

# 基于三角域上 V-系统的三维几何模型的正交重构

李 坚<sup>1)</sup> 宋瑞霞<sup>2)</sup> 叶梦杰<sup>1)</sup> 梁延研<sup>1)</sup> 齐东旭<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(澳门科技大学资讯科技学院 澳门)

<sup>2)</sup>(北方工业大学理学院 北京 100144)

**摘 要** 提出了一种新的对三维几何模型的描述方法. 利用三角域上的一类完备正交函数系——V-系统这一数学工具, 对三角片构成的几何模型进行正交展开, 其展开系数(谱系数)便是该模型的数字描述. 由于 V-系统所具有的特殊性质, 可以对多个分离的三角片, 进行整体的表达. 这种正交表达, 使得把频谱分析的方法引入到对三维网格模型的研究中成为可能.

**关键词** 三维几何模型; 三角域; V-系统; 正交重构; 频谱

**中图法分类号** TP391 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2009.00193

## Orthogonal Reconstruction of 3D Model Based on V-System over Triangular Domain

LI Jian<sup>1)</sup> SONG Rui-Xia<sup>2)</sup> YE Meng-Jie<sup>1)</sup> LIANG Yan-Yan<sup>1)</sup> QI Dong-Xu<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macao)

<sup>2)</sup>(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100144)

**Abstract** This paper presents a novel method for representing the 3D model. A new complete orthogonal function system over nested triangulated domains, called V-system, is applied to decompose 3D model to spectrums. Due to some special properties of the V-system those separate 3D models could be represented untidily. The orthogonal expressions of the 3D models make it be possible that to study 3D models by spectrum analysis.

**Keywords** 3D model; triangular domains; V-system; orthogonal reconstruction; spectrums

## 1 引 言

本文所阐述的三维几何模型指的是三维空间中的曲面. 曲面表示方法大体上可分为隐式和参数形式. 参数形式的曲面是由参数化矢量方程  $f: \Omega \rightarrow S$  定义的. 其中三维曲面  $S = f(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$  被映射到二维参数域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  上. 在实际应用中, 经常把区域分割成三角形子区域或四边形子区域, 而三角形区域是本

文关注的重点. 三维几何模型的参数表示中, 应用最为广泛的主要有以下几类: 样条曲面<sup>[1-3]</sup>、细分曲面<sup>[4]</sup>、三角网格等<sup>[5]</sup>. 以上所说的几何模型参数化表示都是在三维空间中对几何模型进行描述, 而本文提出的对几何模型的正交表达, 是从频率域的角度对模型进行描述.

频域分析方法在信号处理与数字图象处理领域有着非常广泛及成功的应用. 在处理某些问题如滤波、消噪等, 频域方法特别具有优势. 目前针对三维

收稿日期: 2008-07-29; 最终修改稿收到日期: 2008-09-24. 本课题得到国家自然科学基金(10631080, 10771002)、国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2004CB318006)和澳门科学技术发展基金(045/2006/A)资助. 李 坚, 男, 1975 年生, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学. E-mail: linxli3@163.com. 宋瑞霞, 女, 1963 年生, 硕士, 教授, 研究领域为计算机图形学、数字几何. 叶梦杰, 男, 1982 年生, 硕士研究生, 研究方向为计算机图形学. 梁延研, 男, 1982 年生, 博士研究生, 研究方向为数字信号处理、计算机图形学. 齐东旭, 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 研究领域为计算几何、计算机图形学.

几何模型的频域处理方法的研究却相对较少. 其中一个比较重要的原因就是三维几何模型的正交表达是困难的. 虽然小波也应用于三维几何模型的多分辨分析中, 但在模型的多分辨分析中的小波系数并不是对模型的正交展开系数. 如果没有适当的正交函数系来对三维几何模型正交展开, 那对三维几何模型的频域分析也就无从谈起.

传统的在矩形域上的张量积形式的正交函数系, 在表达三维几何模型上存在一定的困难. 而三角域对于表达三维几何模型有其本质上的优势, 关于三角域上的正交函数系, 针对 Walsh 及 Haar 函数系相关的研究见文献[6-7], 但这样的函数系不能用于几何造型的表达. 本文使用基于三角域上的一类完备正交函数系——三角域上的 V-系统(见文献[8]), 利用三角域上的 V-系统这一数学工具, 构造正交展开算法, 得到相关模型的展开系数(频谱), 利用频谱重构原始三维几何模型. 特别强调指出, 本文的方法, 能实现用分片多项式构造的 3D 几何图组的整体重构, 这就使得针对由多个互相分离的 3D 造型构成一个统一的对象的问题, 能够进行整体频谱分析. 本文提供的例子将着重解释这一特点. 在不引起混淆的情况下, 下面简称三角域上 V-系统为 V-系统.

## 2 三角域上 V-系统的构造和性质

单变量的 V-系统是在文献[9]中首次提出的, 它是一类  $L^2[0, 1]$  上的完备正交函数系, 并且应用于几何图组的正交表达等多个方面<sup>[10-13]</sup>. 事实上, 在单变量的 V-系统建立之前, 有一个类似的正交函数系——U-系统, 在文献[14]中有关于 U-系统的研究. 单变量的 V-系统是在 U-系统的基础上发展而来, 它们之间有密切的联系(见文献[9]).

2007 年文献[8]给出三角域上 V-系统的构造原理, 指出三角域上的 V-系统定义在具有多层次自相似剖分结构的三角域上. 本文将针对线性系统比较详细地阐述 V-系统的具体构造. 不失一般性, 我们将三角域取定为面积为 1 的直角三角域, 记为  $G$ , 其顶点坐标为  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0)$ ,  $P_3 = (0, 2)$ , 如图 1(a)所示.

### 2.1 三角域及其剖分

以上述三角域  $G$  为初始三角形, 并进一步定义剖分规则. 剖分规则如下, 以上一层次的三角子区域为基础, 取其三条边上的中点作为新的顶点, 并且以直线连接这些顶点, 将原三角形子区域剖分为更小

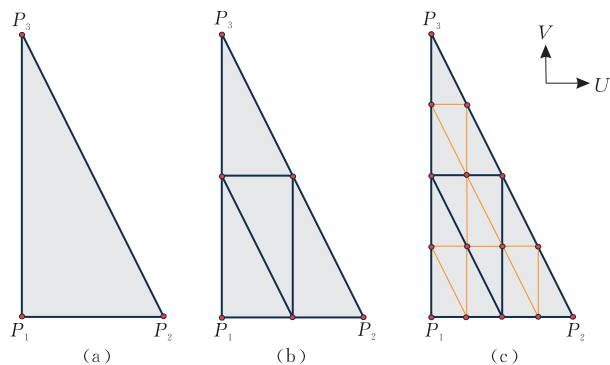


图 1 三角域上的层次剖分结构

的 4 个子区域. 图 1(b)、(c) 分别为从初始三角域  $G$  出发的一级剖分和二级剖分的结果. 可以看出每经过一次剖分, 三角子区域的总数就是上一级剖分子区域数目的 4 倍. 经过  $N$  级剖分三角域  $G$  上就应该有  $4^N$  个三角子区域.

为了不造成混淆并且使说明简便, 对三角形子区域规定如下标注. 对三角域  $G$  的  $N$  级剖分, 所有的子区域都以  $G_{\alpha, \beta}$  编号, 其中  $\alpha$  是垂直方向三角子区域所在位置,  $\beta$  是水平方向三角子区域所在位置. 则  $G_{\alpha, \beta}$  就是第  $\alpha$  行第  $\beta$  个三角子区域. 一级剖分下的四个子区域分别是  $G_{1,1}, G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}$ , 其对应位置如图 2 所示. 在图 2 中还有当  $N=2, N=3$  时三角子区域的标注情形. 而 V-系统就是定义在这个具有层次自相似剖分结构的三角域上的分片多项式.

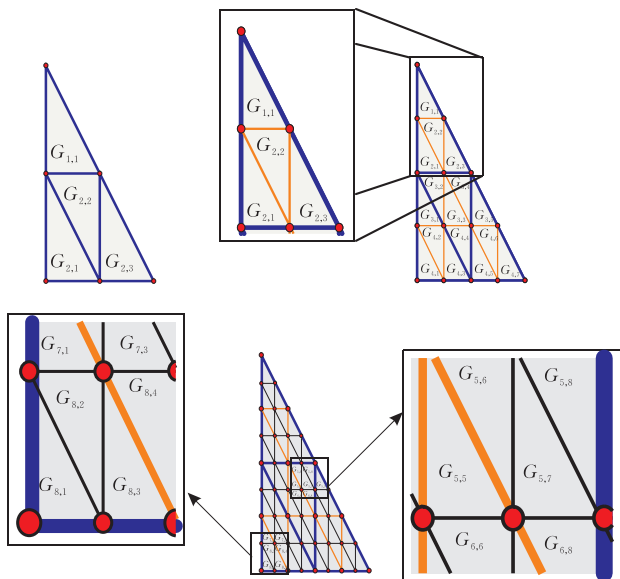


图 2  $N=1, 2, 3$  时三角子区域的编号

### 2.2 三角域上 V-系统的生成

本文所使用的是线性 V-系统, 它由定义在三角域  $G$  上的正交分片二元一次多项式组成. 构造线性 V-系统, 首先要在 4 剖分的三角域  $G$  上选择一组线

性无关函数,然后按照函数生成元定义(见文献[8])将其正交规范化,得到一组相互正交的函数生成元.最后,通过对函数生成元进行压缩、平移和旋转等操作产生线性 V-系统中的所有其他函数.由于在 4 剖分下,三角域上的分片二元一次多项式构成 12 维线性空间,所以选择 12 个线性无关的函数.前 3 个函数是定义在整个区域  $G$  上的二元一次多项式,后面 9 个是在  $G$  上分片定义的二元一次多项式.所选择的线性无关函数如下:

$$\varphi_1(u,v)=1, \quad \varphi_2(u,v)=u, \quad \varphi_3(u,v)=v,$$
$$\varphi_4=\begin{cases} 1, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \varphi_5=\begin{cases} 1, & (u,v)\in G_{2,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$
$$\varphi_6=\begin{cases} 1, & (u,v)\in G_{2,3} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \varphi_7=\begin{cases} u, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$\varphi_8=\begin{cases} u, & (u,v)\in G_{2,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \varphi_9=\begin{cases} u, & (u,v)\in G_{2,3} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$
$$\varphi_{10}=\begin{cases} v, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \varphi_{11}=\begin{cases} v, & (u,v)\in G_{2,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$
$$\varphi_{12}=\begin{cases} v, & (u,v)\in G_{2,3} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

并且定义三角域  $G$  上函数  $f$  和  $g$  的内积:

$$\langle f,g\rangle=\iint_G fg\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{2(1-x)}fg\mathrm{d}v \quad (1)$$

经过对以上这组线性无关函数规范正交化之后,得到了 12 个规范正交函数.前 3 个称为基本函数,另外 9 个在三角域  $G$  上的分片二元一次多项式,称为函数生成元.其图形如图 3 所示.

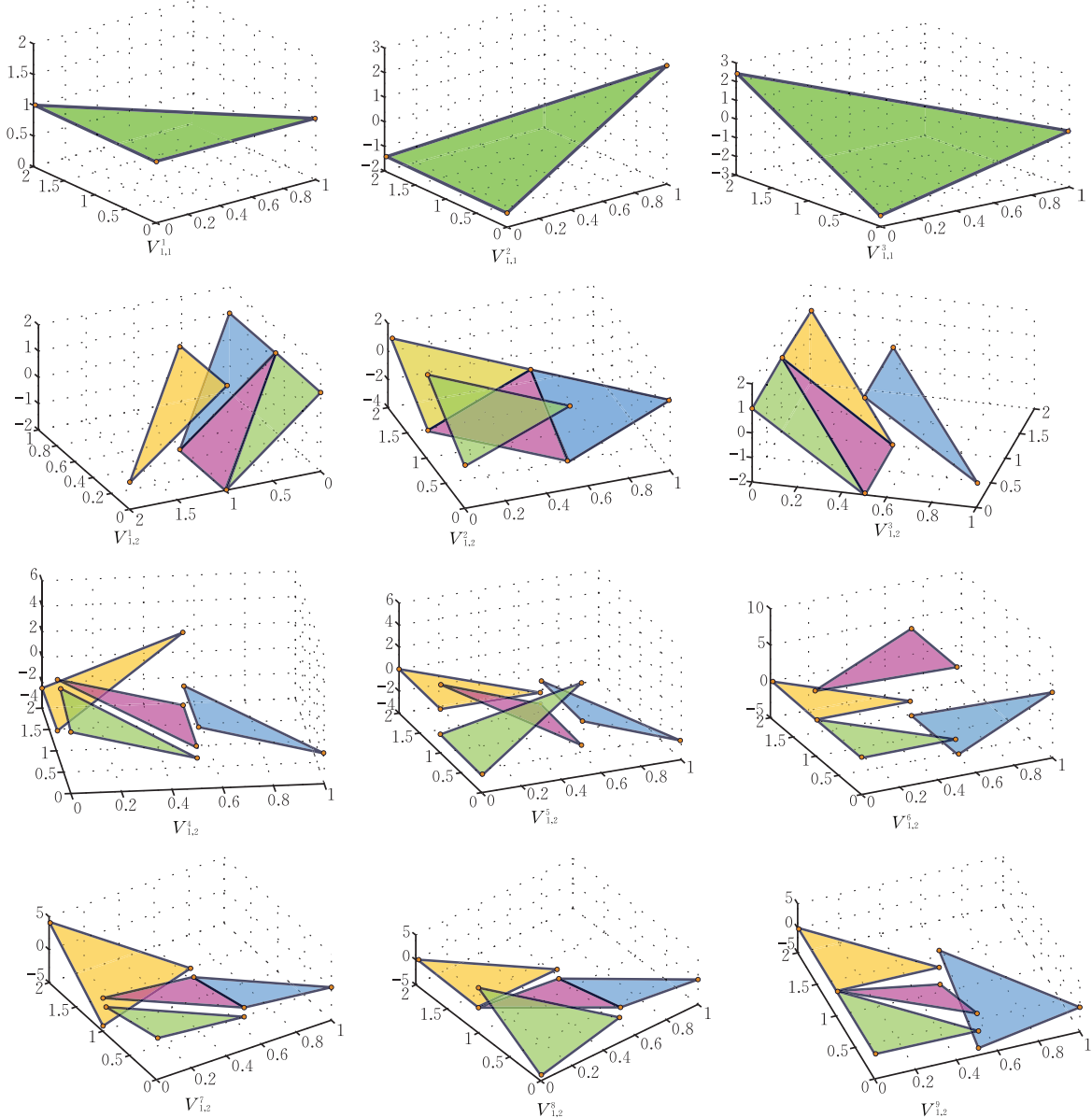


图 3 线性 V-系统的基本函数及生成元

基本函数和生成元的表达式如下:

$$V_{1,1}^1(u,v)=1,$$

$$V_{1,1}^2(u,v)=3\sqrt{2}u-\sqrt{2},$$

$$V_{1,1}^3(u,v)=\sqrt{6}u+\sqrt{6}v-\sqrt{6},$$

$$V_{1,2}^1(u,v)=\begin{cases} -3v+5, & (u,v)\in G_{1,1} \\ -3v+1, & (u,v)\in G_{2,1} \\ -3v+1, & (u,v)\in G_{2,2} \\ -3v+1, & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^2(u,v)=\begin{cases} 6u+3v-5, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 6u+3v-1, & (u,v)\in G_{2,1} \\ 6u+3v-5, & (u,v)\in G_{2,2} \\ 6u+3v-5, & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^3(u,v)=\begin{cases} -6u+1, & (u,v)\in G_{1,1} \\ -6u+1, & (u,v)\in G_{2,1} \\ -6u+1, & (u,v)\in G_{2,2} \\ -6u+5, & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^4(u,v)=\begin{cases} \sqrt{6}(6u-1), & (u,v)\in G_{1,1} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}(-6u+1), & (u,v)\in G_{2,1} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}(-6u+2), & (u,v)\in G_{2,2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}(-6u+4), & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^5(u,v)=\begin{cases} 0, & (u,v)\in G_{1,1} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(24u-4), & (u,v)\in G_{2,1} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-12u+4), & (u,v)\in G_{2,2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-12u+8), & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^6(u,v)=\begin{cases} 0, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 0, & (u,v)\in G_{2,1} \\ -12u+4, & (u,v)\in G_{2,2} \\ 12u-8, & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^7(u,v)=\begin{cases} \sqrt{2}(6u+6v-9), & (u,v)\in G_{1,1} \\ \sqrt{2}(-2u-2v+1), & (u,v)\in G_{2,1} \\ \sqrt{2}(-2u-2v+2), & (u,v)\in G_{2,2} \\ \sqrt{2}(-2u-2v+2), & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^8(u,v)=\begin{cases} 0, & (u,v)\in G_{1,1} \\ 8u+8v-4, & (u,v)\in G_{2,1} \\ -4u-4v+4, & (u,v)\in G_{2,2} \\ -4u-4v+4, & (u,v)\in G_{2,3} \end{cases},$$

$$V_{1,2}^9(u,v)=\begin{cases} 0, & (x,y)\in G_{1,1} \\ 0, & (x,y)\in G_{2,1} \\ \sqrt{3}(-4u-4v+4), & (x,y)\in G_{2,2} \\ \sqrt{3}(4u+4v-4), & (x,y)\in G_{2,3} \end{cases}.$$

这里需要指出,单变量情形的 V-系统,是一类很特别的有限区间上的多小波.文献[8-9]首先选定 Legendre 多项式作为基本函数,它们恰对应于尺度函数;构造的生成元恰对应于小波函数.现在研究三角域  $G$  上的 V-系统,作为第 1 组,即这里称为基本函数的前 3 个  $\{V_{1,1}^1, V_{1,1}^2, V_{1,1}^3\}$ ,对应尺度函数;9 个函数生成元  $\{V_{1,2}^1, \dots, V_{1,2}^9\}$  组成第 2 组,对应小波函数. V-系统的形成,通过生成元的压缩与平移完成.

V-系统按照分组分类来记录,符号  $V_{1,m}^{i,j}(u,v)$  表示线性 V-系统中第  $m$  组第  $i$  类的第  $j$  个函数.

首先将 9 个函数生成元分别缩 4 倍,复制到  $G$  的一级剖分后的子区域上,有

$$V_{1,3}^{i,1}=\begin{cases} 2V_{1,2}^i(2u,2(v-1)), & (u,v)\in G_{1,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$V_{1,3}^{i,2}=\begin{cases} 2V_{1,2}^i(2u,2v), & (u,v)\in G_{2,1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$V_{1,3}^{i,3}=\begin{cases} 2V_{1,2}^i\left(-2\left(u-\frac{1}{2}\right),-2(v-1)\right), & (u,v)\in G_{2,2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$V_{1,3}^{i,4}=\begin{cases} 2V_{1,2}^i\left(2\left(u-\frac{1}{2}\right),2v\right), & (u,v)\in G_{2,3} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$i=1,2,\dots,9.$$

这样一来,我们得到  $9\times 4$  个函数,它们定义在  $G$  的二级剖分域上,分成 9 类,每类 4 个函数.这 36 个函数构成线性 V-系统的第 3 组,示意图见图 4,白色部分表示取值为 0.

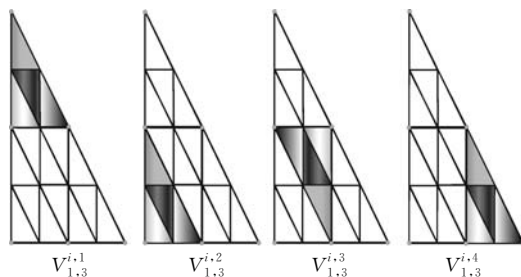


图 4 一次 V-系统的第 3 组第  $i$  类示意图

一般情形,将 9 个函数生成元分别压缩  $4^{m-2}$  倍,复制到  $m-2$  级剖分的子域  $G_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots$ ,

$2^{m-2}$ ,  $j=1,2,\cdots,2i-1$ ,  $m=3,4,\cdots$ ), 而其余部分取值为 0, 可得到  $9\times 4^{m-2}$  个函数, 组成第  $m$  组. 这一构造过程示意于图 5 中.

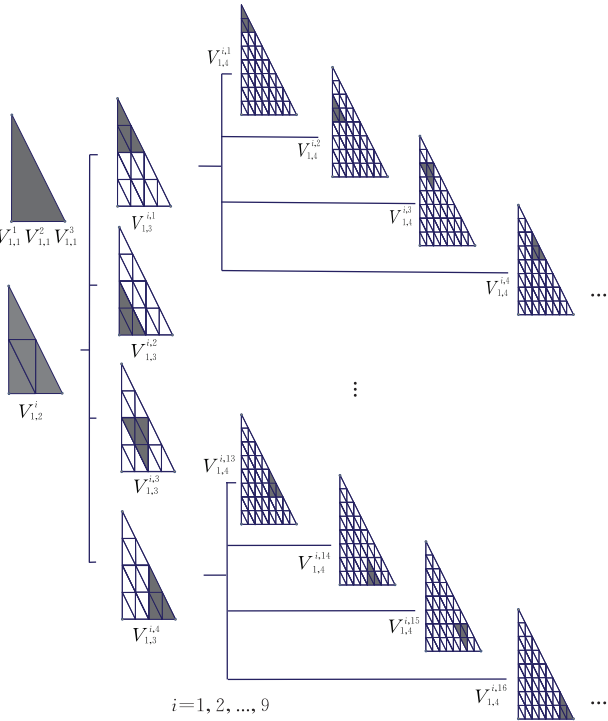


图 5 线性 V-系统基函数结构示意图

第  $m$  组第  $i$  类的第  $j$  个函数的表达式

$$V_{1,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{1,2}^i \left( 2^{m-2} \left( u - \frac{\beta-1}{2^{m-2}} \right), 2^{m-2} \left( v - \frac{2^{m-1}-2\alpha}{2^{m-2}} \right) \right) & (u,v) \in G_{\alpha,2\beta-1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
$$V_{1,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{1,2}^i \left( -2^{m-2} \left( u - \frac{\beta}{2^{m-2}} \right), -2^{m-2} \left( v - \frac{2^{m-1}-2\alpha+2}{2^{m-2}} \right) \right) & (u,v) \in G_{\alpha,2\beta} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第 1 组:  $V_{1,1}^1, V_{1,1}^2, V_{1,1}^3$ ;

第 2 组:  $V_{1,2}^1, V_{1,2}^2, \cdots, V_{1,2}^9$ ;

第  $m$  组:  $V_{1,m}^{i,j}$ ,  $m=3,4,\cdots$ ;  $i=1,2,\cdots,9$ ;  $j=$

$1,2,\cdots,4^{m-2}$  组成了三角域  $G$  上的线性 V-系统.

在此要特别说明, 由于从不同的线性无关函数出发可以构造出不同的函数生成元, 因此三角域上 V-系统中的基函数并不唯一. 以本文为例, 文章中使用的基函数与文献[8]中的基函数就是由不同的线性无关函数构造的.

### 2.3 三角域上 V-系统的性质

下面对 V-系统的性质做简单的介绍, 其具体的描述和证明见文献[8]. V-系统的性质主要有以下 3 点:

(1) 规范正交性. 三角域  $G$  上的  $k$  次 V-系统是规范正交函数系, 且每个函数具有局部支集.

(2) 再生性. 如果  $f(x,y)$  是定义在三角域  $G$  上的分片二元  $k$  次多项式, 其分段线恰是  $G$  的三角剖分线, 则  $f(x,y)$  可以由上述  $G$  上的  $k$  次 V-系统函数级数的有限项精确表达.

再生性表明, 带间断的分片多项式表达的三角曲面片, 可用三角域上 V-系统来精确表达. 在计算机辅助几何设计中, 几何造型的表达方式以分片多项式为主体, 因而用 V-系统作几何对象的正交重构, 能够消除 Gibbs 现象.

(3) 多分辨性. 三角域  $G$  上的  $k$  次 V-系统具有多分辨特性.

## 3 三维几何模型的正交展开

前面的章节中我们介绍了三角域上的线性(1 次) V-系统, 下面我们将针对如何利用这一数学工具, 对三维几何模型进行正交展开做详细的说明. 通过对三维几何模型的正交展开, 就得到了模型的正交表达. 文中除了给出三维几何模型的正交展开算法之外, 还进一步提出了重构算法. 通过重构算法, 就可以利用模型的正交展开系数, 精确重构出原始的三维几何模型.

### 3.1 三维几何模型的参数化

下面用  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$  表示三角域上点的坐标, 用  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  表示三维空间中的点坐标. 根据三角域上 V-系统的再生性得知, 只要能够把三维空间中的三维几何模型映射为三角域  $G$  上的分片二元一次多项式, 且分段线恰是  $G$  的三角剖分线, 那么就可以用线性 V-系统中的有限项基函数对三维几何模型进行精确表达. 一般地, 对于三维几何模型的计算机处理算法, 视三维几何模型为一些三角面片的组合, 并不认为它有任何特别的数学结构. 对三维几何数据的组织上经常使用顶点索引数据结构. 在这里给出的算法中, 我们将三维几何模型中的任意三角面片视为其 3 个顶点所确定的空间平面的一个子区域. 我们只要把空间平面子区域参数化到  $G$  的一个剖分子区域上, 就可以得到符合再生性所要求的分片二元一次多项式. 映射的步骤是这样的, 首先,

可以通过顶点索引得到任意三角面片  $\Delta P_1 P_2 P_3$  的 3 个顶点  $P_n = (x_n, y_n, z_n), n=1, 2, 3$ . 设要把这个三角面片映射到  $G$  的子区域  $G_{i,j}$  上, 三角子区域  $G_{i,j}$  的顶点为  $\tilde{P}_n = (u_n, v_n), n=1, 2, 3$ . 只要求解下面的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

就可以得到在参数域  $G_{i,j}$  上用下列 3 个二元一次函数表示的三角面片  $\Delta P_1 P_2 P_3$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto P_{\Delta}(u, v) = \begin{pmatrix} \alpha_x u + \beta_x v + \gamma_x \\ \alpha_y u + \beta_y v + \gamma_y \\ \alpha_z u + \beta_z v + \gamma_z \end{pmatrix},$$

其中  $(x, y, z) \in \Delta P_1 P_2 P_3$  并且  $(u, v) \in G_{i,j}$ .

当把三维几何模型中的所有三角面片都分别映射到  $G$  的不同子剖分区域时, 就得到了用分片二元一次多项式表示的三维几何模型

$$P_{\Delta}(u, v) = \begin{cases} P_{\Delta 1}(u, v)(u, v) \in G_{1,1} \\ P_{\Delta 2}(u, v)(u, v) \in G_{2,1} \\ \vdots \\ P_{\Delta n}(u, v)(u, v) \in G_{i,j} \end{cases},$$

其中  $n$  是三维几何模型中三角面片的总数. 显然, 如果三维几何模型中的三角面片数为  $n$  时, 就要对三角域  $G$  进行  $N$  次剖分, 使剖分区域变为个数不小于  $n$ , 且最接近  $n$  的  $4^N$  个子区域. 而剩余的  $4^N - n$  个子区域上的表达式为零. 在这一映射过程中, 三维几何模型中的三角面片是一一映射到三角域的剖分网格上的, 不允许出现不同三角面片映射到同一三角子区域上的情况.

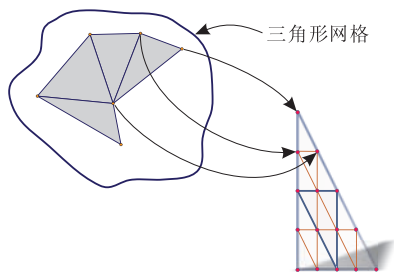


图 6 三角面片到剖分子区域的映射

### 3.2 三维几何模型的正交展开及重构

如前所述, 设三角域上线性(1次)V-系统的基函数按照其分组分类的生成顺序进行排列得到

$$V_{1,1}^1, V_{1,1}^2, V_{1,1}^3, V_{1,2}^1, V_{1,2}^2, \dots, V_{1,2}^9, V_{1,m}^{i,j},$$

其中  $m=3, 4, \dots; i=1, 2, \dots, 9; j=1, 2, \dots, 4^{m-2}$ .

为了简化记号, 依序记这个函数序列为  $V_i$ , 于

是, 三维几何模型可以表示为

$$P_{\Delta}(u, v) = \sum_{i=1}^{3 \times 4^N} c_i V_i(u, v) \quad (2)$$

其中  $c_i$  为 V-系统的正交展开系数, 可由下式求出:

$$c_i = \iint_G P_{\Delta}(u, v) V_i(u, v) dG \quad (3)$$

由三角域上的内积定义式(1), 求三维几何模型的展开系数, 就是求  $P_{\Delta}(u, v)$  和 V-系统上的基函数  $V_i$  这两个分片二元一次多项式在  $G$  上的内积. 如果一个有  $n$  片三角面片的模型, 参数化到  $N$  级剖分下的三角域  $G$  上, 那么, 用 V-系统中的  $3 \times 4^N$  个基函数就可以精确表达此三维几何模型. 传统上我们把信号的傅立叶展开系数称为信号的频谱, 在此我们也把 V-系统对三维几何模型的正交展开系数称为模型的频谱, 并且按照展开系数  $c_i$  相对位置的不同, 而称为高频项和低频项, 其中, 特别地称  $c_1$  为直流分量. 在此要特别说明的是, 这里提到的高频和低频的概念与传统信号处理中的意义是不同的. 对于三维几何模型的频谱, 这里出现的高频项对模型的影响是更局部的, 也就是只影响整个模型中的少数三角片. 而低频项的影响范围更大或称之为更全局. 对于三维几何模型频谱更深入的内在特性还有待进一步深入研究.

### 3.3 三维几何模型的重构

三维几何模型重构目的是明确的, 也就是利用模型的频谱还原成其原来的空间形式. 重构的步骤包括两个部分. 首先, 利用模型的频谱求得其在三角域  $G$  上的参数形式, 也就是关于  $(u, v)$  的分片二元一次多项式. 第二步是通过三维几何模型的参数形式求出模型中所有三角面片的顶点坐标:

$$P_{\Delta}(u, v) = \begin{pmatrix} P_{\Delta x}(u, v) \\ P_{\Delta y}(u, v) \\ P_{\Delta z}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4)$$

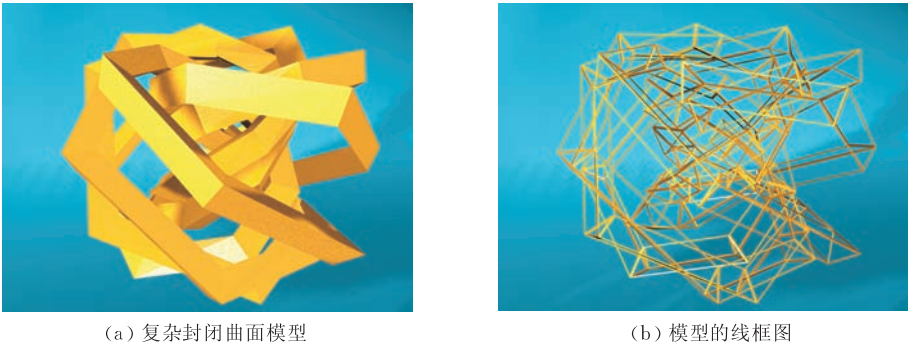
## 4 实验结果与讨论

实验的软硬件环境为 CPU: Intel Core2 6400 2.13GHz; 2GB Ram; Matlab4. 7. 0(2007a).

实验:

**实验 1.** 实验 1 中的三维几何模型(a)是由 300 个三角面片所组成的一个封闭曲面, 它由一个三棱柱通过复杂的弯曲, 然后首尾相接得来. (b)显示了它相应的线框图. 实验说明本文算法可以适应复杂的封闭曲面, 图 7 给出了实验的模型及其频谱计算结果.





(a) 复杂封闭曲面模型 (b) 模型的线框图

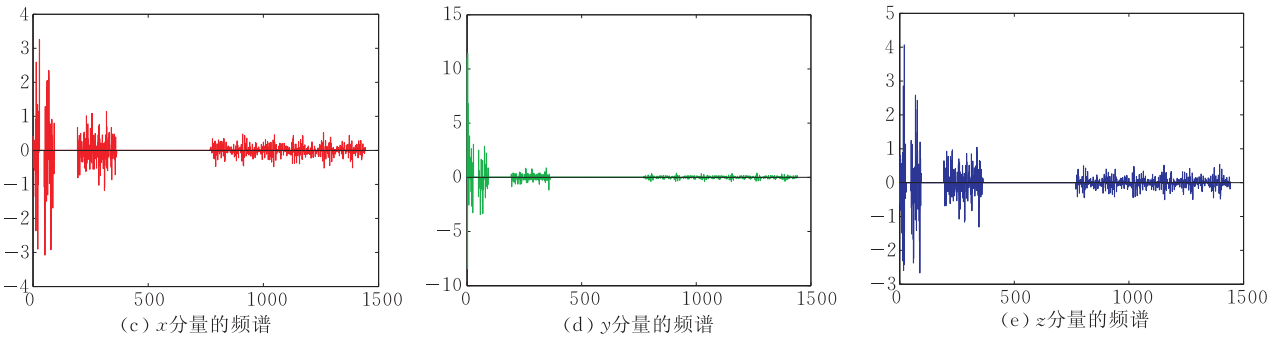
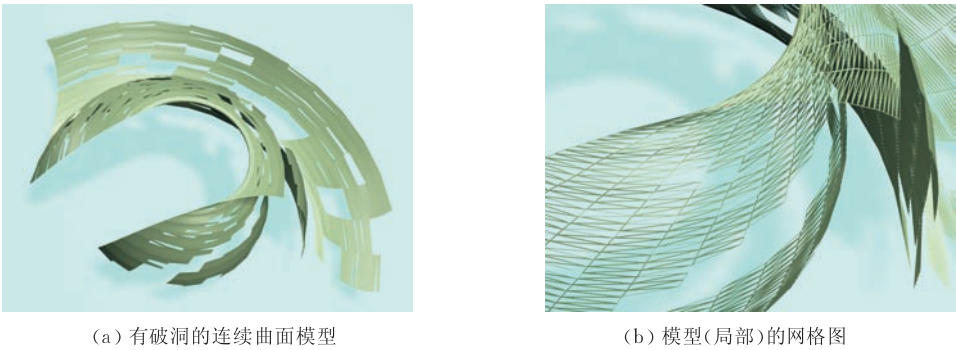


图 7 复杂封闭曲面模型

**实验 2.** 实验 2 是选择一个不封闭的光滑曲面并且在曲面上存在破损的洞,在这种情况下本文

算法也能良好地适应. 这里的模型由 6106 片三角面片构成. 图 8 显示了模型和实验结果.



(a) 有破洞的连续曲面模型 (b) 模型(局部)的网格图

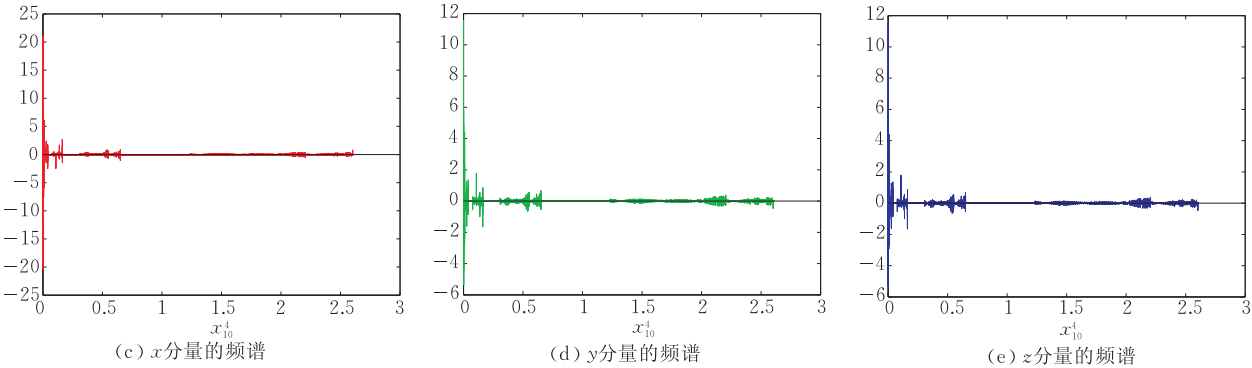


图 8 有破洞的连续曲面模型

**实验 3.** 实验 3 选择了由 4 个相互分离的曲面组成的网格模型,它表明本文提出的算法不但可以对单一的三维几何模型计算它的频谱,还能对由多个互相分离的三维几何模型所组成的场景,进行

整体的表达,从而能够对场景中多个三维几何模型之间的相互关系进行全局的描述,这也正是三角域上 V-系统的一大特点. 换句话说,不论模型中出现连续或间断的情况,都可以用 V-系统进行统一的正

交表达. 并且,对于间断的情形,并不会出现 Gibss 现象. 在这个实验中,我们使用的模型由 1224 个三角面片组成. 图 9 为模型及实验结果.

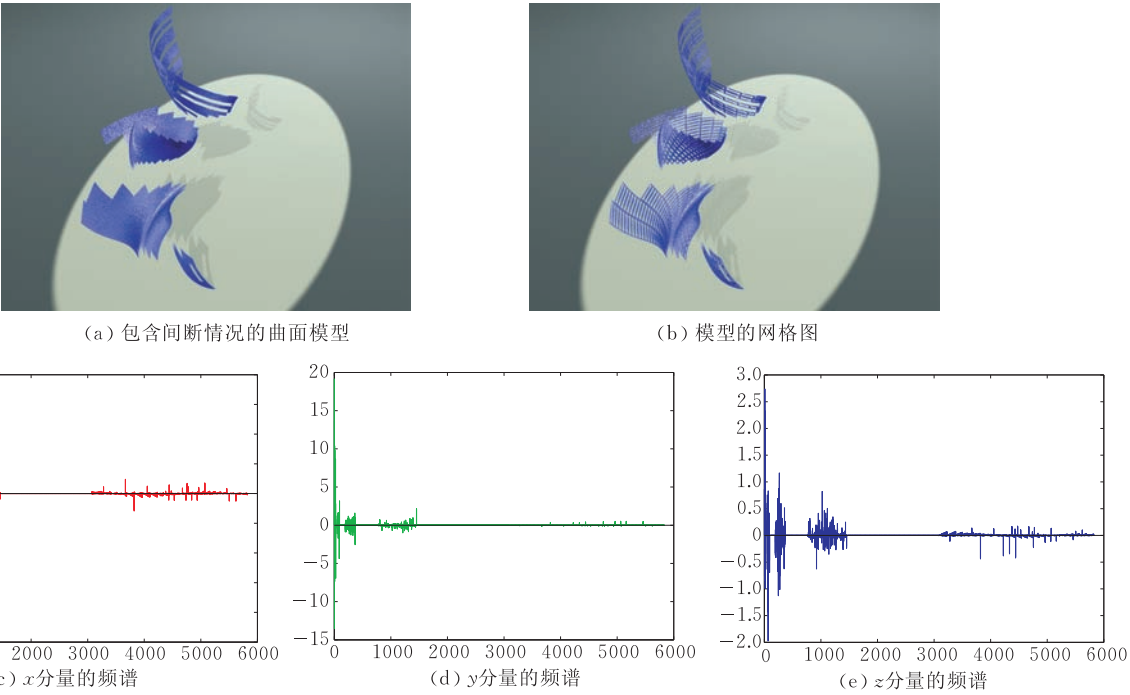


图 9 包含间断情况的曲面模型

**实验 4.** 在最后一个实验中,选择了在三维模型中很有代表性且经常被引用的 Stanford Bunny 模型,试验中使用的模型有 10122 个三角面片. 图 10 给出了模型及实验结果.

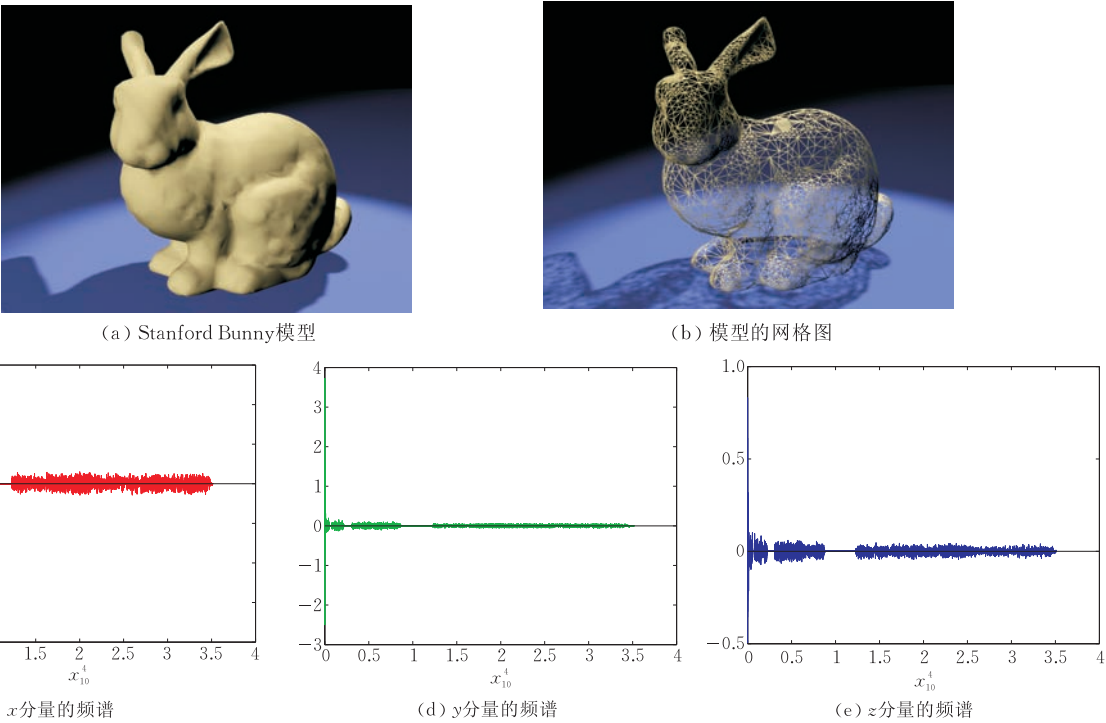


图 10 Stanford Bunny 模型

从上面的实验结果可以看出,三角域上的 V-系统可以对不同拓扑结构的三维几何模型进行正交表达,并且对由多个相互独立的三维几何模型组成的场景也可以进行整体的正交表达.



算法的时间开销见表 1. 如果处理更大规模的三维几何模型, 需要进一步研究快速算法, 此为后续工作努力的方向之一.

表 1 计算频谱及重构的时间开销

实验模型(模型规模)	计算模型频谱时间/s	重构时间/s
实验 1(300 片)	0. 10	0. 11
实验 2(6106 片)	3. 86	4. 81
实验 3(1224 片)	0. 63	0. 72
实验 4(10122 片)	8. 48	8. 94

5 总 结

本文主要研究了如何利用 V-系统对分片多项式表达的三维几何模型进行正交重构的问题. 这种重构算法, 可以适应互相分离的三维几何模型组成的群组, 并且不出现 Gibbs 现象. 有了这样的正交重构, 就可以对包括分离情形在内的三维几何模型实现整体频谱分析, 为三维几何模型的特征提取、分类、检索等问题研究提供一个新的视角.

参 考 文 献

[1] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. 4th Edition. San Diego: Academic Press, 1997

[2] Piegl L A, Tiller W. The NURBS Book. 2nd Edition. New York: Springer, 1997

[3] Prautzsch H, Boehm W, Paluszny M. Bézier and B Spline Techniques. New York: Springer-Verlag, 2002

[4] Zorin D, Schröder P, DeRose T, Kobbelt L, Levin A, Sweldens W. Subdivision for modeling and animation//Proceedings of the SIGGRAPH 2000 Course Notes. Boston, 2000: 30-50

[5] Botsch M, Pauly M, Kobbelt L, Alliez P, Léziervy B, Bischoff S, Rössl C. Geometric modeling based on polygonal meshes//Proceedings of the SIGGRAPH 2007 Course Notes. San Diego, California, USA, 2007

[6] Qi Dong-Xu. Walsh function on the triangular area. Chinese Science Bulletin, 1988, 33(9): 715-716(in Chinese)



**LI Jian**, born in 1975, Ph. D. candidate. His research interests focus on computer graphics.

**SONG Rui-Xia**, born in 1963, professor. Her research interest include computation geometry, differential geometry.

(齐东旭. 三角域上的 Walsh 函数. 科学通报, 1988, 33(9): 715-716)

[7] Qi Dong-Xu. Some research on prthogonal function system over triangular filed. Journal of North China University of Technology, 1990, 2(3):1-7(in Chinese)

(齐东旭. 关于三角域上正交函数的研究. 北方工业大学学报, 1990, 2(3): 1-7)

[8] Song Rui-Xia, Wang Xiao-Chun, Ou Mei-Fang, Li Jian. The structure of V-system over triangulated domains. Lecture Notes in Computer Science 4975, 2008: 563-569

[9] Song Rui-Xia, Ma Hui, Wang Tian-Jun, Qi Dong-Xu. Complete Orthogonal V-system and its Applications. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(3): 853-871

[10] Ma Hui, Song Rui-Xia, Wang Xiao-Chun. V-descriptor and B-spline. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2006, 18(11): 1717-1722 (in Chinese with English abstract)

(马辉, 宋瑞霞, 王小春, 齐东旭. V-描述子与 B 样条曲线. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(11): 1717-1722)

[11] Liang Yan-Yan, Song Rui-Xia, Wang Xiao-Chun, Qi Dong-Xu. Application of a new class of orthogonal function system in geometrical information. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2007, 19(7): 871-875(in Chinese with English abstract)

(梁延研, 宋瑞霞, 王小春, 齐东旭. 完备正交 V-系统及其在几何信息重构中的应用. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(7): 871-875)

[12] Wang Xiao-Chun, Liang Yan-Yan, Ma Hui, Song Rui-Xia. Application of complete orthogonal V-system with multiresolution property//Proceedings of the 10th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Beijing, 2007: 35

[13] Liang Yan-Yan, Song Rui-Xia, Qi Dong-Xu. Complete orthogonal function system V and points cloud fitting. Journal of System Simulation, 2006, 18(8): 2109-2113(in Chinese with English abstract)

(梁延研, 宋瑞霞, 齐东旭. 完备正交 V-系统与点云数据拟合. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2109-2113)

[14] Feng Yu-Yu, Qi Dong-Xu. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1984, 15(4): 834-844

**YE Meng-Jie**, born in 1982, M. S. candidate. His research interests focus on computer graphics.

**LIANG Yan-Yan**, born in 1982, Ph. D. candidate. His research interests include signal processing, computer graphics.

**QI Dong-Xu**, born in 1940, professor, Ph. D. supervisor. His research interest include numerical analysis, computer graphics etc.

## Background

Determining how to find the better way to represent 3D geometric models is one of the fundamental themes in computer graphics. From Bezier curve (surface) spline curve (surface) that rapidly used in CAGD to polygonal mesh and subdivision surface, people have been given many methods for different applications. But all of these representations are not orthogonal representation. The orthogonal representation is the base of frequency domain method which is the powerful tool in signal processing. Lacking for the orthogonal presentation of 3D models, the frequency spectrum analysis is difficult to use to study 3D model.

This paper studies on a kind of complete orthogonal V-system that on triangular domain. We use V-system to construct the orthogonal representation of 3D model (triangular mesh) and calculate the spectrums. The spectrum is

one of features of 3D model. The orthogonal expression of the 3D models make it's possible that to study 3D models by frequency spectrum analysis.

This project is supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos.10631080, 10771002), the National Key Basic Research Project of China grant (No. 2004CB 318006) and the Science and Technology Development Fund of Macao SAR (No. 045/2006/A).

The Authors have developed U-system and V-system (tension product) which are all the completed orthogonal functions and used in image processing, signal denoise etc. The authors have published papers on many journals and conferences such as Journal of System Simulation, Communications on Pure and Applied Analysis and so on.