

双正交小波的提升构造研究

陈智能^{1),2),3)} 高协平¹⁾

¹⁾(湘潭大学信息工程学院 湖南 湘潭 411105)

²⁾(中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室 北京 100190)

³⁾(中国科学院研究生院 北京 100049)

摘 要 文章系统研究了提升格式与小波滤波器支撑长度、线性相位、消失矩等性质的关系;提出了提升格式构造同时满足短支撑、对称性和任意阶消失矩双正交小波的一般算法;给出了最佳提升格式(Best Lifting Scheme, BLS)的定义以及在该算法下诸多已有双正交小波的构造方法.此外,文中首次构造了一系列性质优美的双正交小波——最佳提升格式小波(BLS Wavelet, BLSW)奇数阶系列;列出了 BLSW 的部分性质并将其应用到图像非线性逼近上.实验表明,性质上的优势体现在应用上,部分 BLSW 具有突出的逼近能力.

关键词 提升格式;双正交小波;支撑长度;对称性;消失矩;非线性逼近

中图法分类号 TP302

DOI号: 10.3724/SP.J.1016.2009.00288

Constructing Biorthogonal Wavelets Using Lifting Scheme

CHEN Zhi-Neng^{1),2),3)} GAO Xie-Ping¹⁾

¹⁾(Information Engineering College, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105)

²⁾(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

³⁾(Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract This paper investigates central properties such as support length, linear phase, vanishing moments of wavelet filters within the lifting scheme framework. A general algorithm that constructs biorthogonal wavelet with short support length, symmetry, and arbitrary vanishing moments is proposed. The definition of Best Lifting Scheme (BLS) is given. The construction of several famous biorthogonal wavelet systems, and a new system of biorthogonal wavelets with desirable properties, named odd-ordered BLS Wavelet (BLSW) system, is explicitly presented. Moreover, properties of BLSW system are listed, and experimental results of applying BLSW to image nonlinear approximation have shown that the performance of several BLSWs is promising because of their attractive properties.

Keywords lifting scheme; biorthogonal wavelet; support length; symmetry; vanishing moments; nonlinear approximation

1 引 言

小波变换以其良好的时频局域性和多尺度结

构,成为了非平稳信号表示和分析的有力工具^[1-2].在信号处理中,短支撑能大大减少处理问题的计算量;正交性能保持能量,使各处理变量不相关到最大程度;高消失矩使信号进行小波变换后非零小波系

数个系数更少;对称性(对应着线性相位滤波器)既适合人的视觉系统,又使信号在边界易于处理,这些性质成为了人们选用小波时特别注重的性质.但遗憾的是,紧支撑正交实系数小波除 Haar 外,都缺乏对称性^[1],而 Haar 小波的消失矩和正则指数却很低,这给我们实际应用带来了困难.另一方面,短支撑与高消失矩也是一对矛盾,高消失矩往往对应着较长的支撑,如何找到指定消失矩下支撑较短甚至最短的小波是一个值得研究的问题.

双正交小波可以同时具备紧支撑、高消失矩和对称性,其构造理论得到了人们的广泛重视和研究.双正交小波构造方法可大致分为两类:频谱分解^[3-6]和提升格式^[7-12].传统的双正交小波构造方法基于频谱分解,其中有代表性的是 Cohen 等人^[3]提出的 CDF 方法.通过预先指定小波及其对偶的消失矩,再对相应的三角多项式进行频谱分解,他们构造出双正交样条小波(Biorthogonal Spline Wavelet, BSW)系列以及无理数系数的 CDF9-7, CDF11-9 等小波.然而,该类方法构造过程复杂、不易推广,且在构造高消失矩小波时需要分解高阶三角多项式,这并不是一个平凡的数学过程.

提升格式^[7]是一种完全基于时域的双正交小波构造方法,与频谱分解方法相比,提升格式有固定的小波构造公式,其不仅简单易于理解,具有通用性和灵活性,而且有高效的小波变换实现方式.基于提升格式的小波理论与应用迅速吸引了众多专家的密切关注.具体到双正交小波构造方面,Sweldens^[7]给出了 Deslauriers-Dubuc 小波(D-DW)系列的提升构造过程. Li 等人^[9]研究了提升格式与消失矩的关系,提出从任意小波出发,构造具有任意消失矩小波的方法. Cheng 等人^[10]提出了和 CDF9-7、CDF11-9 小波具有相同支撑长度双正交小波的提升构造算法, Averbuch 和 Zheludev^[11]从插值样条函数出发,利用提升格式构造了部分 D-DW 和一系列 IIR 双正交小波. He^[12]研究了样条类型小波构造,并指出部分高消失矩 BSW 可通过相应的低消失矩 BSW 一步提升构造.

我们注意到,文献^[7]的构造过程难以推广到其它小波;文献^[10]的算法在构造高消失矩小波时面临多元高次方程组的求解难题;文献^[11-12]构造的 FIR 小波都是已知小波.利用文献^[9]的方法虽然可以构造出新小波,但除消失矩外,提升格式与初始小波以及它与生成小波支撑长度、对称性的关系并没有得到深入研究.提升格式在构造性质优美的新小

波方面现今仍只有一些零星的结论.

针对上述问题,我们从尺度和小波函数对应的滤波器出发,对提升格式与小波滤波器各种性质的关系展开系统研究,提出了同时满足短支撑、对称性和任意阶消失矩双正交小波的一般构造算法.具体地,设双正交滤波器组 $\{h, \tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}, \tilde{g}\}$ 由初始滤波器组 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 经本文算法一步提升所得,则下列性质可以同时满足:(1) g^{new} 具有 N' 阶消失矩, $N' > N$, 其中 N 是 g 的消失矩阶数;(2) \tilde{h}^{new} 和 g^{new} 都满足线性相位;(3) $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 是从 $\{\tilde{h}, g\}$ 出发,经过一步 $N' - N$ 阶提升后支撑长度最短的.显然,该算法可以构造许多性质优美的双正交小波.

该算法具有通用性和灵活性,从几类简单小波出发,通过指定不同的消失矩阶数,大量实例可以被构造出来.我们探讨了该算法下生成滤波器消失矩阶数限制、提升方案选择、初始小波选择等问题,给出了最佳提升格式(Best Lifting Scheme, BLS)的定义;进一步给出了在本算法下,BSW 系列和 D-DW 系列的具体构造过程;此外,我们首次构造了一系列满足短支撑、对称性、奇数阶消失矩光滑的二进制分数系数小波——BLS 小波(BLS Wavelet, BLSW)奇数阶系列,弥补了鲜有性质优美奇数阶消失矩、二进制分数系数双正交小波的不足.

我们将部分 BLSW 应用到图像非线性逼近并与部分 D-DW 以及 CDF9-7 小波进行比较.实验结果表明,性质上的优势最终体现在应用上,部分 BLSW 具有突出性能:不仅逼近效果普遍超过 CDF9-7 小波,而且在多数图像上, BLSW 系列都比对应阶 D-DW 取得了更好的视觉效果和更高的 PSNR 值.

2 预备知识

在本文中,我们仅考虑 FIR 滤波器 $g = \{g_k\}_{k=k_b}^{k_e}$, 其对应的 Laurent 多项式为 $g(z) = \sum_{k=k_b}^{k_e} g_k z^k$, 支撑长度为 $|g| = k_e - k_b + 1$, 支撑范围为 $[k_b, k_e]$. 图 1 给出了提升格式的基本结构. Sweldens 证明^[7], 滤波器组 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 可通过提升公式(1)构造一组新滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$; 通过对偶提升公式(2)构造一组新滤波器 $\{h^{\text{new}}, \tilde{g}^{\text{new}}\}$, 其中提升算子 $s(z)$ 、对偶提升算子 $\bar{s}(z)$ 均为 Laurent 多项式

$$\begin{cases} \tilde{h}^{\text{new}}(z) = \tilde{h}(z) - \tilde{g}(z) \cdot s(z^{-2}) \\ g^{\text{new}}(z) = g(z) + h(z) \cdot s(z^2) \end{cases} \quad (1)$$

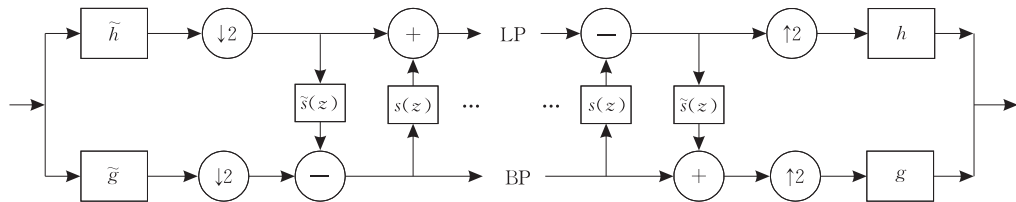


图 1 提升格式的基本结构

$$\begin{cases} h^{\text{new}}(z) = h(z) + g(z) \cdot \bar{s}(z^{-2}) \\ \bar{g}^{\text{new}}(z) = \bar{g}(z) - \bar{h}(z) \cdot \bar{s}(z^{-2}) \end{cases} \quad (2)$$

从式(1)和(2)可知,提升格式在确保双正交关系后,将构造中剩下的自由度全部集中在提升算子和对偶提升算子上,只需确定 $s(z)$ 和 $\bar{s}(z)$, 就可以唯一地构造出提升格式后的双正交滤波器组,因此提升格式构造小波的关键在于寻找合适的 $s(z)$ 和 $\bar{s}(z)$, 使得生成的滤波器满足指定的性质. 由于提升与对偶提升的对等性,本文仅对 $s(z)$ 的设计方法展开研究, $\bar{s}(z)$ 可完全类似得到.

本文的工作不同于文献[8],它研究的是如何将已知 FIR 小波分解为有限步交替对偶提升和提升的级联,研究的是小波分解算法. 而本文研究的是 $s(z)$ 设计与支撑长度、对称性和消失矩等性质的一般关系,旨在通过分析这些关系,给出性质优美双正交小波的构造方法,研究的是小波构造算法.

线性相位是滤波器最重要的性质之一. Nguyen 和 Vaidyanathan^[13] 有如下结论.

引理 1^[13]. 可完全重构,且具有线性相位的实 FIR 滤波器 $\{h, g\}$ 中,有实用价值的结构只可能是下面两种之一:

(1) $\{h, g\}$ 都是奇长度且对称,两个滤波器的支撑长度之差为 2 的奇数倍;

(2) $\{h, g\}$ 都是偶长度, h 对称而 g 反对称,两个滤波器的支撑长度之差为 2 的偶数倍.

这两种结构被分别简称为 SSOO 结构和 SAEE 结构.

对满足线性相位的 $\{h, \bar{h}, g, \bar{g}\}$, 文献[14]给出了一步提升保持生成滤波器线性相位时,提升算子与 $\{h, \bar{h}, g, \bar{g}\}$ 支撑范围的关系.

引理 2^[14]. 令 $\{h, \bar{h}, g, \bar{g}\}$ 为初始双正交滤波器组,其中

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \sum_{k=N_1}^{N_2} h_k e^{-ik\omega}, \quad \bar{h}(\omega) = \sum_{k=\bar{N}_1}^{\bar{N}_2} \bar{h}_k e^{-ik\omega}, \\ g(\omega) &= \sum_{k=M_1}^{M_2} g_k e^{-ik\omega}, \quad \bar{g}(\omega) = \sum_{k=\bar{M}_1}^{\bar{M}_2} \bar{g}_k e^{-ik\omega}. \end{aligned}$$

(1) 若 $\{h, \bar{h}, g, \bar{g}\}$ 均对称,则一步提升生成的新

滤波器保持原有对称关系当且仅当

$$\begin{aligned} s(2\omega) \exp\left\{-\frac{i(N_1+N_2-M_1-M_2)\omega}{2}\right\}, \\ s(2\omega) \exp\left\{-\frac{i(\bar{N}_1+\bar{N}_2-\bar{M}_1-\bar{M}_2)\omega}{2}\right\} \end{aligned}$$

均为偶函数;

(2) 若 $\{h, \bar{h}\}$ 对称, $\{g, \bar{g}\}$ 反对称,则一步提升生成的新滤波器保持原有对称关系当且仅当上述两个表达式均为 ω 的奇函数.

消失矩是衡量尺度和小波函数能量聚集能力和光滑程度的重要标志. 令 N 为滤波器组 $\{h, \bar{h}, g, \bar{g}\}$ 中小波 g 的消失矩,若通过一步提升把小波消失矩从 N 提高到 N' , Li 等人^[9] 的研究表明,上述消失矩提高问题可以转化为如下矩阵方程求解问题.

$$t = A^{-1} \cdot b^l \quad (3)$$

其中 $l \in \mathbb{Z}$, 可逆矩阵 $A = (a_{ki})_{(N'-N) \times (N'-N)}$, $t = (t_k)_0^{N'-N-1}$, $b^l = (b_k^l)_0^{N'-N-1}$, 且

$$a_{ki} = \frac{d^k}{dz^k} [(z+1)^N h(z) (z^2-1)^i]_{z=1},$$

$$b_k^l = -\frac{d^k}{dz^k} [z^{2l} q(z)]_{z=1}, \quad k=0, 1, \dots, N'-N-1.$$

显然,给定参数 l 的值后,方程(3)有唯一解 $\{t_k\}_0^{N'-N-1}$. 文献[9]指出,令 $\{t_k\}_0^{N'-N-1}$ 为多项式 $T(z)$ 在 $z=1$ 处的前 $N'-N$ 项泰勒展开系数,再定义

$$s(z) = z^{-l} (z-1)^N T(z) \quad (4)$$

则生成的 g^{new} 必有 N' 阶消失矩. 注意到上述提升要求 $T(z)$ 最高次幂 $W \geq N'-N-1$. 特别地,当 $W = N'-N-1$ 时,式(4)得到的 $s(z)$ 不仅唯一确定,而且支撑长度最短,称其为最短支撑提升算子,记作 $s^*(z; l)$.

关于提升格式构造任意阶消失矩小波的详细算法请参考文献[9]. 我们注意到,由于 l 取值的任意性, $s^*(z; l)$ 并不能保证生成的 \bar{h}^{new} 和 g^{new} 也是支撑长度最短的. 此外,该算法并没有讨论生成滤波器的线性相位. 仅从该算法出发,我们难以系统讨论同时满足短支撑、对称性和高消失矩等众多优美性质双正交小波的构造.

3 主要结果

在本节中,我们从引理 1 和文献[9]的算法出发,研究了使生成滤波器同时满足短支撑、线性相位和任意阶消失矩 $s(z)$ 的设计方法. 随后,我们讨论了生成滤波器消失矩阶数限制,提升方案选择,初始小波选择并给出了 BLS 的定义. 最后,我们给出了满足短支撑、对称性和任意阶消失矩双正交小波的一般构造算法.

3.1 一般结果

考虑到线性相位的重要性,本节仅讨论初始滤波器 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 满足线性相位的情况. 设 $[N_1, N_2]$, $[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2]$, $[M_1, M_2]$ 和 $[\tilde{M}_1, \tilde{M}_2]$ 分别为上述 4 个滤波器的支撑范围. 从双正交关系可知, $\{h, g\}$ 和 $\{\tilde{h}, \tilde{g}\}$ 必同属于 SSOO 或 SAEE 结构,也即滤波器 $\{h, g\}$ 的线性相位结构就是滤波器组 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 的线性相位结构. 引理 2 可写成如下形式.

推论 1. 在一步提升中,若初始滤波器组 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是 SSOO 结构,则生成滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 和 $\{\tilde{h}, g\}$ 保持相同对称关系当且仅当 $s(z)$ 关于 $(M_1 + M_2 - N_1 - N_2)/4$ 对称;若 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是 SAEE 结构,则 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 和 $\{\tilde{h}, g\}$ 保持相同对称关系当且仅当 $s(z)$ 关于 $(M_1 + M_2 - N_1 - N_2)/4$ 反对称.

证明. 利用提升公式(1)即可直接证得该结论,此处略.

从式(4)可知, $s(z)$ 支撑中心为 $(N+W-2l)/2$, 令

$$(M_1 + M_2 - N_1 - N_2)/4 = (N+W-2l)/2,$$

也即

$$l = \frac{W+N}{2} - \frac{M_1 + M_2 - N_1 - N_2}{4} \quad (5)$$

即可保证 $s(z)$ 以 $(M_1 + M_2 - N_1 - N_2)/4$ 为支撑中心.

推论 2. 在一步提升中,若 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是满足线性相位的初始滤波器组, N 和 N' 分别是 g 和 g^{new} 的消失矩, $s(z)$ 满足式(4), $W = N' - N - 1$, 则当 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 为 SSOO 结构时,最短支撑提升算子 $s^*(z; l)$ 必对称;当 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 为 SAEE 结构时, $s^*(z; l)$ 必反对称.

证明. 见附录 1.

推论 1 和 2 表明在一步提升中,选择合适的 l 并令 $s(z) = s^*(z; l)$, 则生成滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 不仅保持原有对称关系不变,而且 g^{new} 满足 N' 阶消失矩.

推论 3. 在一步提升中,若 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 为初始

滤波器组, N 是 g 的消失矩阶数, $s(z)$ 满足式(4), 其中 l 由式(5)给出, 则生成滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 是从 $\{\tilde{h}, g\}$ 出发支撑长度最短的, 其支撑长度为

$$|\tilde{h}^{\text{new}}| = |g^{\text{new}}| = N_2 - N_1 + 2N + 2W + 1 \quad (6)$$

证明. 由于 $|\tilde{h}^{\text{new}}| = |g^{\text{new}}|$. 设 $g^{\text{new}}(z)$ 的支撑范围为 $[g_b^{\text{new}}, g_e^{\text{new}}]$, 从式(1)可知

$$g_b^{\text{new}} = \min(M_1, N_1 - 2l),$$

$$g_e^{\text{new}} = \max(M_2, N_2 + 2N + 2W - 2l).$$

由于提升格式会增加生成滤波器的支撑长度^①, 当 l 由式(5)给出时, $g(z)$ 和 $h(z) \cdot s^*(z^2; l)$ 有相同的支撑中心, 也即 Laurent 多项式 $h(z) \cdot s^*(z^2; l)$ 的支撑范围“包含” $g(z)$ 的支撑范围. 此时 $g_b^{\text{new}} = N_1 - 2l$, $g_e^{\text{new}} = N_2 + 2N + 2W - 2l$, 且

$$|g^{\text{new}}| = |h(z) \cdot s^*(z^2; l)| = N_2 - N_1 + 2N + 2W + 1.$$

当 l 为其它值时, $h(z) \cdot s^*(z^2; l)$ 的支撑范围随 l “滑动”, 其与 $g(z)$ 的支撑范围可能不再是“包含”而是“相交”甚至“不相交”, 此时必有 $|g^{\text{new}}| > N_2 - N_1 + 2N + 2W + 1$. 证毕.

定理 1(提升). 在一步提升中,若 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是满足线性相位的初始滤波器组, N 是 g 的消失矩阶数, $s(z)$ 满足式(4), 其中 l 由式(5)给出, $W = N' - N - 1$, $T(z)$ 是最高次幂为 W , $z=1$ 处泰勒展开系数 $\{t_k\}_{k=0}^W$ 由式(3)解出的多项式, 则生成滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$ 满足:

(1) g^{new} 有 N' 阶消失矩;

(2) 保持和 $\{\tilde{h}, g\}$ 相同的对称关系;

(3) 是从 $\{\tilde{h}, g\}$ 出发, 经过一步 $N' - N$ 阶提升后支撑长度最短的.

类似地, 令 \tilde{N} 和 \tilde{N}' 分别表示 \tilde{g} 和 \tilde{g}^{new} 的消失矩阶数, 定义

$$\tilde{s}(z) = z^{-\tilde{l}}(z-1)^{\tilde{N}}\tilde{T}(z) \quad (7)$$

其中 $\tilde{l} \in \mathbb{Z}$ 是刻画 $\tilde{s}(z)$ 初始位置的参数, $\tilde{T}(z)$ 为最高次幂为 $\tilde{N}' - \tilde{N} - 1$ 的多项式, $\{\tilde{t}_k\}_{k=0}^{\tilde{N}' - \tilde{N} - 1}$ 是矩阵

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{b}}^{\tilde{l}} \quad (8)$$

的解. 其中 $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ki})_{(\tilde{N}' - \tilde{N}) \times (\tilde{N}' - \tilde{N})}$, $\tilde{\mathbf{t}} = (\tilde{t}_k)_0^{\tilde{N}' - \tilde{N} - 1}$, $\tilde{\mathbf{b}}^{\tilde{l}} = (\tilde{b}_k^{\tilde{l}})_0^{\tilde{N}' - \tilde{N} - 1}$ 且

$$\tilde{q}(z) = \tilde{g}(z)/(z-1)^{\tilde{N}},$$

$$\tilde{a}_{ki} = \frac{d^k}{dz^k} [(z+1)^{\tilde{N}} \tilde{h}(z)(z^2-1)^i]_{z=1},$$

$$\tilde{b}_k^{\tilde{l}} = -\frac{d^k}{dz^k} [z^{2\tilde{l}} \tilde{q}(z)]_{z=1},$$

令

① 在某些极其特殊的情况下, 如 g 的支撑非常长但消失矩很低, 支撑长度可能不会增加, 但这些情况没有实际的意义, 本文不予考虑.

$$\tilde{l} = \frac{\tilde{N}' - 1}{2} - \frac{\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 - \tilde{N}_1 - \tilde{N}_2}{4} \quad (9)$$

定理 2(对偶提升). 在一步对偶提升中,若 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是满足线性相位的初始滤波器组, \tilde{N} 是 \tilde{g} 的消失矩阶数, $\tilde{s}(z)$ 满足式(7), 其中 \tilde{l} 由式(9)给出, $\tilde{T}(z)$ 是最高次幂为 $\tilde{N}' - \tilde{N} - 1, z = 1$ 处泰勒展开系数 $\{\tilde{t}_k\}_{k=0}^{\tilde{N}' - \tilde{N} - 1}$ 由式(8)解出的多项式, 则生成滤波器 $\{h^{\text{new}}, \tilde{g}^{\text{new}}\}$ 满足

- (1) \tilde{g}^{new} 有 \tilde{N}' 阶消失矩;
- (2) 保持和 $\{h, \tilde{g}\}$ 相同的对称关系;
- (3) 是从 $\{h, \tilde{g}\}$ 出发, 经过一步 $\tilde{N}' - \tilde{N}$ 阶对偶提升后支撑长度最短的.

定理 1 和定理 2 分别给出了使生成滤波器同时满足短支撑、线性相位和任意阶消失矩的 $s(z)$ 和 $\tilde{s}(z)$ 设计方法. 在本文剩余部分, 如无特殊申明, 提到的提升和对偶提升分别是基于定理 1 和定理 2 的.

3.2 算法规划

3.2.1 生成滤波器消失矩阶数

推论 4. 在一步提升中, 当 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是 SSOO 结构时, N' 必为偶数; 当 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是 SAEE 结构时, N' 必为奇数.

证明. 当滤波器 $\{h, g\}$ 是 SSOO 结构时, 由引理 1

$$M_1 + M_2 = 2n_1 \text{ 和 } N_1 + N_2 = 2n_2, \text{ 且}$$
$$n_1 - n_2 = 2n - 1, \text{ 其中 } n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

表明

$$\frac{M_1 + M_2 - N_1 - N_2}{4} = \frac{(2n - 1)}{2}.$$

由于 $W = N' - N - 1$, 式(5)可重写为

$$l = \frac{N' - 1}{2} - \frac{M_1 + M_2 - N_1 - N_2}{4} = \frac{N'}{2} - n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

这表明 N' 必为偶数; 当滤波器 $\{h, g\}$ 是 SAEE 结构时, 重复上述分析过程则可推出 N' 必为奇数. 证毕.

可以证明, 上述结论在一步对偶提升中同样成立. 这表明对不同消失矩提升目标, 我们需考虑不同结构的初始小波. 例如 $N' = 4$ 时, 则只能考虑从 Lazy 小波或 CDF5-3 小波这些 SSOO 结构的初始小波出发; 而 $N' = 5$ 时, 则只能从 SAEE 结构的初始小波出发, 如 Haar 小波.

3.2.2 提升方案选择

对给定的初始滤波器组 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}, N$ 和 \tilde{N} 分别是 g 和 \tilde{g} 的消失矩阶数, 目标是生成滤波器组 $\{h^{\text{new}}, \tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}, \tilde{g}^{\text{new}}\}$, 其中 g^{new} 和 \tilde{g}^{new} 的消失矩阶数分别是 N' 和 \tilde{N}' . 当 $N' - N$ 和 $\tilde{N}' - \tilde{N}$ 比较大, 例 $N' - N = \tilde{N}' - \tilde{N} = 4$ 时, 我们可以经过一轮提升(一步

提升和一步对偶提升的组合)达到目标, 也可以经过两轮或多轮提升过程达到目标. 换句话说, 存在着不同的提升方案, 如 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 和 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{M}M \text{ dl } \tilde{N}'N'$ (其中 $\tilde{M} \in (\tilde{N}, \tilde{N}'), M \in (N, N')$ 且 $\tilde{M}, M \in \mathbb{Z}$. dl 表示先对偶提升再提升, ld 相反). 这就产生一个问题, 不同提升方案生成的滤波器组相同吗?

定理 3. 令 N 和 \tilde{N} 分别为 g 和 \tilde{g} 的消失矩, 目标是使 g^{new} 和 \tilde{g}^{new} 分别具有 N' 和 \tilde{N}' 阶消失矩, 不同提升方案生成的滤波器组不同. 令 $d_f = |g| - |\tilde{g}|$, $d_v = N' - \tilde{N}'$, 则当 $d_f < d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 得到的滤波器组支撑长度最短^①; 当 $d_f > d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 得到的滤波器组支撑长度最短; 当 $d_f = d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 和 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 得到的滤波器组支撑长度相同, 二者都是最短的.

证明. 见附录 2.

除了消失矩和支撑长度, 生成滤波器的正则性也有十分重要的意义. 表 1(hd 和 hr 分别表示分解和重构端低通滤波器, 下同)给出了令 Haar 小波为初始小波, $N' = \tilde{N}' = 7$ 时各种提升方案生成滤波器的支撑范围和正则指数^②. 可以看到, 各种提升方案生成滤波器的正则指数并没有明显区别.

表 1 不同提升方案生成滤波器组的支撑范围和正则指数

提升方案	支撑范围		正则指数	
	hd	hr	hd	hr
11dl77	(-12, 13)	(-6, 7)	2. 9122	2. 7931
11dl33dl77	(-16, 17)	(-10, 11)	2. 8669	2. 9406
11dl33ld77	(-8, 9)	(-14, 15)	2. 7827	3. 0419
11dl53dl77	(-18, 19)	(-12, 13)	2. 7977	2. 8259
11dl55dl77	(-16, 17)	(-10, 11)	2. 8450	2. 7721
11dl55ld77	(-14, 15)	(-20, 21)	2. 8381	2. 7785
11dl33dl55dl77	(-24, 25)	(-18, 19)	2. 8450	2. 9534
11dl33dl55ld77	(-14, 15)	(-20, 21)	2. 8344	2. 9644
11dl33ld55dl77	(-18, 19)	(-12, 13)	2. 8100	2. 9956
11dl33ld55ld77	(-16, 17)	(-22, 23)	2. 7994	2. 9999

3.2.3 初始小波选择

前面指出, 对不同消失矩提升目标, 我们需考虑不同的初始小波. 定理 3 说明对给定的初始小波和消失矩提升目标, 存在不同的提升方案且这些方案生成滤波器组的支撑长度不同. 注意到支撑最短的提升方案仅包含一步提升和一步对偶提升, 而且对确定的消失矩提升目标, 支撑最短的提升方案生成的滤波器组长度仅与 $|g|$ 或 $|\tilde{g}|$ 相关. 因此, 为生成

① 此处支撑长度最短指分解和重构端滤波器支撑长度之和最小.

② 正则指数用 Jiang 在其个人主页 ([http://www. cs. umsl. edu/~jiang/Jsoftware. htm](http://www.cs. umsl. edu/~jiang/Jsoftware. htm))提供的 Sobolev 正则指数计算程序计算.

支撑长度短的滤波器组,我们需选择支撑长度短的初始小波.

3.2.4 最佳提升格式

由于 Lazy 和 Haar 小波分别是 SSOO 和 SAEF 结构中支撑长度最短的小波,可知 $00\text{dl}\tilde{N}N$ (\tilde{N} 和 N 为偶数)和 $11\text{dl}\tilde{N}N$ (\tilde{N} 和 N 为奇数)也是对偶小波及小波的消失矩分别为 \tilde{N} 和 N 的各种提升方案中支撑最短的. 考虑到不同提升方案正则性区别不大,我们将支撑最短的初始小波和支撑最短的提升方案结合起来,称为最佳提升格式(Best Lifting Scheme, BLS),并将生成的小波滤波器组定义为 (\tilde{N}, N) 阶最佳提升格式小波,记为 $\text{BLSW}(\tilde{N}, N)$.

定义 1. 当 \tilde{N} 和 N 为奇数时,称由 Haar 小波先 $\tilde{N}-1$ 阶对偶提升再 $N-1$ 阶提升得到的 $11\text{dl}\tilde{N}N$ 为 $\text{BLSW}(\tilde{N}, N)$;相应地,当 \tilde{N} 和 N 为偶数时,称 Lazy 小波先 \tilde{N} 阶对偶提升再 N 阶提升得到的 $00\text{dl}\tilde{N}N$ 为 $\text{BLSW}(\tilde{N}, N)$.

3.3 一般算法

根据前面的分析,我们给出提升格式构造满足短支撑、对称性、任意阶消失矩双正交小波的一般算法如下.

算法 1(提升).

- 1. 给定消失矩提高目标 N' ,选择合适的初始小波;
- 2. 通过式(5)求参数 l ,其中 $W=N'-N-1$;
- 3. 根据 l 求解矩阵方程(3),得唯一解 $\{t_k\}_{k=0}^{N'-N-1}$;
- 4. 通过式(4)求提升算子 $s(z)$;
- 5. 通过提升式(1)构造新滤波器 $\{\tilde{h}^{\text{new}}, g^{\text{new}}\}$.

算法 2(对偶提升).

- 1. 给定消失矩提高目标 \tilde{N}' ,选择合适的初始小波;
- 2. 通过式(9)求参数 \tilde{l} ;
- 3. 根据 \tilde{l} 求解矩阵方程(8),得唯一解 $\{\tilde{t}_k\}_{k=0}^{\tilde{N}'-\tilde{N}-1}$;
- 4. 通过式(7)求对偶提升算子 $\tilde{s}(z)$;
- 5. 通过对偶提升式(2)构造新滤波器 $\{h^{\text{new}}, \tilde{g}^{\text{new}}\}$.

4 构造实例

从上述结论出发,我们可以构造大量的实例. 在本节中,我们首先给出了 BSW 系列和 D-DW 系列的具体构造过程,然后首次构造出一系列性质优美的双正交小波——BLSW 奇数阶系列.

4.1 构造双正交样条小波(BSW)系列

文献[1](第 264 页)给出了双正交样条小波(BSW)系列的滤波器系数,这一系列小波由于同时满足短支撑、对称性和二进制分数滤波器系数,一直以来都受到人们的关注.

令 $\text{BSW}(1, 1)$ (第一个 1 表示 $\tilde{N}=1$,第二个 1 表示 $N=1$)为初始小波,目标是生成 $\text{BSW}(1, N)$ (N 为奇数). 通过算法 1,我们无需考虑复杂的频谱分解,只需一步提升,即可直接构造出 $\text{BSW}(1, N)$ 小波. 同理,任意的 $\text{BSW}(\tilde{N}, N)$ (\tilde{N} 和 N 有相同的奇偶性)都可以由 $\text{BSW}(\tilde{N}, 1)$ (\tilde{N} 为奇数)或 $\text{BSW}(\tilde{N}, 2)$ (\tilde{N} 为偶数)经算法 1 一步提升构造. 考虑到 BSW 系列的滤波器系数已在文献[1]中列出,表 2 只给出 $\tilde{N}=1, 2, 3$ 时这些小波的提升算子 $s(z)$.

表 2 BSW 系列的初始小波和提升算子

初始小波 ^①	\tilde{N}	N	$s(z)$
BSW(1,1)	1	3	$2^{-3}(z^{-1}-z)$
hd: $1+z$		5	$2^{-7}(-3z^{-2}+22z^{-1}-22z+3z^2)$
hr: $1+z$		7	$2^{-10}(5z^{-3}-44z^{-2}+201z^{-1}-201z+44z^2-5z^3)$
BSW(2,2)	2	4	$2^{-5}(3z^{-2}-3z^{-1}-3+3z)$
hd: $2^{-2}(-z^{-2}+2z^{-1}+6+2z-z^2)$		6	$2^{-8}(-5z^{-3}+39z^{-2}-34z^{-1}-34+39z-5z^2)$
hr: $2^{-1}(z^{-1}+2+z)$		8	$2^{-13}(35z^{-4}-335z^{-3}+1563z^{-2}-1263z^{-1}-1263+1563z-335z^2+35z^3)$
BSW(3,1)	3	3	$2^{-3}(3z^{-1}-3z)$
hd: $2^{-1}(-z^{-1}+3+3z-z^2)$		5	$2^{-6}(-5z^{-2}+34z^{-1}-34z+5z^2)$
hr: $2^{-2}(z^{-1}+3+3z+z^2)$		7	$2^{-11}(35z^{-3}-300z^{-2}+1263z^{-1}-1263z+300z^2-35z^3)$
		9	$2^{-14}(-63z^{-4}+658z^{-3}-3282z^{-2}+10986z^{-1}-10986z+3282z^2-658z^3+63z^4)$

根据频谱分解的知识,当 $\text{BSW}(\tilde{N}, N)$ 中 \tilde{N} 和 N 较大时,用文献[3]的方法分解出相应的滤波器系数并不容易. 在本文中,不论 N 是多少,只需通过算法 1 做一步 $N-2$ 或 $N-1$ 阶消失矩的提升,即可直接构造出 $\text{BSW}(\tilde{N}, N)$.

4.2 构造 Deslauriers-Dubuc 小波(D-DW)系列

D-DW 系列源于 D-D 滤波器系列. 这一系列滤

波器是 Deslauriers 和 Dubuc^[15] 在构造光滑曲线时通过插值细分首次构造,随后 Ansari 等人^[16] 利用 Lagrange 插值也构造出该系列滤波器. 在文献[7]中,Sweldens 根据 D-DW 系列滤波器的对称性和插值性,从 Donoho 小波出发,用提升格式构造出

① 初始小波的滤波器系数以分解和重构端低通滤波器 Laurent 多项式 $\sqrt{2}$ 倍的形式给出.

D-D 滤波器系列的对偶滤波器,进而指出这一双正交小波系列同时满足最短支撑和对称性.在文献[17]中,Wei 等人通过分析 Coiflets 小波的特点,在不依赖于 Fourier 变换的情况下将 Coiflets 系列正交性条件推广到双正交情况,并依此构造了一系列二进制分数系数双正交小波——GBCW (General Biorthogonal Coifman Wavelet) 系列.这一系列小波中,偶数阶消失矩部分即 D-DW 系列但奇数阶消失矩部分并不满足对称性.后来在文献[11]中,Averbuch 和 Zheludev 从插值样条函数出发,也通

过提升格式构造出部分 D-DW.

用本文算法同样也可构造 D-DW 系列.固定初始小波为 Lazy 小波,然后先通过算法 2 一步对偶提升,再通过算法 1 一步提升,分别将对偶小波及小波的消失矩提高到 \tilde{N} 和 N (\tilde{N} 和 N 都为偶数),即可得 D-DW(\tilde{N}, N).考虑到 D-DW 系列的滤波器系数已在文献[7]中列出,且 $\tilde{N}=2$ 时,D-DW 即表 2 中 BSW(2, N) 系列,表 3 只给出 \tilde{N} 为 4 和 6 时这一系列小波的 $\tilde{s}(z)$ 和 $s(z)$.

表 3 D-DW 系列的对偶提升算子和提升算子

\tilde{N}	$\tilde{s}(z)$	N	$s(z)$
4	$2^{-4}(z^{-2}-9z^{-1}-9+z)$	2	$2^{-2}(-z^{-1}-1)$
		4	$2^{-5}(z^{-2}-9z^{-1}-9+z)$
		6	$2^{-10}(-9z^{-3}+59z^{-2}-306z^{-1}-306+59z-9z^2)$
6	$2^{-8}(-3z^{-3}+25z^{-2}-150z^{-1}-150+25z-3z^2)$	2	$2^{-2}(-z^{-1}-1)$
		4	$2^{-5}(z^{-2}-9z^{-1}-9+z)$
		6	$2^{-9}(-3z^{-3}+25z^{-2}-150z^{-1}-150+25z-3z^2)$

值得注意的是,虽然文献[7, 11, 17]都构造出 D-DW 系列,但他们的构造方法与本文并不相同,具体表现在:文献[7]中给出的构造定理将 $\tilde{N} \leq N$ 和 $\tilde{N} > N$ 两种情况区别对待,分别给出相应的 $s(z)$ 设计方法;文献[17]从 Coiflets 系列小波出发,通过复杂推导给出的是 GBCW 滤波器奇数冲击响应和偶数冲击响应系数表达式;文献[11]则是从插值样条函数出发给出的 $s(z)$ 设计方法.而本算法固定从 Lazy 小波出发,对给定的消失矩目标,不需任何其它信息,一步对偶提升再一步提升即可构造出相应

阶 D-DW.

4.3 构造最佳提升格式小波(BLSW)奇数阶系列

从定义 1 可知,BLSW 偶数阶系列即 D-DW 系列,BLSW 奇数阶系列则是首次构造出来.为区别起见,在本文中我们继续用 D-DW 表示 BLSW 偶数阶系列,而将 BLSW 奇数阶系列简称为 BLSW 系列.表 4 和表 5 分别给出了 \tilde{N} 从 3~7 时,这一系列小波的滤波器系数($\tilde{N}=1$ 时即 BSW 的对应阶,它和偶数阶的不再给出)和正则指数.

表 4 BLSW 系列的低通滤波器系数

\tilde{N}	$\sqrt{2}h_N(z)$	N	$\sqrt{2}\tilde{h}_{N,\tilde{N}}(z)$
3	$2^{-3}(-z^{-2}+z^{-1}+8+8z+z^2-z^3)$	3	$2^{-6}(z^{-4}+z^{-3}-8z^{-2}+8z^{-1}+62+62z+8z^2-8z^3+z^4+z^5)$
		5	$2^{-9}(-z^{-6}-z^{-5}+18z^{-4}+2z^{-3}-79z^{-2}+81z^{-1}+492+492z+\cdots)$
		7	$2^{-14}(9z^{-8}+9z^{-7}-140z^{-6}+4z^{-5}+900z^{-4}-188z^{-3}-2852z^{-2}+2988z^{-1}+7827+7827z+\cdots)$
5	$2^{-7}(3z^{-4}-3z^{-3}-22z^{-2}+22z^{-1}+128+128z+\cdots)$	3	$2^{-10}(-3z^{-6}-3z^{-5}+22z^{-4}+22z^{-3}-125z^{-2}+131z^{-1}+980+980z+\cdots)$
		5	$2^{-13}(3z^{-8}+3z^{-7}-52z^{-6}-52z^{-5}+348z^{-4}+92z^{-3}-1228z^{-2}+1332z^{-1}+7746+7746z+\cdots)$
		7	$2^{-17}(-9z^{-10}-9z^{-9}+150z^{-8}+150z^{-7}-1525z^{-6}-757z^{-5}+7368z^{-4}+200z^{-3}-21250z^{-2}+23550z^{-1}+123204+123204z+\cdots)$
7	$2^{-10}(-5z^{-6}+5z^{-5}+44z^{-4}-44z^{-3}-201z^{-2}+201z^{-1}+1024+1024z+\cdots)$	3	$2^{-13}(5z^{-8}+5z^{-7}-44z^{-6}-44z^{-5}+196z^{-4}+196z^{-3}-980z^{-2}+1068z^{-1}+7790+7790z+\cdots)$
		5	$2^{-16}(-5z^{-10}-5z^{-9}+94z^{-8}+94z^{-7}-641z^{-6}-641z^{-5}+2984z^{-4}+936z^{-3}-9594z^{-2}+10886z^{-1}+61428+61428z+\cdots)$
		7	$2^{-20}(15z^{-12}+15z^{-11}-272z^{-10}-272z^{-9}+2710z^{-8}+2710z^{-7}-16400z^{-6}-10256z^{-5}+62369z^{-4}+5025z^{-3}-165600z^{-2}+192800z^{-1}+975732+975732z+\cdots)$

注:对支撑较长的滤波器,表中仅列出一半的系数,剩余的系数可由对称性推得.

表 5 D-DW 和 BLSW 系列的正则指数

小波	正则指数(Sobolev)		小波	正则指数(Sobolev)	
	hd	hr		hd	hr
D-DW(2,2)	0.4408		BLSW(3,3)	1.5932	
D-DW(2,4)	1.1751	1.5000	BLSW(3,5)	2.1794	1.4408
D-DW(2,6)	1.7931		BLSW(3,7)	2.7827	
D-DW(4,2)	0.5932		BLSW(5,3)	1.6493	
D-DW(4,4)	1.1794	2.4408	BLSW(5,5)	2.3239	2.1751
D-DW(4,6)	1.7827		BLSW(5,7)	2.7721	
D-DW(6,2)	0.6493		BLSW(7,3)	1.6772	
D-DW(6,4)	1.3239	3.1751	BLSW(7,5)	2.4054	2.7931
D-DW(6,6)	1.7721		BLSW(7,7)	2.9122	

从表 5 可以看到,BLSW 系列普遍有较好的正则指数. 当 $\tilde{N}=N$ 时,BLSW 系列分解和重构端滤波器正则指数差别很小,而 D-DW 系列差别较大. 图 2 给出了 BLSW(3,3) 的尺度和小波函数. 和 CDF9-7 小波类似,BLSW(3,3) 中 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 以及 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 波形非常接近,这表明 BLSW(3,3) 有近似正交的性质. 与此对应,无论是 D-DW 系列中哪种小波,其分解和重构端的函数图像都有明显区别(见文献[1]

和文献[7]). 注意到 BSW 系列中同样有 BSW(3,3), 且其分解和重构端低通滤波器的支撑长度分别为 8 和 4,比 BLSW(3,3) 的短. 但 BSW(3,3) 重构端低通滤波器的正则指数仅为 0.1751,这一点在其函数图像中也体现出来(见文献[1]第 262 页). 虽然文献[17]也给出了 $\tilde{N}=N=3$ 的 GBCW(3,3),但其滤波器并不对称,限制了它的应用.

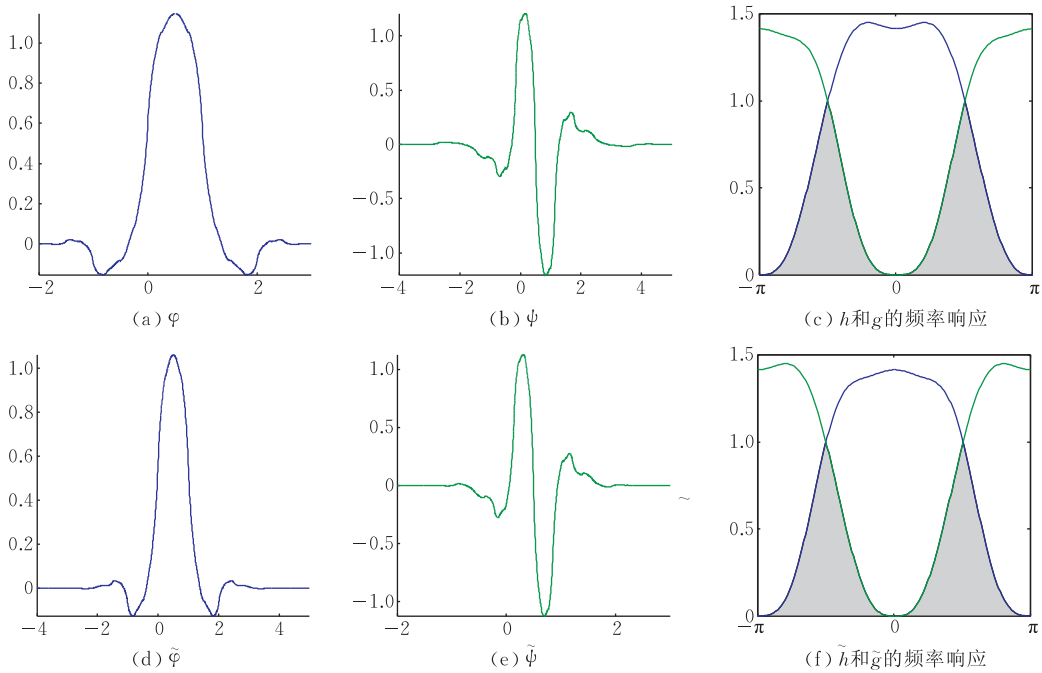


图 2 BLSW(3,3) 的尺度和小波函数

显然,BLSW 系列是一系列同时满足短支撑、对称性、光滑的二进制分数系数双正交小波. 必须指出的是,在之前的各种文献中,鲜有性质优美的二进制分数系数奇数阶消失矩双正交小波被构造出来.

5 实验

Mallat 指出^[2],小波在信号及图像处理等很多应用中具有优势,主要是因为经小波变换后得到的

少量非零系数有较好的逼近能力. 考虑到消失矩和支撑长度的折衷,在本节中我们选用了 4 种 BLSW (BLSW(3,3), BLSW(3,5), BLSW(3,7), BLSW(5,3)) 和 4 种 D-DW (D-DW(4,2), D-DW(4,4), D-DW(4,6), D-DW(6,2)) 进行图像非线性逼近实验,并与 CDF9-7 小波比较,注意到 BLSW 系列中消失矩为 (n,m) 的小波与 D-DW 系列中消失矩为 $(n+1,m-1)$ 的小波两端支撑长度之和,以及消失矩之和都相同,我们称上述小波一一对应. 图 3 给出了



(a) Pepper (b) Lena (c) Mandrill (d) Barbara

图 3 原始测试图像

实验中用到的 4 幅 $512 \times 512 \times 8\text{bit}$ 标准测试图像. 4096 个尺度和小波系数来重构原图像. 表 6 给出了不同测试图像下这 9 种小波取得的 PSNR 值.

我们用上述小波分别对每幅图像进行 3 级小波分解,为突出视觉效果上的差异,仅用幅值最大的

表 6 图像非线性逼近中不同测试图像下各种小波的 PSNR 值

图像	PSNR								
	CDF9-7	D(4,2)	D(4,4)	D(4,6)	D(6,2)	B(3,3)	B(3,5)	B(3,7)	B(5,3)
Pepper	26.0746	26.3160	26.3785	26.4109	26.2762	26.0652	26.1799	26.2125	26.0378
Lena	25.5837	25.5853	25.6917	25.7442	25.5865	25.5936	25.7245	25.7683	25.7073
Mandrill	20.7112	20.6569	20.6963	20.7151	20.6506	20.7114	20.7350	20.7419	20.7400
Barbara	22.4463	22.4326	22.5028	22.5414	22.4378	22.5109	22.5817	22.6125	22.5102

注:表中 D-DW 和 BLSW 分别简写为 D 和 B.

从表 6 中可以看到,仅 D-DW(4,2)和 BLSW(3,3)就取得了与 CDF9-7 小波相当的 PSNR 值,而且随着小波消失矩阶数的增加,D-DW 和 BLSW 系列的逼近效果不断提高,D-DW(4,6)和 BLSW(3,7)分别在这两类小波中取得了最高的 PSNR 值. 在 Pepper 这种特别光滑的图像上,D-DW 系列取得的逼近效果最为突出,而在较为光滑的 Lena 图像上,BLSW 系列的 PSNR 值已经略微超过了对应阶的 D-DW. 随着图像纹理的进一步增加,在 Mandrill 和 Barbara 图像上,BLSW 系列取得的优势更加明显.

造成这种区别的一个很重要的原因是 D-DW 系列分解端低通滤波器的正则指数低于对应阶 BLSW,导致图像纹理增加时,逼近能力不如后者. 图 4 给出了用 CDF9-7、D-DW(4,6)和 BLSW(3,7) 3 种小波重构得到的 Barbara 图像. 可以看到,在桌布(左中白框)以及嘴巴等位置,用 D-DW(4,6)和 BLSW(3,7) 重构出来的图像比 CDF9-7 小波的保持了更多的纹理细节,此外,与 D-DW(4,6)相比,用 BLSW(3,7)得到的图像在书柜右边墙壁的缝隙(上中白框)、右边眼睛等位置,保持了更清晰的边缘.



(a) 用 CDF9-7 小波重构的图像 (b) 用 D-DW(4,6) 重构的图像 (c) 用 BLSW(3,7) 重构的图像

图 4 3 级小波分解后用幅值最大的 4096 个系数重构出来的 Barbara 图像

总体上说,4 种 BLSW 在上述实验中取得了超过对应阶 D-DW 和经典 CDF9-7 小波的效果. 注意到 BLSW 系列的滤波器系数是二进制分数,这表明定义在 BLSW 上的小波变换与 CDF9-7 等无理数系数小波相比有着低得多的计算代价. 考虑到真实世

界中图像一般都存在一定程度的纹理,我们构造的 BLSW 具有重要的意义:不仅有突出的逼近能力,而且计算代价低,比已有小波更好地兼顾了应用效果和计算代价.

6 结束语

本文系统研究了提升格式与小波滤波器的支撑长度、对称性和消失矩等性质的关系. 给出了同时满足短支撑、线性相位和任意阶消失矩的提升/对偶提升算子设计方法. 在明确了提升算子设计中的生成滤波器消失矩阶数限制、提升方案选择、初始小波选择后, 给出了最佳提升格式的定义, 得到了性质优美双正交小波的一般构造算法. 该算法为提升格式下的小波构造提供了一个崭新的视角: 只需给定初始小波和目标消失矩, 本文算法即可构造出满足消失矩要求的短支撑、对称/反对称、光滑的双正交小波.

本文算法具有通用性和灵活性, 我们给出了用该算法构造 BSW 系列、D-DW 系列和 BLSW 系列的具体过程, 其中 BLSW 系列奇数阶部分是首次被构造出来. 本文列出了 BLSW 系列的正则指数, 将部分 BLSW 应用到图像非线性逼近并与部分 D-DW 和 CDF9-7 小波进行比较. 实验表明, BLSW 系列不仅有突出的逼近能力, 而且计算代价远低于 CDF9-7 小波. 我们相信, BLSW 系列在很多信号和图像处理领域将有广阔的应用前景, 将这一系列小波应用到其它问题是我们进一步研究的内容之一.

注意到 CDF9-7 和 CDF11-9 小波并不能通过本文算法构造出来. 这是由于这些小波必须通过两组或多组提升才能构造^[8], 而且第一组提升后生成的滤波器并不具有尺度和小波滤波器应有的低通和高通性质. 因此不能看成从某种初始小波出发, 通过一步提升和一步对偶提升来构造. 这些小波的提升构造理论也是我们下一步研究的内容.

参 考 文 献

[1] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets Philadelphia, PA: SIAM, 1992

[2] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic, 1998

[3] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992, 45(55): 485-560

[4] Vetterli M, Herley C. Wavelet and filter banks: Theory and

design. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2207-2232

[5] Phoong S M, Kim C W, Vaidyanathan P P, Ansari R. A new class of two-channel biorthogonal filter banks and wavelet bases. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(3): 649-665

[6] Liu Jiu-Fen, Li Feng, Huang Da-Ren. Construction of biorthonormal multiresolution analysis with length 4. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(11): 1184-1188 (in Chinese)

(刘九芬, 李峰, 黄达人. 滤波长度为 4 的双正交多尺度分析的构造. 计算机学报, 2002, 25(11): 1184-1188)

[7] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1996, 3(2): 186-200

[8] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps. Journal of Fourier Analysis and Applications, 1998, 4(3): 247-269

[9] Li H, Wang Q, Wu L. A novel design of lifting scheme from general wavelet. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8): 1714-1717

[10] Cheng L, Liang D L, Zhang Z H. Popular biorthogonal wavelet filters via a lifting scheme and its application in image compression. IEE Proceedings Vision, Image and Signal Processing, 2003, 150(4): 227-232

[11] Averbuch A Z, Zheludev V A. A new family of spline-based biorthogonal wavelet transforms and their application to image compression. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(7): 993-1007

[12] He T X. Biorthogonal spline type wavelets. Computers & Mathematics with Applications, 2004, 48(9): 1319-1334

[13] Nguyen T Q, Vaidyanathan P P. Two-channel perfect-reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(5): 676-690

[14] Zhou Xian-Bo. The lifting scheme and biorthogonal wavelet Riesz bases. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 1998, 37(4): 38-42 (in Chinese)

(周先波. 提升格式和双正交小波 Riesz 基. 中山大学学报 (自然科学版), 1998, 37(4): 38-42)

[15] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation process. Constructive Approximation, 1989, 5(1): 49-68

[16] Ansari R, Guillemot C, Kaiser J F. Wavelet construction using lagrange halfband filters. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1991, 38(9): 1116-1118

[17] Wei D, Tian J, Wells R O Jr, Burrus C S. A new class of biorthogonal wavelet systems for image transform coding. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(7): 1000-1013

附录 1.

推论 2 的证明. 设 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$ 是 SSOO 结构, 令 $g^{\text{new}}(z) = (z-1)^{N'}Q(z)$, 其中 $Q(1) \neq 0, T(z) = \sum_{i=0}^{N'-N-1} \gamma_i z^i$. 根据消失矩提高要求

$$F(z) \triangleq z^{2l}q(z) + h(z)(z+1)^N T(z^2) = (z-1)^{N'-N}Q(z) \tag{附 1}$$

上式可写成

$$F(z^{-1}) = z^{-2l}q(z^{-1}) + h(z^{-1})(z^{-1}+1)^N T(z^{-2}) = (z^{-1}-1)^{N'-N}Q(z^{-1}) \tag{附 2}$$

由于

$$q(z) = z^{M_1+M_2-N} q(z^{-1}), \quad h(z) = z^{N_1+N_2} h(z^{-1}),$$

上式等价于

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &= z^{2N'-N+N_1+N_2-2} (z^{2l} q(z) + \\ &\quad h(z)(z+1)^N z^{2(N'-N-1)} T(z^{-2})) \\ &= (z^{-1}-1)^{N'-N} Q(z^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{附 } 3)$$

从式(附 1)和(附 3)可知

$$\begin{aligned} &\frac{d^k}{dz^k} \left[(z+1)^N h(z) \sum_{i=0}^{N'-N-1} \gamma_i z^{2i} \right]_{z=1} \\ &= \frac{d^k}{dz^k} \left[(z+1)^N h(z) \sum_{i=0}^{N'-N-1} \gamma_i z^{2(N'-N-1-i)} \right]_{z=1} \\ &= -\frac{d^k}{dz^k} [z^{2l} q(z)]_{z=1}, \end{aligned}$$

其中 $k=0, 1, \dots, N'-N-1$. 根据 Laurent 多项式的知识, 可推出

$$T(z) = z^{N'-N-1} T(z^{-1}).$$

这表明 $T(z)$ 关于 $(N'-N-1)/2$ 对称, 从而 $s^*(z; l)$ 必对称. 同理可证得对 SAEE 结构的 $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}, s^*(z; l)$ 必反对称.

证毕.

附录 2.

定理 3 的证明. 仅需对 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N', \tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N', \tilde{N}N \text{ dl } \tilde{M}M \text{ dl } \tilde{N}'N', \tilde{N}N \text{ dl } \tilde{M}M \text{ ld } \tilde{N}'N', \tilde{N}N \text{ ld } \tilde{M}M \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 和 $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{M}M \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 这 6 种情况进行分析即可, 任何多组

提升构造的小波滤波器都可以看成上面 6 种情况分解而成.

对 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$, 从正文中的式(8)可知

$$|\bar{g}^{\text{new}}| = |g| + 2\tilde{N}' - 2, \quad |g^{\text{new}}| = |g| + 2N' + 2\tilde{N}' - 4 \quad (\text{附 } 4)$$

同理, 对 $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 有

$$|g^{\text{new}}| = |\bar{g}| + 2N' - 2, \quad |\bar{g}^{\text{new}}| = |\bar{g}| + 2N' + 2\tilde{N}' - 4 \quad (\text{附 } 5)$$

令 $d_f = |g| - |\bar{g}|, d_v = N' - \tilde{N}'$. 显然, 当 $d_f < d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 生成的滤波器组是上述两种方案中最短的; 当 $d_f > d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 生成的滤波器组是上述两种方案中最短的; 当 $d_f = d_v$ 时, $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 和 $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 生成的滤波器组支撑长度相同.

对 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{M}M \text{ dl } \tilde{N}'N'$, 生成的 g^{new} 和 \bar{g}^{new} 的支撑长度分别为

$$\begin{aligned} |\bar{g}^{\text{new}}| &= |g| + 2M + 2\tilde{M} + 2\tilde{N}' - 6, \\ |g^{\text{new}}| &= |g| + 2M + 2\tilde{M} + 2N' + 2\tilde{N}' - 8 \end{aligned} \quad (\text{附 } 6)$$

同理, 对 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{M}M \text{ ld } \tilde{N}'N', g^{\text{new}}$ 和 \bar{g}^{new} 的支撑长度分别为

$$\begin{aligned} |g^{\text{new}}| &= |g| + 2\tilde{M} + 2N' - 4, \\ |\bar{g}^{\text{new}}| &= |g| + 2\tilde{M} + 2N' + 2\tilde{N}' - 6 \end{aligned} \quad (\text{附 } 7)$$

显然, 式(附 6)和(附 7)生成的滤波器组支撑长度大于式(附 4)和(附 5)生成的滤波器组. 可知生成滤波器支撑长度最短的必是 $\tilde{N}N \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 或 $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{N}'N'$. 同理, $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{M}M \text{ dl } \tilde{N}'N'$ 和 $\tilde{N}N \text{ ld } \tilde{M}M \text{ ld } \tilde{N}'N'$ 的情况可类似证得.

证毕.



CHEN Zhi-Neng, born in 1982, Ph. D. candidate. His research interests include wavelet analysis, machine learning, image and video processing.

GAO Xie-Ping, born in 1965, professor, Ph. D. supervisor. His recent research interests include wavelet analysis and its application, neural computing and signal processing.

Background

The construction of biorthogonal wavelets with desirable properties is a challenging task in the past two decades. Generally, the construction methods fall mostly into two categories: spectral factorization and lifting scheme. The former one has been extensively studied. As a result almost all popular biorthogonal wavelets are firstly introduced using this technique. However, for the latter one, the general relationship between lifting scheme and properties of wavelet filters is still unclear. This paper studies the relationship between lifting scheme and properties of wavelet filters. The general theory for constructing of desirable biorthogonal wavelets within lifting scheme framework is established, and a general algorithm which can construct lots of biorthogonal wavelets with desirable properties in a straightforward way is proposed. This paper exhibits a new angle of view in biorthogonal wavelets construction and offers researchers a new series of ready-to-use wavelet filters. Furthermore, the capability of several newly constructed wavelets in image nonlinear ap-

proximation is discussed, which shows that the performance of these wavelets outperform both the popular CDF9-7 wavelet and the corresponding D-DW.

The research of this paper is supported by the National Natural Science Foundation of China "Research on Parameterization of Wavelets and Self-adaptive Wavelet Neural Networks" (No. 60375021). This project mainly aims at exploring theories and techniques for constructing wavelets and wavelet neural networks with desirable properties, which is a fundamental issue in many practical problems. The research group has got a lot of research results in this area. Some of them are published in area premium journals such as Science in China Series E; Information Science, Journal of Computer Science and Technology, International Journal of Computer Mathematics and so on. This paper deals with the construction of biorthogonal wavelets using lifting scheme. As an essential part of the project, both the theory and experimental results will deepen our research and contribute to our projects.