient formulas and modular implementation based on Lagrange interpolators. *Signal Processing*, 2008, 88: 2913-2916



CHEN Dong, born in 1976, Ph.D. candidate. His research interests include wavelet analysis, data compression, signal processing, and computer vision.

ZHANG Tian-Wen, born in 1940, professor, Ph.D. supervisor. His research interests include active vision, artificial intelligence, image processing, virtual reality, and pattern recognition.

LI Dong, born in 1967, professor. His research interests include computer network security, parallel computing, computer architecture, and computer graphics.

Background

This research is an important part of the National Natural Science Foundation of China (No.60875013 and No.60475011). The main objective of the two programs is to study the design of wavelet filter banks and the algorithm for image compression.

Discrete wavelet transform (DWT) is the dominant method of image compression and becomes the core technique of static image compression standard of JPEG2000. The second wavelet theory based on lifting is the development and improvement of classic DWT, and the powerful wavelet filter banks for image compression can be designed using lifting.

The Neville filter theory is a useful tool for constructing the lifting wavelet filter banks, Neville filter theory and Lagrange interpolation are combined in our research and the new filter banks that named “two-channel Neville-Lagrange lifting wavelet filter banks with linear phase” are constructed. Test result shows that the new filter banks improve the image compression performance at low bit rate and shows the great potential advantages, such as the design of adaptive lifting wavelet filter bank, the construction of the True-2D lifting wavelet filter bank.