

脉冲神经膜系统求解任意两个自然数的乘积

张兴义¹⁾ 曾湘祥²⁾ 潘林强²⁾ 罗 斌¹⁾

¹⁾(安徽大学计算机科学与技术学院计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039)

²⁾(华中科技大学控制科学与工程系图像处理与智能控制教育部重点实验室 武汉 430074)

摘 要 考虑在一种新的生物计算装置(即脉冲神经膜系统)上处理任意两个自然数的乘积问题. 首先给出了具有单个输入神经元的脉冲神经膜系统, 它可以求解 n -addition 问题(即 n 个自然数的求和); 其次, 构造了一族脉冲神经膜系统, 使该族中的每个系统可以求解给定二进制位长度的任意两个自然数的乘积. 文中解决了 Miguel A Gutiérrez-Naranjo 和 Alberto Leporati 提出的一个公开问题.

关键词 膜计算; 脉冲神经膜系统; 乘法

中图法分类号 TP301 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2009.02362

A Spiking Neural P System for Performing Multiplication of Two Arbitrary Natural Numbers

ZHANG Xing-Yi¹⁾ ZENG Xiang-Xiang²⁾ PAN Lin-Qiang²⁾ LUO Bin¹⁾

¹⁾(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing of Ministry of Education, School of Computer Science and Technology, Anhui University, Hefei 230039)

²⁾(Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Control, Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract In this paper, the authors consider the problem of performing multiplication of two arbitrary natural numbers on a new class of bio-inspired computing devices—spiking neural P systems. To this aim, the authors first present a spiking neural P system with a single input neuron for dealing with n -addition, i. e., the addition of n natural numbers. Then, a family of spiking neural P systems is constructed, where each system can perform the multiplication of two arbitrary natural numbers with given length of binary bits. This paper provides an answer to an open problem formulated by Miguel A Gutiérrez-Naranjo and Alberto Leporati.

Keywords membrane computing; spiking neural P systems; multiplication

1 引 言

脉冲神经膜系统(简记为 SN P 系统)是膜计算领域中一类新的生物计算装置. 基于神经元通过突

触向其它神经元发送脉冲的生物现象, Ionescu 等人首先提出了该类计算模型^[1].

在 SN P 系统中, 基本的计算单元称为神经元, 它们可以用有向图的结点表示, 而结点之间的弧线表示突触. 每个神经元包含一定数量的字符 a , 其中

收稿日期:2009-10-15;最终修改稿收到日期:2009-11-11. 本课题得到国家自然科学基金(60703047, 60674106, 30870826, 60533010, 60772122)、博士点基金(20060487014)、武汉市晨光计划(200750731262)、华中科技大校重点基金(2007Z015A)、湖北省自然科学基金(2008CDB113, 2008CDB180)和安徽省教育厅自然科学研究重点项目(2008A033)资助. 张兴义, 男, 1982 年生, 博士, 主要研究方向为膜计算、模式识别及数字图像处理. E-mail: xyzhanghust@gmail.com. 曾湘祥, 男, 1984 年生, 博士研究生, 主要研究方向为膜计算. 潘林强(通信作者), 男, 1972 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为图论和膜计算. E-mail: lqpan@mail.hust.edu.cn. 罗斌, 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为模式识别与数字图像处理.

字符 a 表示脉冲. 同时, 每个神经元还包含一些激发规则和遗忘规则. 激发规则使神经元以脉冲形式向其它神经元发送信息, 它们在一定时间后可以接收到这些脉冲. 如果一个神经元在某个时刻不能使用激发规则, 则它有可能可以使用遗忘规则. 使用遗忘规则, 将清除神经元中的一些数量的脉冲.

脉冲神经膜系统在产生模式和接受模式下的计算能力已经被广泛地研究. 当它用作产生装置时, 不需要向系统输入字符, 因此也就没有必要指定输入神经元. 从初始格局开始计算, 脉冲神经膜系统可以产生两种形式的计算结果——数集和语言. 对于产生数集的情形, 计算结果通常定义为输出神经元输出前两个脉冲的时刻差. 在文献[1]中, 已经证明脉冲神经膜系统作为数集的产生装置是计算完备的, 即可以产生数的递归可枚举集合; 若对神经元可以包含的脉冲数目进行限制, 则脉冲神经膜系统可以刻画半线性数集. 对于产生语言的情形, 与一个计算对应的字符串通常按如下方式定义: 若在某步输出神经元向环境输出 i 个脉冲, 则此步就对应字符 b_i . 其中, b_0 可以看成一个新字符, 也可以看成空字符 λ . 在此定义下, 文献[2]研究了脉冲神经膜系统在使用广义规则时的语言产生能力, 文献[3-4]分别研究了在非同步模式和穷举使用规则模式下的语言产生能力. 与产生模式相反, 在接受模式下, 脉冲神经膜系统可以省略输出神经元, 数据是从环境中通过输入神经元读取. 在这种计算模式下脉冲神经膜系统同样可以得到类似于文献[1]中的结论.

脉冲神经膜系统也已经用于求解适定性问题, 它对问题进行求解主要有两种方式: 非统一形式 (semi-uniform) 和统一形式 (uniform)^[5]. 脉冲神经膜系统以非统一形式求解问题 Q 是指: 对于问题 Q 中的每个给定算例 \mathcal{I} , 如果可以构造一个结构和初始格局与 \mathcal{I} 相关的脉冲神经膜系统 $\Pi_{Q, \mathcal{I}}$, 使它在多项式时间内 (与 \mathcal{I} 的规模相关) 能够解决算例 \mathcal{I} , 且当且仅当存在真值赋值使 \mathcal{I} 为真, 此系统的计算可以停止 (或在给定时间内系统输出指定数目的脉冲), 则称此系统能够以非统一形式解决问题 Q , 并把所得到的解称为非统一形式解. 如果可以构造一族脉冲神经膜系统 $\{\Pi_Q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, 对于每个规模为 n 的算例 $\mathcal{I} \in Q$, 只要向 $\Pi_Q(n)$ 的指定输入神经元输入相应的脉冲 (与 n 相关的多项式个脉冲), 它就可以在多项式时间内解决算例 \mathcal{I} , 且当且仅当存在真值赋值使 \mathcal{I} 为真, 此系统的计算可以停止 (或在给定时间

间内系统输出指定数目的脉冲), 则称 $\{\Pi_Q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 能够以统一形式解决问题 Q , 并把所得到的解称为统一形式解. 与非统一形式解相比, 统一形式解的优点在于它只与问题本身的规模相关, 而与具体的算例无关. 实际上, 对于非统一形式解, 由于脉冲神经膜系统在计算开始前, 算例已经编码到了计算系统中, 因此在这种情形下系统不需要输入神经元.

与前面介绍的用途完全不同, 文献[6]提出了脉冲神经膜系统的一种新的使用方式: 把脉冲神经膜系统作为处理算术运算的装置. 具体地说, 构造了若干族具有 n 个输入神经元的脉冲神经膜系统, 它们分别用来计算加法、减法、判断是否相等以及某固定的自然数与任意一个自然数的乘积. 在所构造的这些系统中, 自然数以脉冲序列的形式输入到系统中: 在每个计算步骤, 根据需要输入自然数的相应二进制位是 1 还是 0, 向输入神经元输入 1 个或 0 个脉冲. 计算结果也是以编码为脉冲序列的二进制形式, 它通过输出神经元输出到环境中. 另外, 文献[6]指出了一些需要进一步研究的公开问题, 其中一个问题是: 如何设计一个脉冲神经膜系统, 使它可以求解任意两个自然数的乘积.

本文对此公开问题进行了研究. 首先, 改进了文献[6]中所构造的求 n 个自然数和的脉冲神经膜系统 (它含有 n 个输入神经元), 提出了用于自然数求和的具有一个输入神经元的脉冲神经膜系统. 其次, 构造了一族具有一个输入神经元的脉冲神经膜系统, 使该族中的每个系统可以求解给定二进制位长度的任意两个自然数的乘积. 被乘积的两个自然数是通过输入神经元依次输入到系统中. 与文献[6]中的编码方法一样, 这里输入到系统中的自然数也是表示为二进制形式, 然后用脉冲序列编码, 其中 1 个脉冲表示输入的自然数对应的二进制位是 1, 0 个脉冲表示它对应的二进制位是 0. 同样, 计算结果也是编码为脉冲序列的二进制形式, 它通过输出神经元输出到环境中. 因此, 本文的研究结果回答了上述公开问题.

本文第 2 节回顾本文将要使用的一些数学基础知识; 第 3 节介绍脉冲神经膜系统的形式化定义; 第 4 节提出具有一个输入神经元的脉冲神经膜系统, 用于求编码为二进制形式的任意个自然数的和; 第 5 节构造一族具有一个输入神经元的脉冲神经膜系统, 用于求解任意两个自然数的乘积; 最后一节总结本文的研究成果, 并简单介绍进一步研究的方向.

2 基础知识

假设读者熟悉膜计算及形式语言理论中的一些基本概念(关于膜计算的内容可以参见文献[7]^①),这里我们只简单介绍本文将要使用的一些定义和符号标记.

对于字母表 V, V^* 表示 V 上所有有限字符串的集合,其中用 λ 表示空字符串. V 上的所有非空有限字符串用 V^+ 表示. 如果 $V = \{a\}$ (这时称 V 为单字母集合),则 $\{a\}^*, \{a\}^+$ 分别简记为 a^*, a^+ .

字母表 V 上的正则表达式定义如下:

- (1) λ 和 $a \in V$ 都是正则表达式;
- (2) 如果 E_1, E_2 是 V 上的正则表达式,则 $E_1 E_2, E_1 \cup E_2, E_1^+$ 都是 V 上的正则表达式;
- (3) V 上再没有别的其它正则表达式.

正则表达式 E 对应于一个语言 $L(E)$,它按如下方式定义:

- (1) $L(\lambda) = \{\lambda\}$ 以及对每个 $a \in V$,有 $L(a) = \{a\}$;
- (2) 对 V 上的任意表达式 E_1, E_2 ,有

$$L(E_1 \cup E_2) = L(E_1) \cup L(E_2),$$

$$L(E_1 E_2) = L(E_1)L(E_2),$$

$$L(E_1^+) = L(E_1)^+.$$

在不引起歧义的前提下,正则表达式中的某些括号可以省略. 另外,对于任意正则表达式 E ,把 $E^+ \cup \{\lambda\}$ 简记为 E^* .

3 脉冲神经膜系统

由引言可知,脉冲神经膜系统实际上是一类特殊的类组织和类神经膜系统,它是通过抽象脉冲神经元的功能而得到的. 下面我们简单介绍脉冲神经膜系统的形式化定义.

一个度为 $m \geq 1$ 的脉冲神经膜系统具有如下结构:

$$\Pi = (O, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, syn, in, out),$$

其中:

- (1) $O = \{a\}$ 为单字母集合, a 表示一个脉冲;
- (2) $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ 表示系统 Π 中的 m 个神经元,神经元 σ_i 表示为 $\sigma_i = (n_i, R_i), 1 \leq i \leq m$, 其中:

① $n_i \geq 0$ 表示在计算开始时神经元 σ_i 包含的脉冲数,

② R_i 表示神经元 σ_i 中的所有规则构成的有限集合,它有如下两种形式:

(i) $E/a^c \rightarrow a^p; d$, 其中 E 表示字符 a 上的正则表达式, $c \geq 1, d \geq 0, p \geq 1$, 且 $c \geq p$;

(ii) $E'/a^s \rightarrow \lambda$, 其中 E' 表示字符 a 上的正则表达式, $s \geq 1$, 且此规则满足: 对于 R_i 中类型 (i) 的每个规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d$, 总有

$$L(E) \cap L(E') = \emptyset;$$

(3) $syn \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ 表示神经元之间的连接关系, 对每个 $1 \leq i \leq m$, 有 $(i, i) \notin syn$;

(4) $in, out \in \{1, 2, \dots, m\}$ 分别表示输入和输出神经元.

类型 (i) 的规则称为广义激发规则, 类型 (ii) 的规则称为广义遗忘规则. 对应地, 若类型 (i) 的规则满足 $p=1$ (即形式为 $E/a^c \rightarrow a; d$ 的规则) 以及类型 (ii) 的规则满足 $E=a^s$ (即形式为 $a^s/a^s \rightarrow \lambda$ 的规则), 则分别称它们为标准激发规则 and 标准遗忘规则.

为书写简单, 若激发规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d$ 满足 $E=a^c$, 则通常把它写为 $a^c \rightarrow a^p; d$; 若激发规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d$ 满足 $d=0$, 则把它写为 $E/a^c \rightarrow a^p$. 因此, 若激发规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d$ 满足 $E=a^c$ 且 $d=0$, 则把它简记为 $a^c \rightarrow a^p$. 类似地, 若遗忘规则 $E/a^s \rightarrow \lambda$ 满足 $E=a^s$, 则可以把它简写为 $a^s \rightarrow \lambda$.

类型 (i) 的规则按如下方式使用: 在某时刻, 如果神经元 σ_i 包含 k 个脉冲, 且有 $a^k \in L(E)$ 及 $k \geq c$, 则此神经元此时可以使用激发规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d$. 当神经元 σ_i 使用此规则后, 将消耗 c 个脉冲 (于是神经元 σ_i 剩余 $k-c$ 个脉冲); 同时, 在 d 个单位时间后产生 p 个新脉冲, 并立即向与它连接的所有神经元分别发送 p 个脉冲. 另外, 在使用这条规则后到发送新脉冲这段时间内, 这个神经元是封闭的, 不能接收任何脉冲. 如果神经元 σ_i 在第 t 步使用激发规则 $E/a^c \rightarrow a^p; d, d \geq 1$, 则此神经元在第 $t, t+1, \dots, t+d-1$ 步都是封闭的. 当一个神经元处于封闭时, 它所包含的任何规则都不能使用; 只有当它变为开放状态后, 才可能使用规则. 若某神经元向一个封闭的神经元发送脉冲, 则这个封闭神经元此时不能接收到这些脉冲, 这些脉冲自然消失. 对于输出神经元来说, 它可以向环境发送脉冲.

类型 (ii) 的规则按如下方式使用: 若神经元 σ_i 包含 k' 个脉冲, 且有 $a^{k'} \in L(E')$ 及 $k' \geq s$, 则此神经元此时可以使用遗忘规则 $E'/a^s \rightarrow \lambda$. 注意此时这个神经元中的所有激发规则都不能使用. 当神经元 σ_i 使用此规则后, 将消耗 s 个脉冲, 但不会产生新脉冲.

由于两条激发规则 $E_1: a^{c_1} \rightarrow a^{p_1}; d_1$ 和 $E_2: a^{c_2} \rightarrow a^{p_2}; d_2$ 可能满足 $L(E_1) \cap L(E_2) \neq \emptyset$, 因此在一个神经元中可能存在多条规则可以使用的情形. 在任何时刻, 若神经元 σ_i 中有多条规则可以使用, 那么此神经元能且只能使用一条规则, 并且此规则的选取是随机的.

对于上述的脉冲神经膜系统 Π , 它在某步的格局定义为 $\langle k_1/t_1, k_2/t_2, \dots, k_m/t_m \rangle$, 其中 k_i 表示神经元 σ_i 在此步所包含的脉冲个数, t_i 表示神经元 σ_i 由封闭状态转变为开放状态还需要的步数, $1 \leq i \leq m$. 因而, 在计算开始时, 系统的格局可以表示为 $\langle n_1/0, n_2/0, \dots, n_m/0 \rangle$, 我们把它称为系统的初始格局. 通过使用上述规则, 系统可以由一个格局转变为另一个格局, 这个过程称为系统的格局转移. 从初始格局开始的一系列格局转移被称为系统的一个计算.

为了用脉冲神经膜系统实现算术运算, 需要把要计算的自然数输入到系统中. 本文采用文献[6]中的编码方法, 把要输入的自然数编码为二进制形式, 按如下方式读取到输入神经元: 把二进制形式的自然数表示为脉冲序列, 1 个脉冲表示该自然数对应的二进制位为 1, 0 个脉冲表示它对应的二进制位为 0. 当输入 k 个自然数时, 在脉冲神经膜系统领域通常采用两种方法输入这些自然数. 第一种方法是: 通过使用 k 个输入神经元, 把这些自然数同时输入到系统中^[6]. 第二种方法是: 脉冲神经膜系统只有一个输入神经元, k 个自然数是通过这个唯一输入神经元依次输入到系统中. 由于大多数的计算装置都只有一个输入单元, 因此第二种方式看起来更加合理, 本文所构造的脉冲神经膜系统都是这种类型的系统. 另外, 计算结果也是编码为脉冲序列的二进制形式, 它通过输出神经元输出到环境.

4 具有一个输入神经元的二进制加法脉冲神经膜系统

本节将构造一个具有唯一输入神经元的脉冲神经膜系统, 该系统可以求解二进制位长度为 k 的 n 个自然数的和, 其中 $n \geq 2, k \geq 1$.

为叙述简单, 我们把二进制位长度为 k 的 n 个自然数的加法标记为 n -addition, 其中自然数 n, k 满足 $n \geq 2, k \geq 1$. 求解 n -addition 的具有一个输入神经元的脉冲神经膜系统如图 1 所示, 它的形式化定义如下:

$$\Pi_{Add}(n, k) = (O, \sigma_{Input}, \sigma_{aux_{1,0}}, \sigma_{aux_{1,1}}, \dots, \sigma_{aux_{1,k+1}},$$

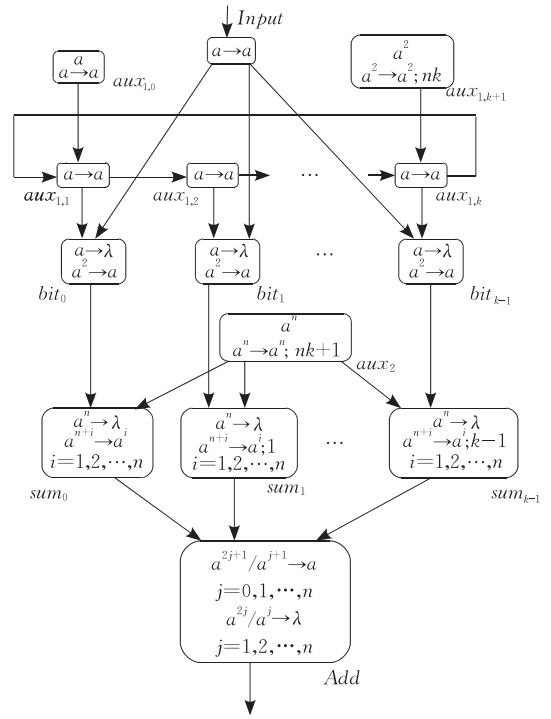


图 1 求二进制位长度为 k 的 n 个自然数之和的脉冲神经膜系统(具有一个输入神经元)

$$\sigma_{aux_2}, \sigma_{bit_0}, \sigma_{bit_1}, \dots, \sigma_{bit_{k-1}}, \sigma_{sum_0},$$

$$\sigma_{sum_1}, \dots, \sigma_{sum_{k-1}}, \sigma_{Add}, \sigma_{syn}, in, out),$$

其中:

- (1) $O = \{a\}$;
- (2) $\sigma_{Input} = (0, R_{Input}), R_{Input} = \{a \rightarrow a\}$;
- (3) $\sigma_{aux_{1,0}} = (1, R_{aux_{1,0}}), R_{aux_{1,0}} = \{a \rightarrow a\}$;
- (4) $\sigma_{aux_{1,i}} = (0, R_{aux_{1,i}}), R_{aux_{1,i}} = \{a \rightarrow a\},$
 $i = 1, 2, \dots, k$;
- (5) $\sigma_{aux_{1,k+1}} = (2, R_{aux_{1,k+1}}),$
 $R_{aux_{1,k+1}} = \{a^2 \rightarrow a^2; nk\}$;
- (6) $\sigma_{aux_2} = (n, R_{aux_2}), R_{aux_2} = \{a^n \rightarrow a^n; nk+1\}$;
- (7) $\sigma_{bit_i} = (0, R_{bit_i}),$
 $R_{bit_i} = \{a \rightarrow \lambda, a^2 \rightarrow a\}, i = 0, 1, \dots, k-1$;
- (8) $\sigma_{sum_j} = (0, R_{sum_j}),$
 $R_{sum_j} = \{a^n \rightarrow \lambda, a^{n+i} \rightarrow a^i; j | i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$
 $j = 0, 1, \dots, k-1$;
- (9) $\sigma_{Add} = (0, R_{Add}),$
 $R_{Add} = \{a^{2^{j+1}}/a^{j+1} \rightarrow a, a^{2^j}/a^j \rightarrow \lambda |$
 $i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ 且 } j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$;
- (10) $\sigma_{syn} = \{(Input, bit_i) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup$
 $\{(aux_{1,i}, aux_{1,i+1}) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup$
 $\{(aux_{1,k+1}, aux_{1,k}), (aux_{1,k}, aux_{1,1})\} \cup$
 $\{(aux_{1,i+1}, bit_i) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup$
 $\{(bit_i, sum_i) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup$

$$\{(aux_2, sum_i) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{(sum_i, Add) | i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\};$$

(11) $in = Input$;

(12) $out = Add$.

定理 1. 对于图 1 所示的求解 n -addition 的脉冲神经膜系统, 若向它的输入神经元 σ_{Input} 以二进制形式依次输入二进制位长度为 k 的 n 个自然数, 则此系统能以二进制形式输出它们的和.

证明. 首先, 我们通过输入神经元 σ_{Input} 向系统输入第 1 个自然数. 令 t 为当前时刻, 且在开始格局时有 $t=0$. 当 $t=1$ 时, 与第 1 个自然数的二进制表示中幂 2^0 对应的二进制数字输入到输入神经元. 若与幂 2^0 对应的二进制数字是 1, 则向输入神经元输入一个脉冲; 若与它对应的二进制数字是 0, 则向输入神经元输入 0 个脉冲. 假设输入神经元接收到一个脉冲, 则在下一步每个神经元 σ_{bit_i} ($0 \leq i \leq k-1$) 将分别接收一个脉冲. 同时在 $t=1$ 时, 辅助神经元 $\sigma_{aux_{1,0}}$ 也会向辅助神经元 $\sigma_{aux_{1,1}}$ 发送一个脉冲. 在下一步, 神经元 $\sigma_{aux_{1,2}}$ 和 σ_{bit_0} 会分别接收到一个脉冲. 因此, 在 $t=2$ 时, 神经元 σ_{bit_0} 会得到 2 个脉冲, 而其它神经元 σ_{bit_i} ($1 \leq i \leq k-1$) 都只包含一个脉冲. 因此, 在 $t=3$ 时神经元 σ_{bit_0} 中的规则 $a^2 \rightarrow a$ 可以使用. 使用此规则后, 它将向神经元 σ_{sum_0} 发送一个脉冲, 在 $t=nk+2$ 前这个脉冲都将留在此神经元中. 每个神经元 σ_{bit_i} ($1 \leq i \leq k-1$) 所包含的那个脉冲在 $t=3$ 时将被遗忘. 此时, 我们已经把与第 1 个自然数在 2^0 处的二进制数字对应的“脉冲”放到神经元 σ_{sum_0} 中 (标记“脉冲”表示 0 或 1 个脉冲, 取决于此自然数对应的二进制数字是 0 或 1).

在 $t=2$ 时, 与第 1 个自然数在 2^1 处的二进制数字对应的“脉冲”会同时被输入到神经元 σ_{Input} . 在下一步这个“脉冲”被发送到神经元 σ_{bit_1} , 同时它也会从神经元 $\sigma_{aux_{1,2}}$ 接收一个脉冲. 如果神经元 σ_{bit_1} 共接收到 2 个脉冲, 则通过使用规则 $a^2 \rightarrow a$ 与神经元 σ_{bit_1} 对应的神经元 σ_{sum_1} 会接收一个脉冲, 并且在 $t=nk+2$ 前此脉冲都将留在神经元 σ_{sum_1} 中. 如果神经元 σ_{bit_1} 只接收到一个脉冲, 则在下一步将遗忘此脉冲. 需要注意: 在 $t=2$ 时, 神经元 σ_{Input} 也会向神经元 σ_{bit_i} 发送“脉冲”, 其中 $i=0$ 或 $i=2, 3, \dots, k-1$, 但是在下一步通过使用规则 $a \rightarrow \lambda$ 会把这些“脉冲”遗忘. 因此, 系统可以成功地把与第 1 个自然数在 2^1 处的二进制数字对应的“脉冲”放在神经元 σ_{sum_1} 中.

类似地, 重复上面的过程系统可以分别把与第 1 个自然数在 $2^2, \dots, 2^{k-1}$ 处的二进制数字对应的

“脉冲”依次放在神经元 $\sigma_{sum_2}, \dots, \sigma_{sum_{k-1}}$ 中. 此时, 第 1 个自然数已经完全被输入到系统中, 其中它在 2^i 处的二进制数字以脉冲的形式存储在神经元 σ_{sum_i} 中, $0 \leq i \leq k-1$. 接下来, 环境会向系统立即输入第 2 个自然数. 与输入第 1 个自然数的过程类似, 与第 2 个自然数在 $2^0, \dots, 2^{k-1}$ 处的二进制数字对应的“脉冲”会分别依次存储在神经元 $\sigma_{sum_0}, \dots, \sigma_{sum_{k-1}}$ 中, 并且在 $t=nk+2$ 前这些“脉冲”会留在这些神经元中.

在 $t=nk+2$ 时, 系统的格局如下: 与需要计算的 n 个自然数在 $2^0, \dots, 2^{k-1}$ 处的二进制数字对应的“脉冲”已经完全存储在相应神经元 $\sigma_{sum_0}, \dots, \sigma_{sum_{k-1}}$ 中. 在这一步, 每个神经元 σ_{sum_i} ($0 \leq i \leq k-1$) 会从辅助神经元 σ_{aux_2} 分别接收 n 个脉冲 (在第 1 步, 神经元 σ_{aux_2} 被激活, 并且延迟 $nk+1$ 步后产生新的脉冲). 因此, 每个神经元 σ_{sum_i} ($0 \leq i \leq k-1$) 可能包含 $n, n+1, \dots$ 或 $2n$ 个脉冲, 这取决于这 n 个自然数中在 2^i 处二进制数字等于 1 的个数. 若有 j 个在 2^i 处的二进制数字等于 1 的自然数, $0 \leq j \leq n$, 则神经元 σ_{sum_i} 将包含 $n+j$ 个脉冲.

在 $t=nk+3$ 时, 所有神经元 σ_{sum_j} 将被激活, 其中 $0 \leq j \leq k-1$. 假设神经元 σ_{sum_j} 包含 $n+i$ 个脉冲, 则它可以使用规则 $a^{n+l} \rightarrow a^l; j$, 其中 $l=i$. 从神经元 σ_{sum_i} 中的规则所含有的延迟可以得到: 神经元 σ_{sum_0} 首先向神经元 σ_{Add} 发送脉冲 (在 $t=nk+3$), 神经元 σ_{sum_1} 在 $t=nk+4$ 时刻发送脉冲, 而神经元 $\sigma_{sum_{k-1}}$ 在 $t=nk+k+2$ 时刻发送脉冲. 不失一般性, 假设在某个步骤 $t, nk+3 \leq t \leq nk+k+2$, 在前一步运算后神经元 σ_{Add} 剩余 m 个脉冲 (实际上, 在 $t=nk+3$ 时有 $m=0$), 这表示 n 个自然数在 2^{t-nk-3} 处的二进制数字的和向比它高一位进的数字为 m . 同时假设神经元 σ_{sum_i} ($0 \leq i \leq k-1$) 在 t 时刻向神经元 σ_{Add} 发送 l 个脉冲 (这对应于在 n 个自然数中有 l 个第 $t-nk-2$ 二进制位为 1). 此时, 神经元 σ_{Add} 的运行方式可以分为以下两种情形:

(1) 若 $m+l$ 为奇数且有 $m+l=2j+1$, 则 $t+1$ 步时在神经元 σ_{Add} 中可以使用规则 $a^{2j+1}/a^{j+1} \rightarrow a$. 使用此规则后, 将立即产生一个脉冲并发送到环境中, 这表示此 n 个自然数和的第 $t-nk-2$ 个二进制位数字为 1. 同时, 使用此规则后将消耗 $j+1$ 个脉冲, 神经元 σ_{Add} 剩余 j 个脉冲, 这表示此 n 个自然数在 2^{t-nk-2} 处的二进制数字的和向比它高一位进的数字为 j .

(2) 若 $m+l$ 为偶数且有 $m+l=2j$, 则 $t+1$ 步

时在神经元 σ_{Add} 中可以使用规则 $a^{2^j}/a^j \rightarrow \lambda$. 使用此规则后,不会产生新的脉冲,这表示此 n 个自然数和的第 $t-nk-2$ 个二进制位数字为 0. 同时,神经元 σ_{Add} 会剩余 j 个脉冲,它们将用于计算下一个二进制位数字的一部分. 与前面类似,在 σ_{Add} 中剩余 j 个脉冲表示此 n 个自然数在 2^{t-nk-2} 处的二进制数字的和向比它高一位进的数字为 j .

基于以上说明,读者可以验证:对于给定的 $n \geq 2, k \geq 1$,上述所构造的脉冲神经膜系统可以正确地求二进制位长度为 k 的 n 个自然数之和. 证毕.

为说明图 1 所示的脉冲神经膜系统具体如何运行的,我们考虑如下简单例子:求 3 个自然数 3, 2, 5 之和. 这 3 个自然数表示为二进制形式分别为 $011_2, 010_2, 101_2$. 显然,这里有 $n=3, k=3$. 求上述 3 个自然数之和的脉冲神经膜系统如图 2 所示. 当此脉冲神经膜系统 $\Pi_{Add}(3, 3)$ 求和时,在每个计算步骤,所有神经元所包含的脉冲数目以及发送到环境中的脉冲数见表 1. 输入和输出序列都用黑体标出. 注意:此系统的输出有效时刻为 $t=13$. 由表 1 可以看出,上面 3 个自然数的和为 $1010_2=10$.

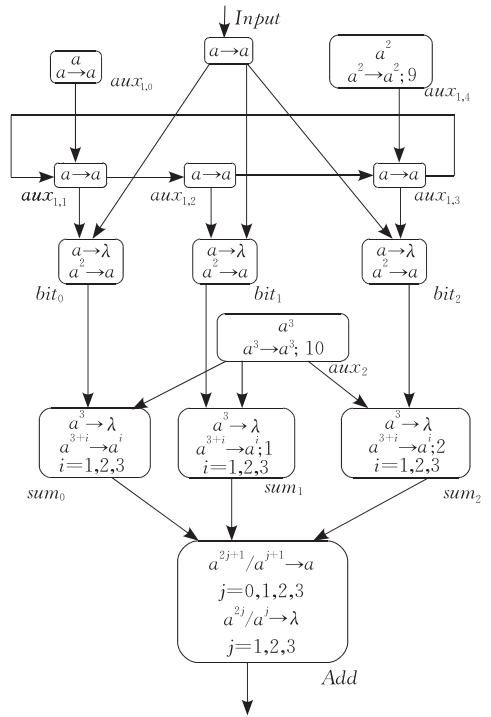


图 2 求二进制位长度为 3 的 3 个自然数之和的脉冲神经膜系统

表 1 在计算 $011_2 + 010_2 + 101_2 = 1010_2$ 的过程中,图 2 所示的脉冲神经膜系统 $\Pi_{Add}(3, 3)$ 在每个计算步骤所有神经元的脉冲数目以及发送到环境中的脉冲数

t	$Input$	$aux_{1,0}$	$aux_{1,1}$	$aux_{1,2}$	$aux_{1,3}$	$aux_{1,4}$	bit_1	bit_2	aux_2	sum_0	sum_1	sum_2	Add	$Output$
0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	3	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0(9)	0	0	0(10)	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0(8)	1	1	0(9)	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0(7)	2	1	0(8)	1	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0(6)	0	1	0(7)	1	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0	0(5)	0	0	0(6)	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0(4)	2	1	0(5)	1	1	0	0
7	1	0	1	1	0	0	0(3)	0	1	0(4)	1	2	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0(2)	1	1	0(3)	1	2	0	0
9	1	0	0	0	0	1	0(1)	1	0	0(2)	2	2	0	0
10	0	0	1	1	0	2	0	1	2	0(1)	2	2	0	0
11	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	5	5	4	0
12	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0(1)	0(2)	2	0
13	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0(1)	3	0
14	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	2	1
15	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1

5 一般性的二进制乘法脉冲神经膜系统

如引言所述,文献[6]给出了可以求一个固定自然数与一个任意自然数的乘积的脉冲神经膜系统. 本节我们将构造一族可以求任意两个自然数乘积的脉冲神经膜系统. 为与文献[6]中的脉冲神经膜系统进行区别,这里我们把它称为一般性的二进制乘法

脉冲神经膜系统. 对二进制位长度为 k 的任意两个自然数 m 和 n ,其中 $m, n \geq 0$ 且 $k \geq 1$,我们构造如图 3 所示的一族脉冲神经膜系统 $\{\Pi_{Mult_{gen}}(k)\}_{k \in \mathbb{N}, k \geq 1}$ 来计算 $m \cdot n$. 此脉冲神经膜系统的结构如下:

$$\Pi_{Mult_{gen}}(k) = (O, \sigma_{Input}, \sigma_{aux_{1,0}}, \sigma_{aux_{1,1}}, \dots, \sigma_{aux_{1,k}}, \sigma_{bit_0}, \sigma_{bit_1}, \dots, \sigma_{bit_{k-1}}, \sigma_{aux_{2,0}}, \sigma_{aux_{2,1}}, \dots, \sigma_{aux_{2,k}}, \sigma_{bit_{1,0}}, \sigma_{bit_{1,1}}, \dots, \sigma_{bit_{1,k-1}}, \sigma_{bit_{2,1}}, \sigma_{bit_{2,2}}, \dots, \sigma_{bit_{2,k}}, \dots, \sigma_{bit_{k,k-1}}, \sigma_{bit_{k,k}}, \dots, \sigma_{bit_{k,2k-2}}, \sigma_{sum_0}, \sigma_{sum_1}, \dots)$$

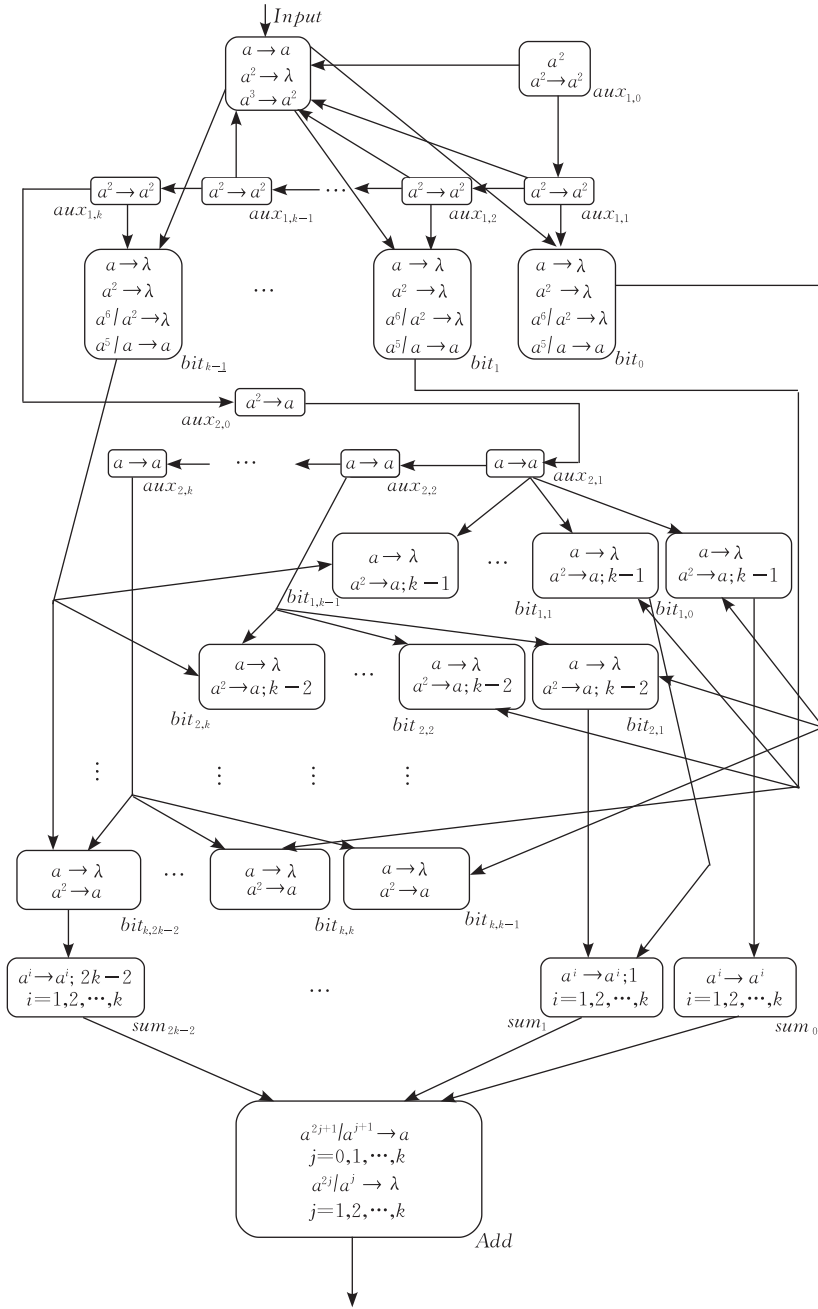


图 3 求任意二进制位长度为 k 的两个自然数乘积的脉冲神经膜系统

$$\sigma_{sum_{2k-2}}, \sigma_{Add}, syn, in, out),$$

其中:

(1) $O = \{a\}$;

(2) $\sigma_{Input} = (0, R_{Input}),$
 $R_{Input} = \{a \rightarrow a, a^2 \rightarrow \lambda, a^3 \rightarrow a^2\}$;

(3) $\sigma_{aux_{1,0}} = (2, R_{aux_{1,0}}), R_{aux_{1,0}} = \{a^2 \rightarrow a^2\}$;

(4) $\sigma_{aux_{1,i}} = (0, R_{aux_{1,i}}),$
 $R_{aux_{1,i}} = \{a^2 \rightarrow a^2\}, i = 1, 2, \dots, k$;

(5) $\sigma_{bit_i} = (0, R_{bit_i}),$
 $R_{bit_i} = \{a^2 \rightarrow \lambda, a^6/a^2 \rightarrow \lambda, a^5/a \rightarrow a, a \rightarrow \lambda\},$
 $i = 0, 1, \dots, k-1$;

(6) $\sigma_{aux_{2,0}} = (0, R_{aux_{2,0}}), R_{aux_{2,0}} = \{a^2 \rightarrow a\}$;

(7) $\sigma_{aux_{2,i}} = (0, R_{aux_{2,i}}), R_{aux_{2,i}} = \{a \rightarrow a\},$
 $i = 1, \dots, k$;

(8) $\sigma_{bit_{i,j}} = (0, R_{bit_{i,j}}),$
 $R_{bit_{i,j}} = \{a \rightarrow \lambda, a^2/a \rightarrow a; k-i\},$
 $i = 1, 2, \dots, k, j = i-1, i, \dots, i+k-2$;

(9) $\sigma_{sum_i} = (0, R_{sum_i}),$
 $R_{sum_i} = \{a^j \rightarrow a^j; i | j \in \{1, 2, \dots, k\}\},$
 $i = 0, 1, \dots, 2k-2$;

(10) $\sigma_{Add} = (0, R_{Add}),$
 $R_{Add} = \{a^{2^{i+1}}/a^{i+1} \rightarrow a, a^{2^j}/a^j \rightarrow a |$

$$\begin{aligned}
 & i \in \{0, 1, \dots, k\} \text{ 且 } j \in \{1, \dots, k\}; \\
 (11) \quad & \text{syn} = \{(\text{Input}, \text{bit}_i) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{1,i}, \text{Input}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{1,i}, \text{aux}_{1,i+1}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{1,k}, \text{aux}_{2,0})\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{2,i}, \text{aux}_{2,i+1}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{1,i+1}, \text{bit}_i) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{bit}_i, \text{bit}_{j,i}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \\
 & j \times l \in \langle 1, i \rangle, \langle 2, i+1 \rangle, \dots, \langle k, i+k-1 \rangle\} \cup \\
 & \{(\text{aux}_{2,i}, \text{bit}_{i,j}) \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}, \\
 & j \in \{i-1, i, \dots, i+k-2\}\} \cup \\
 & \{(\text{bit}_{i,j}, \text{sum}_j) \mid i \in \{1, 2, \dots, j+1\}, \\
 & j \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \\
 & \{(\text{bit}_{i,j}, \text{sum}_j) \mid i \in \{j-k+2, j-k+3, \dots, k\}, \\
 & j \in \{k, k+1, \dots, 2k-2\}\} \cup \\
 & \{(\text{sum}_i, \text{Add}) \mid i \in \{0, 1, \dots, 2k-2\}\}; \\
 (12) \quad & \text{in} = \text{Input}; \\
 (13) \quad & \text{out} = \text{Add}.
 \end{aligned}$$

定理 2. 对于如图 3 所示的脉冲神经膜系统 $\Pi_{Mult_{gen}(k)}$, 若以二进制形式依次向输入神经元 σ_{Input} 输入二进制位长度为 k 的两个自然数 m 和 n , 则此系统能以二进制形式输出乘积 $m \cdot n$.

证明. 假设 $m = \sum_{i=0}^{k-1} m_i 2^i, n = \sum_{j=0}^{k-1} n_j 2^j$, 则有

$$\begin{aligned}
 m \cdot n &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} m_i 2^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} n_j 2^j \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} m_i n_j 2^{i+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} n_j m_i 2^{i+j} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} n_0 m_i 2^{i+j} + \sum_{i=0}^{k-1} n_1 m_i 2^{i+j} + \dots + \\
 & \quad \sum_{i=0}^{k-1} n_{k-1} m_i 2^{i+j} \\
 &= (n_0 m_0 2^0 + n_0 m_1 2^1 + \dots + n_0 m_{k-1} 2^{k-1}) + \\
 & \quad (n_1 m_0 2^1 + n_1 m_1 2^2 + \dots + n_1 m_{k-1} 2^k) + \dots + \\
 & \quad (n_{k-1} m_0 2^{k-1} + n_{k-1} m_1 2^k + \dots + \\
 & \quad n_{k-1} m_{k-1} 2^{2k-2}) \\
 &= n_0 m_0 2^0 + (n_0 m_1 + n_1 m_0) 2^1 + \dots + \\
 & \quad (n_0 m_{k-1} + n_1 m_{k-2} + \dots + n_{k-1} m_0) 2^{k-1} + \\
 & \quad (n_1 m_{k-1} + n_2 m_{k-2} + \dots + n_{k-1} m_1) 2^k + \dots + \\
 & \quad n_{k-1} m_{k-1} 2^{2k-2}.
 \end{aligned}$$

由以上表达式可以看出, 计算乘积 $m \cdot n$ 可以转化为求解 $2k-1$ 个子表达式的和, 其中与 2^i 对应的子表达式表示由 m 乘 n 得到的在 2^i 处的所有可能二进制数字的和, $0 \leq i \leq 2k-2$.

图 3 所示的脉冲神经膜系统的运行过程可以分为以下 4 个阶段:

(1) 输入自然数 m . 通过与辅助神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,i}}$ 相互作用 ($0 \leq i \leq k$), 将自然数 m 输入到系统中, 其中其第 j 个二进制数字存储在神经元 $\sigma_{\text{bit}_{j+1}}$ 中, $0 \leq j \leq k-1$.

(2) 预计算. 用自然数 n 的每一个二进制数字与自然数 m 的所有二进制数字相乘, 这样可以产生 m 和 n 的二进制数字的所有可能乘积.

(3) 求子表达式的和. 从求与 2^0 对应的子表达式的和开始, 每步计算出一个子表达式的和, 并发送到神经元 σ_{Add} 中.

(4) 输出. 在神经元 σ_{Add} 中, 通过把对应于 2^{i+1} 的和与由对应于 2^i 的和产生的进位相加, 计算出在 2^{i+1} 处的二进制数字, 并利用输出神经元把它发送到环境中, $0 \leq i \leq 2k-3$. 在计算开始时, 所产生的进位为 0.

首先, 我们介绍第 1 个阶段: 输入自然数 m . 自然数 m 和 n 按如下方式输入到系统中: 按照从与指数 2^0 对应的二进制数字到与指数 2^{k-1} 对应的二进制数字的顺序, 依次向系统输入这些二进制数字. 令 t 为当前时刻, 且在初始格局时有 $t=0$. 在 $t=1$ 时, 与 2^0 处的二进制数字对应的“脉冲”输入到输入神经元 σ_{Input} (根据此自然数相应二进制数字是 0 还是 1, 输入 0 或 1 个脉冲). 若 m 的第 0 个二进制数字是 1, 则神经元 σ_{Input} 得到 3 个脉冲, 其中一个脉冲从环境接收, 另外两个脉冲从辅助神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,0}}$ 接收. 否则, 神经元 σ_{Input} 只得到 2 个脉冲, 它们是从辅助神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,0}}$ 接收的. 对于第 1 种情形, 神经元 σ_{bit_0} 在下一步将接收到 4 个脉冲, 其中 2 个脉冲通过在神经元 σ_{Input} 中使用规则 $a^3 \rightarrow a^2$ 而得到, 另外 2 个脉冲从辅助神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,1}}$ 接收. 此 4 个脉冲将留在神经元 σ_{bit_0} 中, 这表示自然数 m 在 2^0 处的二进制数字是 1. 对于第 2 种情形, 神经元 σ_{bit_0} 接收到 2 个脉冲, 它们是从神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,1}}$ 接收的. 在下一步将遗忘这 2 个脉冲, 这表示自然数 m 在 2^0 处的二进制数字是 0. 利用这种方式, 自然数 m 在 2^0 处的二进制数字输入到系统中, 其相应“脉冲”放在神经元 σ_{bit_0} 中. 接下来, 开始向系统的神经元 σ_{bit_1} 输入在 2^1 处的二进制数字.

利用上述类似的方法, 通过与辅助神经元 $\sigma_{\text{aux}_{1,2}}$ 相互作用, 根据自然数 m 的相应二进制数字是 1 还是 0, 将向神经元 σ_{bit_1} 放入 4 或 2 个脉冲. 若神经元 σ_{bit_1} 接收到 4 个脉冲, 则这些脉冲将留在此神经元中; 若神经元 σ_{bit_1} 接收到 2 个脉冲, 则在下一

算步骤系统 $\Pi_{Mult_{gen}}(2)$ 的每个神经元所包含的脉冲数目. 输入和输出序列分别用黑体标识出来. 由于在计算的前 4 步输入神经元每步接收 2 个脉冲, 输入脉冲序列 11 在表格中写成脉冲序列 33. 需要强调: 输出的第 1 个有效时刻是 $t=9$.

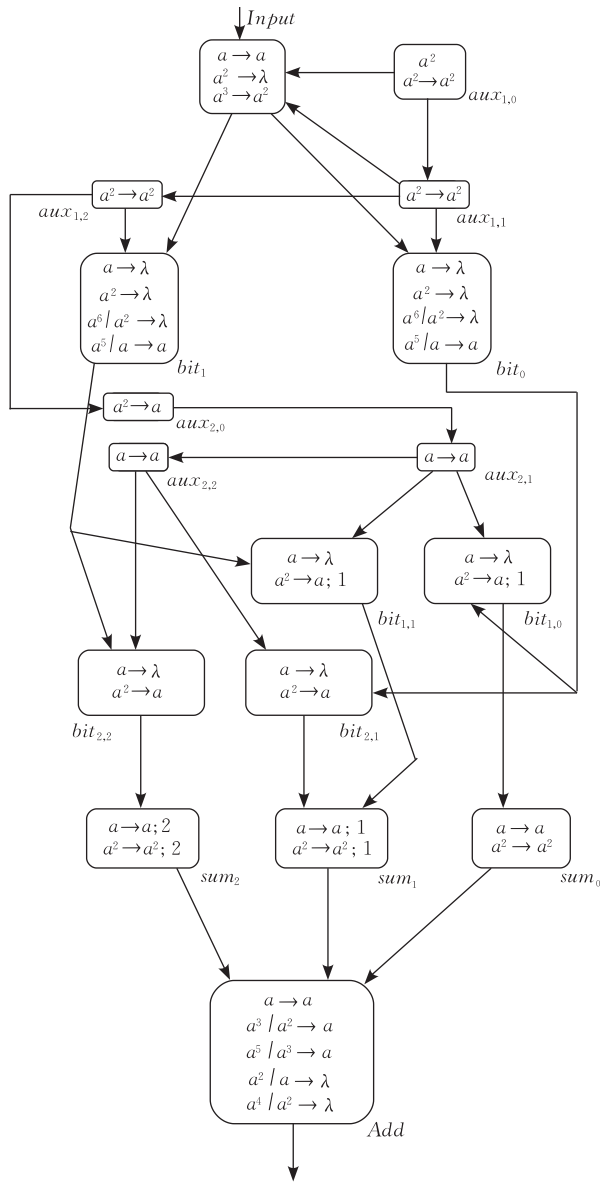


图 4 求乘积 $11_2 \cdot 10_2 = 110_2$ 的脉冲神经膜系统

6 结论与展望

本文研究了如何利用脉冲神经膜系统进行算术运算的问题. 具体地说, 我们构造了一族可以计算任意两个自然数乘积的脉冲神经膜系统, 从而解决了 Miguel A Gutiérrez-Naranjo 和 Alberto Leporati 所提出的一个公开问题^[6]. 本文为实现基于脉冲神经膜系统的 CPU 设计进一步提供了理论基础.

除了需要设计基于脉冲神经膜系统的合理硬件外, 还有许多问题需要继续研究, 使脉冲神经膜系统可以处理所有可能的算术运算. 这里, 我们仅给出两个比较重要的问题: 第一个问题是如何设计脉冲神经膜系统, 使它可以计算两个自然数的除法. 第二个问题是: 当被计算的数是带正号和负号时, 如何设计脉冲神经膜系统来进行算术运算.

参 考 文 献

- [1] Ionescu M, Păun Gh, Yokomori T. Spiking neural P systems. *Fundamenta Informaticae*, 2006, 71(2-3): 279-308
- [2] Chen H M, Freund R, Ionescu M, Păun Gh, Pérez-Jiménez M J. On string languages generated by spiking neural P systems. *Fundamenta Informaticae*, 2007, 75(1): 141-162
- [3] Zhang X Y, Zeng X X, Pan L Q. On language generated by asynchronous spiking neural P systems. *Theoretical Computer Science*, 2009, 410(26): 2478-2488
- [4] Zhang X Y, Zeng X X, Pan L Q. On string language generated by spiking neural P systems with exhaustive use of rules. *Natural Computing*, 2008, 7(4): 535-549
- [5] Leporati A, Zandron C, Ferretti C, Mauri G. Solving numerical NP-complete problems with spiking neural P systems// *Lecture Notes in Computer Science* 4860. Springer, 2007: 336-352
- [6] Gutiérrez-Naranjo M A, Leporati A. Performing arithmetic operations with spiking neural P systems// *Proceedings of the 7th Brainstorming Week on Membrane Computing*, Vol. I, Spain, Sevilla, 2009: 181-199
- [7] Păun Gh. *Membrane Computing. An Introduction*. Berlin: Springer, 2002



ZHANG Xing-Yi, born in 1982, Ph. D. His main research interests include membrane computing, pattern recognition and digital image processing.

ZENG Xiang-Xiang, born in 1984, Ph. D. candidate. His research topic is membrane computing.

PAN Lin-Qiang, born in 1972, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include graph theory and membrane computing.

LUO Bin, born in 1963, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include pattern recognition and digital image processing.

Background

Learning computing ideas from biology was a permanent concern for computer science, but in the last decades this became a real fashion. All the areas inspired by biology form what is now called natural computing. Membrane computing is one of the youngest branches of natural computing. It was initiated by Gh. Păun in 1998 and soon became a “fast emerging research front of computer science”, as Thomson Institute for Scientific Information, ISI, called it—see <http://esitopics.com>. A recent tendency in membrane computing is the study of models which are called spiking neural P systems (SN P systems, for short). They are inspired from the way the neurons cooperate in the brain by exchanging spikes. After the SN P systems were developed, more and more researchers begin to get interested in this topic and there have been published over 50 papers in no more than 3 years.

In this paper, the authors provide an approach to an

open problem formulated by Miguel A. Gutiérrez-Naranjo and Alberto Leporati. Specifically, spiking neural P systems are viewed as components of an Arithmetic Logic Unit and a family of spiking neural P systems was constructed to deal with multiplication of two arbitrary natural numbers. This work can be considered as a further step towards the design of a CPU based on the working of spiking neural P systems. In the past four years, the authors and their research group mainly had paid more attentions on the area of membrane computing, especially, SN P systems. A lot of problems on this topic are solved by this group, and also a lot of ideas are proposed. The group has obtained 7 projects on the area of membrane computing from National Natural Science Foundation of China and other institutes and they have published more than 20 papers.