

三维图像多相分割的变分水平集方法

潘振宽¹⁾ 李 华¹⁾ 魏伟波¹⁾ 郭振波¹⁾ 张春芬²⁾

¹⁾(青岛大学信息工程学院 山东 青岛 266071)

²⁾(江苏大学计算机科学与通信工程学院 江苏 镇江 212013)

摘 要 变分水平集方法是图像分割等领域出现的新的建模方法,借助多个水平集函数可有效地实现图像多相分割.但在区域/相的通用表达、不同区域内图像模型的表达、通用的能量泛函的设计、高维图像分割中的拓展研究等方面仍是图像处理的变分方法、水平集方法、偏微分方程方法等研究的热点问题.文中以三维图像为研究对象,系统地建立了一种新的三维图像多相分割的变分水平集方法.该方法用 $n-1$ 个水平集函数划分 n 个区域,并基于 Heaviside 函数设计出区域划分的通用的特征函数;其能量泛函包括通用的区域模型、边缘检测模型和水平集函数为符号距离函数的约束项 3 部分;最后,针对所得到的曲面演化方程,采用半隐式差分格式进行离散,并对多种类型三维图像进行分割验证了所提出模型的通用性和有效性.

关键词 三维重建;多相图像分割;变分方法;水平集方法;差分方法

中图法分类号 TP391 DOI号: 10.3724/SP.J.1016.2009.02464

A Variational Level Set Method of Multiphase Segmentation for 3D Images

PAN Zhen-Kuan¹⁾ LI Hua¹⁾ WEI Wei-Bo¹⁾ GUO Zhen-Bo¹⁾ ZHANG Chun-Fen²⁾

¹⁾(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071)

²⁾(School of Computer Science and Telecommunications Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013)

Abstract The variational level set method is a new modeling method for image segmentation which has been extended to multiphase segmentation of images successfully. But the generic expressions of region/phase partitioning, image models in every region, energy functional, and their extensions to applications in segmentation of high dimensional images are current research focuses in image processing based on variational method, level set method and methods using PDEs(Partial Differential Equations). The purpose of this paper is to develop a novel variational level set method for 3D image multiphase segmentation. For this goal, a generic characteristic function for region partitioning based on $n-1$ level set functions for n regions and their Heaviside functions is designed, and a generic energy functional includes region-based model, edge-based model and constraint term enforcing the level set functions as signed distance functions are suggested also. The corresponding PDEs of evolution of level set functions are discretized using finite difference method and semi-implicit iterations and used to multiphase segmentation for 3D images finally.

Keywords 3D reconstruction; multiphase segmentation of images; variational method; level set method; finite difference method

收稿日期:2007-10-16;最终修改稿收到日期:2009-10-19. 本课题得到教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0601)资助. 潘振宽,男,1966年生,博士,教授,主要研究领域为多体系统动力学与最优化设计、微分/代数方程数值方法、医学仿真、图像处理等. E-mail: zkpan@qdu.edu.cn. 李 华,男,1979年生,硕士,研究兴趣为图像处理、三维分割与重建、视频跟踪等. 魏伟波,男,1981年生,博士,讲师,主要研究方向为图像处理、目标识别与跟踪等. 郭振波,男,1966年生,博士,高级工程师,主要研究方向为图像处理、GIS、嵌入式系统等. 张春芬,女,1982年生,硕士,主要研究方向为医学图像处理、数据分析.

1 引言

三维重建是计算机视觉的传统内容之一,也是该领域目前研究的热点问题之一.基于三维图像的三维重建/分割在医学诊断、模式识别等方面具有重要应用^[1-3].

水平集方法^[4]对二维和高维问题具有相同的表达形式,能有效地处理变拓扑结构的情形.变分水平集方法^[5]不仅具备上述优点,还能有效地集成多种模型成分,被广泛应用于图像分割、运动跟踪、三维重建等研究^[6-7],并在二维图像多相分割研究方面引起了国际图像处理领域学者的关注.在图像分割研究中,Chan 和 Vese^[8]首先以简化的 Mumford-Shah 模型^[9]和水平集方法为基础,建立了分段常值两相图像分割的变分水平集 C-V 模型;Vese 和 Chan^[10]、Vese^[11]用 N 个水平集函数表达 2^N 个相,将文献^[8]提出的模型推广到分段常值和分段光滑的图像多相分割,该模型能自然地避免多个水平集函数的重叠和漏分问题.

图像多相分割的变分水平集方法涉及多相区域的划分、图像模型的表达、能量泛函的设计及所得到的演化方程的数值计算等问题. Samson、Blanc-Feraud、Aubert^[12]用 n 个水平集函数区分要分割图像的 n 个区域,在假定每个区域符合 Gauss 分布且分布参数已知的情况下,建立了图像多相分割的通用表达式.为了避免水平集函数间的重叠和“真空”现象,该模型中包括了相关约束条件. Lie、Lysaker 和 Tai^[13]用 N 个取值为 1 或 -1 的水平集函数建立了分段常值 2^N 相图像分割的变分水平集模型,该模型亦包含了类似文献^[12]提出的约束条件.在文献^[14]中, Lie 等采用取离散常值的 1 个水平集函数,通过 Lagrange 多项式差值建立区分多个不同区域的基函数,建立了分段常值图像分割的变分水平集模型,该模型亦包含避免水平集函数重叠或漏分的约束条件. Chung 和 Vese^[15]用 1 个连续变化的水平集函数,采用文献^[10]的区域竞争策略,建立了变分形式的分层水平集模型,无需增加约束条件.上述研究的局限之一是目前的多相图像分割的变分水平集模型主要针对分段常值图像.实际上,用不同方式获取的图像符合不同的概率分布,诸如 MRI 图像符合 Gauss 分布, Ultrasound 图像符合 Rayleigh 分布, PET 图像符合 Poisson 分布, SAR 图像符合 Gamma 分布^[16-17].而分段常值图像仅是当标准差为

$\sqrt{1/2}$ 的 Gauss 分布图像.上述研究的局限之二是,模型的本身没有对水平集函数特性的约束,因此,在水平集函数演化过程中,必须不断对水平集函数进行检测,并通过重新初始化使水平集函数符合符号距离函数的属性.局限之三是,区域与水平集函数没有直接的对应关系,不便于对象检测.

近年来,国内众多学者对图像分割的水平集方法的研究和应用给予了关注,如朱付平等^[20]、陈强等^[21]对水平集速度函数的设计、李俊等^[22]对该类模型快速算法的设计、肖亮等^[23]对分段光滑图像多相分割的研究、周则明等^[24]基于三维图像的三维重构的研究等.文献^[23]的区域划分使用了文献^[10]的方法,文献^[24]的研究未考虑多相分割.值得一提的是陈波等^[25]对国际近年在几何水平集研究的主要模型和算法给予了较全面的综述,但未涉及近年图像多相分割的成果.

本文拟面向三维图像多相分割提出一种新的变分水平集模型.该方法用 $n-1$ 个水平集函数划分 n 个区域,并基于 Heaviside 函数设计出区域划分的通用的特征函数,每个水平集函数对应一个前景区域或对象,第 n 个区域为背景;所设计的能量泛函包括通用的区域模型、边缘检测模型和水平集函数为符号距离函数的约束项 3 部分,其中第 1 部分为包含参数的一般图像区域模型,第 2 部分为经典的测地轮廓线模型,第 3 部分为水平集函数为符号距离函数的约束项,以避免水平集函数的重新初始化.最后,针对所得到的曲面演化方程,采用半隐式差分格式进行离散,并对多种类型三维图像进行分割/重建对所提出的模型的通用性和有效性进行验证.

本文第 2 节为基于多水平集函数的区域划分策略与特征函数的确定;第 3 节为参数化区域模型的通用表达;第 4 节为多相分割的变分水平集方法;第 5 节为曲面演化方程的半隐式差分迭代方法;第 6 节为数值算例;最后为结束语.

2 多水平集函数的区域划分

2.1 图像分割的水平集方法基础

设 $u(X):\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ 为一三维数字图像的图像强度,其中, $\mathbf{X}=(x,y,z)^T$, Ω 为图像区域, $\partial\Omega$ 为图像边界.如图 1 所示,通过一个水平集函数的零水平集 $\Gamma(t)$ 曲面将图像划分为互不重叠不同类的两个区域/相 R_1, R_2 , $\Omega=R_1\cup R_2\cup\Gamma(t)$, $R_1\cap R_2=0$, $\Gamma(t)=\partial R_1$.

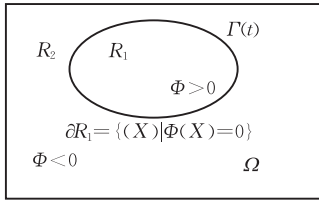


图 1 水平集函数的表示

水平集函数定义为^[6]

$$\begin{cases} \Phi(t, X) > 0, & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 里面} \\ \Phi(t, X) = 0, & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 上面} \\ \Phi(t, X) < 0, & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 外面} \end{cases} \quad (1)$$

通常可将上述函数定义为如下符号距离函数

$$\begin{cases} \Phi(t, X) = d(\Gamma(t), X), & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 里面} \\ \Phi(t, X) = 0, & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 上面} \\ \Phi(t, X) = -d(\Gamma(t), X), & X \text{ 在 } \Gamma(t) \text{ 外面} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $d(\Gamma(t), X)$ 为 X 与 $\Gamma(t)$ 间的 Euclidean 距离. 从而 $\Phi(t, X)$ 满足如下 Eikonal 方程^[13]

$$|\nabla\Phi| = 1 \quad (3)$$

式(3)的唯一粘性解通常为下列初值问题的稳态解^[13]

$$\begin{cases} \Phi_t + \text{sign}(\tilde{\Phi})(|\nabla\Phi| - 1) = 0 \\ \Phi(0, X) = \tilde{\Phi}(X) \end{cases} \quad (4)$$

界面 $\Gamma(t)$ 按照如下非线性 PDE 运动^[13]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla\Phi = 0 \quad (5)$$

速度场 v 依赖于系统的几何位置及物理属性等. 相应的标准水平集方程为^[13]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_N |\nabla\Phi| = 0 \quad (6)$$

其中 v_N 为 v 沿界面的法向分量.

2.2 区域划分的 Heaviside 函数与 Dirac 函数

为了实现区域划分的函数表达, 在经典的变分水平集方法中, 通常引进如下 Heaviside 函数和 Dirac 函数^[8]

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \geq 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (7a)$$

$$\delta(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} H(\alpha) \quad (7b)$$

为改善数值性态, 通常使用如下形式的规整化的 Heaviside 函数和 Dirac 函数^[8]

$$H_{1\epsilon}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > \epsilon \\ 0, & \alpha < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{\epsilon}\right) \right], & |\alpha| \leq \epsilon \end{cases} \quad (8a)$$

$$\delta_{1\epsilon}(\alpha) = \frac{dH_{1\epsilon}(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} 0, & |\alpha| > \epsilon \\ \frac{1}{\pi} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\alpha}{\epsilon}\right) \right], & |\alpha| \leq \epsilon \end{cases} \quad (8b)$$

$$H_{2\epsilon}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right) \right) \quad (9a)$$

$$\delta_{2\epsilon}(\alpha) = \frac{dH_{2\epsilon}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \alpha^2} \quad (9b)$$

其中 ϵ 为小正常数. $H_{1\epsilon}, H_{2\epsilon}, \delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}$ 如图 2 所示. 以下使用该类函数, 但为书写简洁, 仍使用原符号表达.

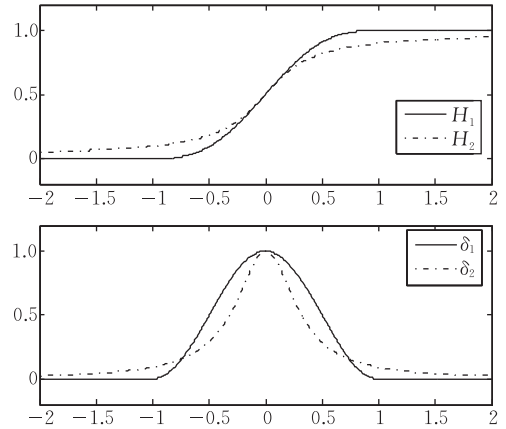


图 2 规整化的 Heaviside 函数与 Dirac 函数

根据 H, δ 的性质, 零水平集的面积及包围的体积由下式计算^[5]

$$\text{Area}(\Phi=0) = \int_{\Omega} |\nabla H| dX = \int_{\Omega} \delta(\Phi) |\nabla\Phi| dX \quad (10)$$

$$\text{Volume}(\Phi \geq 0) = \int_{\Omega} H(\Phi) dX \quad (11)$$

式(10)对应的加权面积

$$\text{WArea}(\Phi=0) = \int_{\Omega} g \delta(\Phi) |\nabla\Phi| dX \quad (12)$$

2.3 多水平集函数的区域划分

一个水平集函数可以将区域唯一地划分为两个部分, 一部分对应 $H(\Phi) = 1$, 另一部分对应 $H(\Phi) = 0$. 但对于由多个水平集函数划分多个区域的情况则较复杂, 当水平集函数冗余时, 需要增加必要的约束条件, 以避免造成重叠和漏分. 对 n 个区域的划分, 如图 3 所示(以 4 个区域为例), 可定义 $n-1$

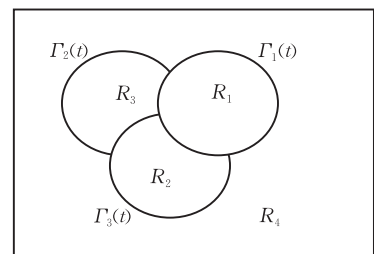


图 3 用 3 个水平集函数划分 4 个区域

个水平集函数,每个水平集函数表达一个区域.为避免造成重叠和漏分,对每个区域,定义如下特征函数:

$$\begin{aligned} R_1: \chi_1 &= [1-H(\Phi_0)]H(\Phi_1), H(\Phi_0) \equiv 0, \\ R_2: \chi_2 &= [1-H(\Phi_0)][1-H(\Phi_1)]H(\Phi_2), \\ &\vdots \\ R_i: \chi_i &= \prod_{j=0}^{i-1} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_i), \\ &\vdots \\ R_n: \chi_n &= \prod_{j=0}^{n-1} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_n), H(\Phi_n) \equiv 1 \end{aligned} \quad (13)$$

从而有

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R_i \\ 0, & (x, y) \notin R_i \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_i}{\partial \Phi_l} &= \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} [1-H(\Phi_j)]\delta(\Phi_l), & l=i \\ -\prod_{j=0, l \neq i}^{i-1} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_i)\delta(\Phi_l), & l \neq i \end{cases} \\ &= \Psi_{i,l}(\Phi)\delta(\Phi_l) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Psi_{i,l}(\Phi) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} [1-H(\Phi_j)], & l=i \\ -\prod_{j=0, l \neq i}^{i-1} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_i), & l \neq i \end{cases} \quad (16)$$

要确保每个像素点仅落在唯一一个区域,上述

特征函数必须满足 $\sum_{i=1}^n \chi_i = 1$. 以下简要证明上述方案满足该条件

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \chi_i &= [1-H(\Phi_0)]H(\Phi_1) + \\ & [1-H(\Phi_0)][1-H(\Phi_1)]H(\Phi_2) + \cdots + \\ & \prod_{j=0}^{n-2} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_{n-1}) + \\ & \prod_{j=0}^{n-1} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_n) \\ &= [1-H(\Phi_0)]H(\Phi_1) + \\ & [1-H(\Phi_0)][1-H(\Phi_1)]H(\Phi_2) + \cdots + \\ & \prod_{j=0}^{n-2} [1-H(\Phi_j)]H(\Phi_{n-1}) + \\ & \prod_{j=0}^{n-1} [1-H(\Phi_j)][1-H(\Phi_{n-1})] \\ &= [1-H(\Phi_0)]H(\Phi_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [1-H(\Phi_0)][1-H(\Phi_1)]H(\Phi_2) + \cdots + \\ & \prod_{j=0}^{n-2} [1-H(\Phi_j)] \\ &= \cdots \\ &= [1-H(\Phi_0)]H(\Phi_1) + [1-H(\Phi_0)][1-H(\Phi_1)] \\ &= [1-H(\Phi_0)] = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

3 图像区域模型参数化通用表达

Paragios^[19]提出的图像分割的测地主动区域模型(Geodesic Active Regions)包括经典的测地轮廓线模型(Geodesic Active Contours)和基于概率分布的区域模型两部分,后者基于最大后验概率 $p(\Gamma|u)$ 估计图像区域模型参数.基于 Bayes 公式,该后验概率可表达为

$$p(\Gamma|u) = \frac{p(u|\Gamma)}{p(u)} p(\Gamma) \quad (18)$$

最大后验概率估计的含义是计算给定图像的情况下估计其最大分割 Γ . 对于给定的图像 u , $p(u)$ 是常值,从而可将对应极值问题转化为

$$p(\Gamma|u) \propto p(u|\Gamma) p(\Gamma) \quad (19)$$

并可进一步将其转化为如下极小值问题

$$-\log p(\Gamma|u) = -\log p(u|\Gamma) - \log p(\Gamma) \quad (20)$$

其右端第 1 部分表示在给定分割情况下的图像像素点的概率分布,第 2 项可看作分割线或面的拓扑面积.如 $p(\Gamma) = \exp(-\gamma \text{Area}(\Gamma))$ 或 $p(\Gamma) = \exp(-\gamma W \text{Area}(\Gamma))$.

假设被分割的图像区域不相关,则 $p(u|\Gamma)$ 可表达为

$$p(u|\Gamma) = \prod_{i=1}^n p_i(u|\Gamma_i) \quad (21)$$

其中, $p_i(u|\Gamma_i)$ 为 Ω_i 中像素点的概率分布.当假设各个区域中的像素相互独立时,该分布可写为

$$p(u|\Gamma_i) = \prod_{s \in \Omega_i} p_i(u(s)) \quad (22)$$

从而式(21)可写为

$$p(u|\Gamma) = \prod_{i=1}^n \prod_{s \in \Omega_i} p_i(u(s)) \quad (23)$$

这样,上述最大后验概率估计问题即可转化为如下基于下列泛函的最小参数估计问题

$$\tilde{E}(\Gamma|u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \alpha_i Q_i \, dx dy + \sum_{i=1}^n \gamma_i g |\Gamma_i| \quad (24)$$

其中,

$$Q_i = -\log P_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (25)$$

对于参数化的图像区域模型, $Q_i = Q_i(u, \theta_i)$, 其中, θ_i

为第 i 个区域模型的参数.

4 图像多相分割的变分水平集方法

4.1 曲面演化方程

为表达方便,以下将用 $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}\}$ 表示用于划分 n 个区域的 $n-1$ 个水平集函数的集合, $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ 表示 n 个区域的特征函数的集合, $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 表示要估计 n 个区域的参数集合, $\theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ik}\}$ 表示第 i 个区域的参数子集, $Q_i = Q_i(u(X), \theta_i)$ 表示第 i 个区域的图像参数估计模型.

图像多相分割变分水平集方法首先要定义用水平集函数表达的能量泛函,然后通过变分方法得到水平集函数的演化方程,当水平集函数停止演化时,其零水平集对应点的集合即为所要求的轮廓线或面.能量泛函的定义是该类方法建模的基础,能量泛函中可包括基于边缘、区域、先验形状、颜色、运动场等方面的相关能量项,故便于建立基于多种信息的集成化模型.本文研究的目标是建立基于边缘和区域信息的三维图像多项分割的变分水平集模型,故定义如下形式的能量泛函

$$E(u, \theta, \Phi) = E_R(u, \theta, \Phi) + E_A(\Phi) + E_E(u, \Phi) + E_C(\Phi) \quad (26)$$

其中,

$$E_R(u, \theta, \Phi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} Q_i \chi_i \, dX \quad (27)$$

为基于区域模型能量, Q_i 的定义见式(25),其中包含分割过程中要估计的各个区域的参数,当图像噪声符合 Gauss 分布时,相应参数为均值和标准差.

$$E_A(\Phi) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_{\Omega} \chi_i \, dX \quad (28)$$

为体积最小约束项,该项为水平集函数演化方程提供常值演化速度.

$$E_E(u, \Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \int_{\Omega} g(u) |\nabla \chi_i| \, dX \quad (29)$$

为基于边缘的模型, $g(u)$ 为通常的边缘检测函数.

$$E_C(\Phi) = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Omega} (|\nabla \Phi_i| - 1)^2 \, dX \quad (30)$$

为水平集函数保持为符号距离函数的约束项.该项源于(3),由于水平集函数作为符号距离函数仅在水平集函数初始化时有定义,而在水平集函数的演化方程中未体现该约束,从而使得用符号距离函数定义的水平集函数的属性(3)不再满足.通常的做法是在水平集函数演化过程中求解(4)以使

水平集函数重新满足(3),以确保我们感兴趣的零水平集附近水平集函数的变化不至过于平坦或陡峭,提高界面确定的精度.为避免水平集函数的反复校正,将其符号距离函数的属性(3)设计成能量泛函的一部分(30),以使得能量泛函取得极小值时属性(3)自动满足.

由通常的变分方法和梯度降方法,可得到能量泛函(26)取极小值的水平集函数的演化方程

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= \delta(\Phi_i) \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \nabla \cdot \left(g \frac{\nabla \chi_i}{|\nabla \chi_i|} \right) \Psi_{i,i}(\Phi) - \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i \Psi_{i,i}(\Phi) - \sum_{i=1}^n \beta_i \Psi_{i,i}(\Phi) \right\} + \\ &\quad \mu \left[\Delta \Phi_i - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|} \right) \right], \quad \text{在 } (0, \infty) \times \Omega \text{ 内} \\ \left[\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i g \frac{\partial \Phi_i}{|\nabla \chi_i|} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} \right] + \mu \left(1 - \frac{1}{|\nabla \Phi_i|} \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} &= 0, \quad \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \\ \Phi_i(0, X) &= \Phi_{i_0}(X), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{aligned} \right. \quad (31)$$

为简化计算,参照文献[8,10]的分析,本文将体积最小约束及基于边缘的部分简化为

$$E_A(\Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \int_{\Omega} H(\Phi_i) \, dX \quad (32)$$

$$E_E(u, \Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \int_{\Omega} g(u) \delta(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| \, dX \quad (33)$$

得到相应的曲面演化方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= \delta(\Phi_i) \left\{ \gamma_i \nabla \cdot \left(g \frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i \Psi_{i,i}(\Phi) - \beta_i \right\} + \mu \left[\Delta \Phi_i - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi_i}{|\nabla \Phi_i|} \right) \right], \\ &\quad \text{在 } (0, \infty) \times \Omega \text{ 内} \\ \left[\frac{\gamma_i g \delta(\Phi_i)}{|\nabla \Phi_i|} + \mu \left(1 - \frac{1}{|\nabla \Phi_i|} \right) \right] \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} &= 0, \quad \text{在 } \partial \Omega \text{ 上} \\ \Phi_i(0, X) &= \Phi_{i_0}(X), \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{aligned} \right. \quad (34)$$

4.2 基于区域模型的参数估计

当图像的区域模型为参数模型时,水平集函数的演化和区域模型的参数估计构成一个交替迭代的过程.

当图像噪声符合 Gauss 分布时,

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(u-u_i)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (35)$$

$$Q_i = \ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma_i + \frac{(u-u_i)^2}{2\sigma_i^2} \triangleq \ln \sigma_i + \frac{(u-u_i)^2}{2\sigma_i^2} \quad (36)$$

$$u_i = \frac{\int_{\Omega} u \chi_i dX}{\int_{\Omega} \chi_i dX}, \sigma_i^2 = \frac{\int_{\Omega} (u-u_i)^2 \chi_i dX}{\int_{\Omega} \chi_i dX} \quad (37)$$

当图像噪声符合 Rayleigh 分布时,

$$P_i = \frac{u}{\sigma_i^2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}} \quad (38)$$

$$Q_i = 2\ln\sigma_i - \ln u + \frac{u^2}{2\sigma_i^2} \quad (39)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\int_{\Omega} u^2 \chi_i dX}{2 \int_{\Omega} \chi_i dX} \quad (40)$$

当图像噪声符合 Gamma 分布时,

$$P_i = \frac{1}{u} \left(\frac{Lu}{\sigma_i} \right)^L \frac{e^{-\frac{Lu}{\sigma_i}}}{\Gamma(L)} \quad (41)$$

$$Q_i = \ln u - L \ln \left(\frac{Lu}{\sigma_i} \right) + \ln \Gamma(L) + \frac{Lu}{\sigma_i}$$

$$\triangle \ln u - L \ln Lu + L \ln \sigma_i + \frac{Lu}{\sigma_i} \quad (42)$$

$$\sigma_i = \frac{\int_{\Omega} u \chi_i dX}{\int_{\Omega} \chi_i dX} \quad (43)$$

5 演化方程的半隐式差分迭代格式

为简化表达,本部分将式(34)写为如下简洁的表达形式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta(\Phi) \left[\gamma \nabla \cdot \left(g \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) + Q \right] + \mu \left[\Delta \Phi - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) \right] \quad (44)$$

以下参照 Chan 和 Vese^[8]构造式(44)的半隐式差分格式,设 h 为空间步长, Δt 为时间步长,则图像空间中 (i, j, k) 点的离散坐标为 $(x_i, y_j, z_k) = (ih, jh, kh)$, $0 \leq i, j, k \leq M$, 在迭代过程中,水平集函数在 (x_i, y_j, z_k) 点第 n 步的近似值为 $\Phi_{i,j,k}^n = \Phi(n\Delta t, x_i, y_j, z_k)$. 其中, $t = n\Delta t$. 初始时, $\Phi^0 = \Phi_0$. 以下为水平集函数沿不同方向的向后差分、向前差分及中心差分:

$$\Delta^x \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i-1,j,k}}{h}, \Delta_+^x \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i,j,k}}{h},$$

$$\Delta_+^y \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j+1,k} - \Phi_{i,j,k}}{h}, \Delta_-^y \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j-1,k}}{h},$$

$$\Delta^z \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k-1}}{h}, \Delta_+^z \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j,k+1} - \Phi_{i,j,k}}{h},$$

$$\Delta_0^x \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i-1,j,k}}{2h}, \Delta_0^y \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j+1,k} - \Phi_{i,j-1,k}}{2h},$$

$$\Delta_0^z \Phi_{i,j,k} = \frac{\Phi_{i,j,k+1} - \Phi_{i,j,k-1}}{2h} \quad (45)$$

则式(44)可离散为

$$\frac{\Phi_{i,j,k}^{n+1} - \Phi_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \delta(\Phi_{i,j,k}^n) \cdot$$

$$\left[\gamma \Delta^x \frac{g_{i,j,k}^n \Delta_+^x \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} + \gamma \Delta^y \frac{g_{i,j,k}^n \Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} + \gamma \Delta^z \frac{g_{i,j,k}^n \Delta_+^z \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} + Q_{i,j,k}^n \right] + \mu \left[\Delta^x \frac{\Delta_+^x \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} + \Delta^y \frac{\Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} + \Delta^z \frac{\Delta_+^z \Phi_{i,j,k}^n}{\sqrt{(\Delta_+^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}} \right] \quad (46)$$

令

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c_4 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^x \Phi_{i,j-1,k}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j-1,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j-1,k}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c_5 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^y \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k}^n)^2 + (\Delta_0^z \Phi_{i,j,k}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c_6 = \frac{1}{\sqrt{(\Delta_+^z \Phi_{i,j,k-1}^n)^2 + (\Delta_0^x \Phi_{i,j,k-1}^n)^2 + (\Delta_0^y \Phi_{i,j,k-1}^n)^2 + \zeta^2}},$$

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6,$$

$$\bar{c} = c_1 g_{i,j,k}^n + c_2 g_{i-1,j,k}^n + c_3 g_{i,j,k}^n + c_4 g_{i,j-1,k}^n + c_5 g_{i,j,k}^n + c_6 g_{i,j,k-1}^n \quad (47)$$

$$D = \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma \bar{c} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + 4\mu - c\mu],$$

$$D_1 = \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_1 g_{i,j,k} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_1 \mu],$$

$$D_2 = \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_2 g_{i-1,j,k} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_2 \mu],$$

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_3 g_{i,j,k} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_3 \mu], \\
 D_4 &= \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_4 g_{i,j-1,k} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_4 \mu], \\
 D_5 &= \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_5 g_{i,j,k} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_5 \mu], \\
 D_6 &= \frac{\Delta t}{h^2} [\gamma c_6 g_{i,j,k-1} \delta(\Phi_{i,j,k}^n) + \mu - c_6 \mu] \quad (48)
 \end{aligned}$$

按照与文献[8]类似的方法得到式(44)如下的半隐式迭代格式

$$\begin{aligned}
 \Phi_{i,j,k}^{n+1} &= ([\Phi_{i,j,k}^n + D_1 \Phi_{i+1,j,k}^n + D_2 \Phi_{i-1,j,k}^n + \\
 &D_3 \Phi_{i,j+1,k}^n + D_4 \Phi_{i,j-1,k}^n + D_5 \Phi_{i,j+1,k}^n + \\
 &D_6 \Phi_{i,j,k-1}^n + \Delta t Q_{i,j,k}^n \delta(\Phi_{i,j,k}^n)]) / ([1 + D]) \quad (49)
 \end{aligned}$$

6 数值实验

本节对所提出的模型及离散迭代格式进行数值验证. 三维图像类型包括人体切片数据、真实三维CT数据和人造三维图像数据, 分割区域包括两相、三相、四相情形, 图像模型包括分段常值、Gauss分布、Rayleigh分布. 在下述计算中, 时间步长 $\Delta t = 0.2$, 体积约束项系数 $\beta_i = 0$, 符号距离函数约束项系数 $\mu = 0.003$, 采用式(9a)与式(9b)规整化的 $H_{2\epsilon}$ 与

$\delta_{2\epsilon}$ 函数, 取小常量 $\epsilon = 1$.

6.1 三维图像两相分割与重建

三维图像两相分割的对象取自美国国家图书馆虚拟人体的腿部70幅图像, 每幅图像规格为 121×141 , 从而要分割的对象为 $121 \times 141 \times 70$ 的三维图像. 如图4为要分割的图像的第1层、36层和70层图像. 由于实验中我们将原彩色图像变为灰度图像, 从图像本身特征仅将白色的脂肪、骨骼与黑色的肌肉组织分割开来. 该例实验采用 Gauss 分布的区域参数估计模型(35), 仅用一个水平集分割其中的骨骼、脂肪与肌肉组织. 水平集函数初始化为

$$\Phi(x, y, z) = r - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

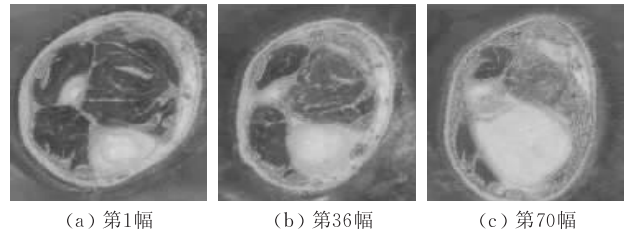


图4 虚拟人体切片图像序列

在计算中, 本例取空间步长 $h = 1$, 相关项系数 $\alpha_i = 10^5$, $\gamma_i = 0.01 \times 255^2$, $g = 1$. 如图5所示是其分割与重建的过程.

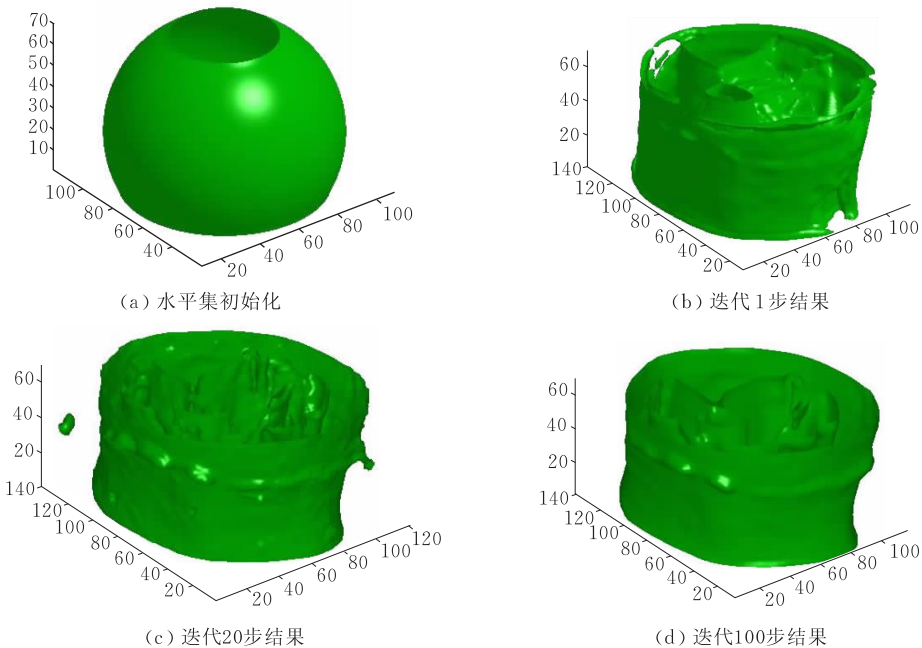


图5 单水平集的三维分割演化与三维模型的重建过程

6.2 三维图像的三相分割与重建

该例为用本文的通用模型实现三维三相分割.

实验数据来源同上例, 但仅保留了下颌骨和牙齿部分, 图像规格为大小为 191×151 , 共取 105 层, 从而

构成 $191 \times 151 \times 105$ 的三维图像,图 6 为其中第 30、60、86 幅图像.用两个水平集函数分割下颌骨和牙齿及周围组织,两个水平集函数的初始化方法同上例,但参数估计采用分段常值区域模型.

本例使用空间步长 $h=1$,各项系数分别为 $\alpha_i=10$, $\gamma_i=0.01 \times 255^2$,而 $g=1$.图 7 为其三维分割与重建的过程.



(a) 第30幅 (b) 第60幅 (c) 第86幅

图 6 下颌骨与牙齿的图像序列

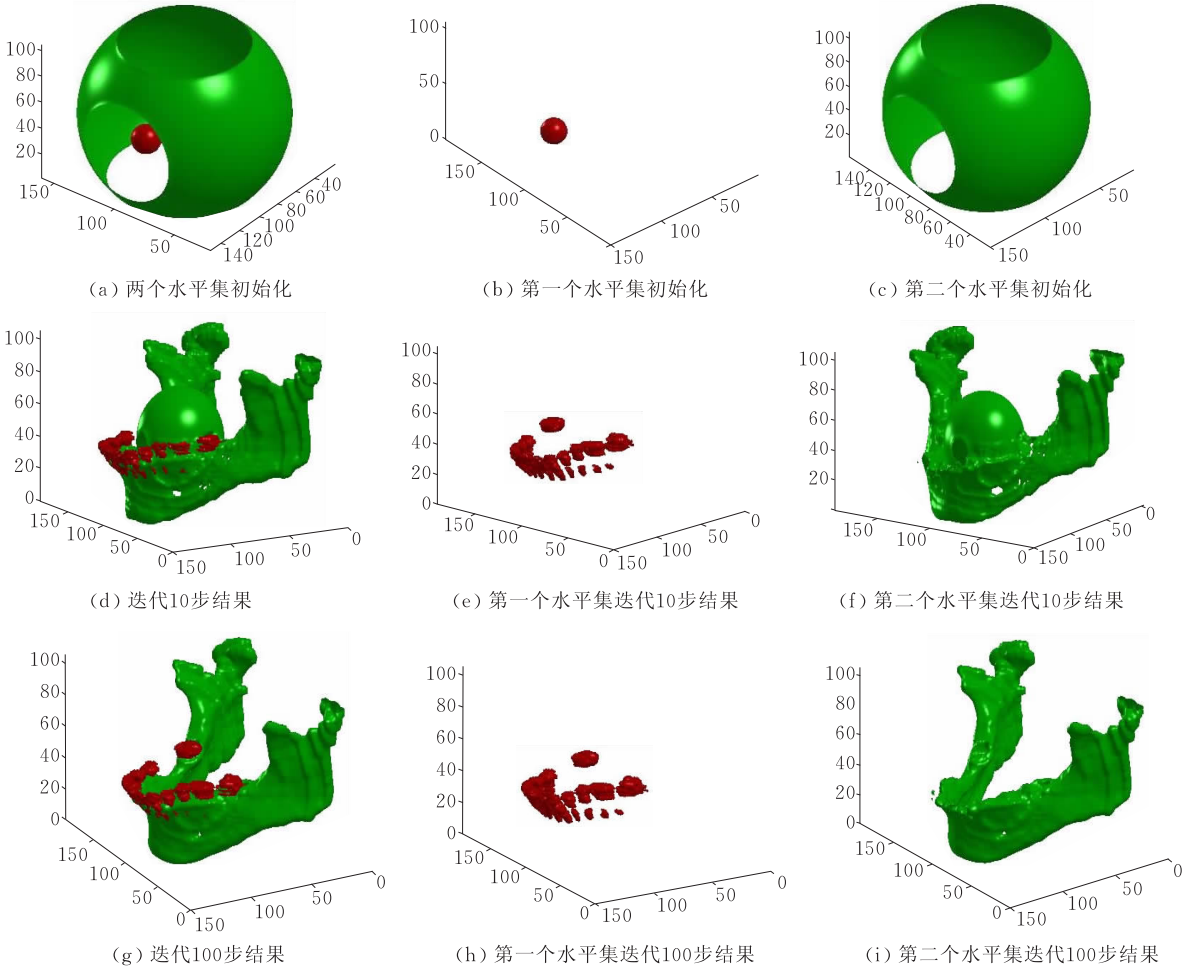
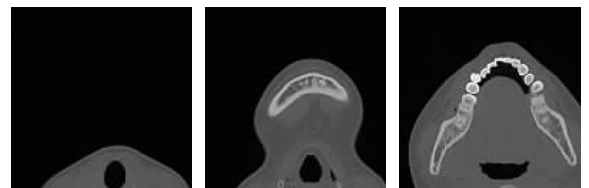


图 7 下颌骨与牙齿三维图像三相分割后建立三维面模型

通过两个水平集分割后的结果是下颌骨与牙齿的三维立体图.从图 7(h) 可以看到几颗牙齿有缺损,是因为原始的图像序列中对应的牙齿部位有几帧有缺损,说明该方法建立的三维模型是严格按照二维序列断层图像信息进行三维分割与重建的,真实的反映了所采集的序列断层图像信息.以下对真实的人体下颌三维 CT 的医学图像分割与重建,图像大小为 $128 \times 128 \times 99$,图 8 是其中典型的 3 幅.

使用分段常值模型对其进行三维分割与重建,取空间步长 $h=1$,相关项系数 $\alpha_i=10$, $\gamma_i=0.01 \times$

255^2 ,而 $g=1$.如图 9 所示是其三维分割与重建的过程与分割后下颌骨和牙齿等骨质部分与肌肉组织的三维图.



(a) 第1幅 (b) 第36幅 (c) 第96幅

图 8 真实的医学三维 CT 图像

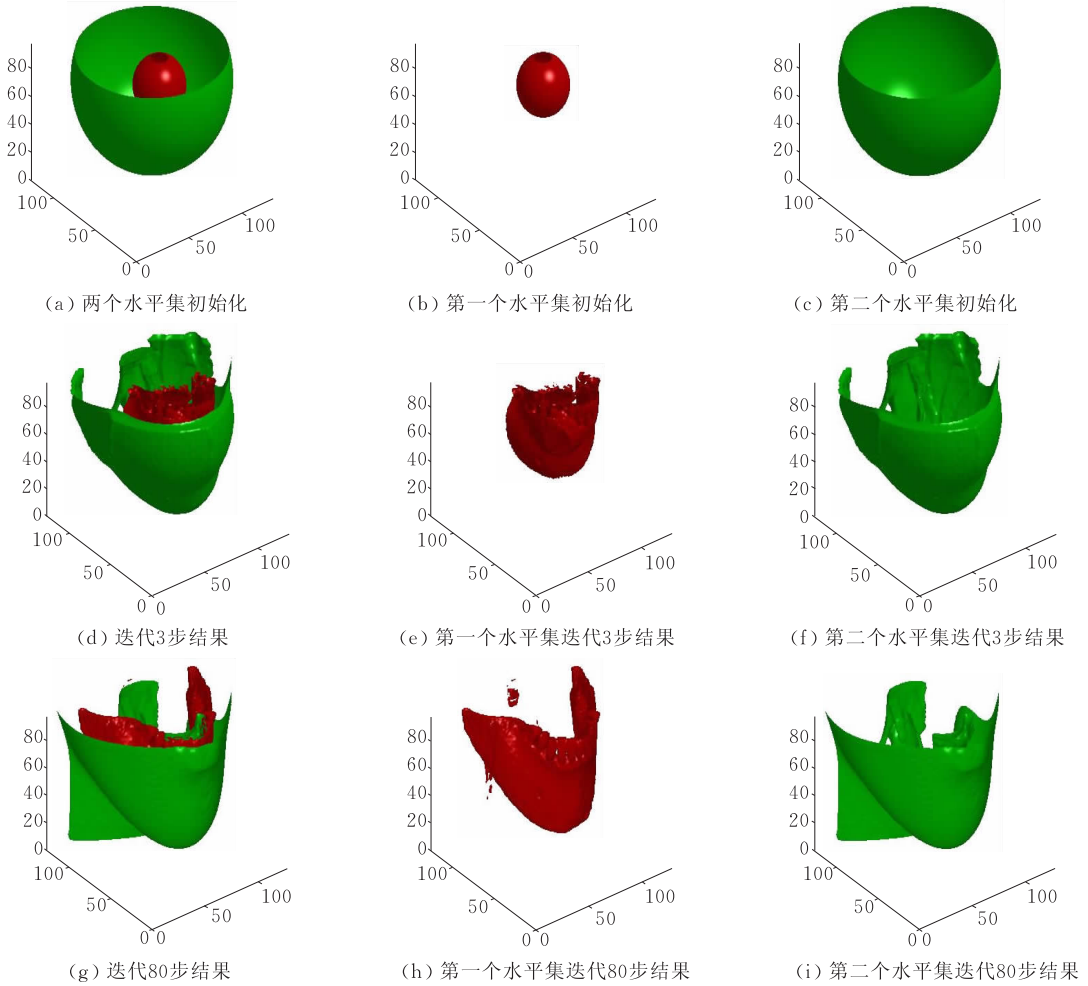


图 9 真实的医学图像序列的三维分割与三维重建的过程

6.3 三维图像的四相分割与重建

本实例分割的对象为 $90 \times 90 \times 100$ 的 4 相人造三维图像, 主要目的是对 Rayleigh 模型进行测试. 图 10 是该三维图像中的第 1、100、4、96 层. 使用 3 个水平集函数如图 11(a)~(d).

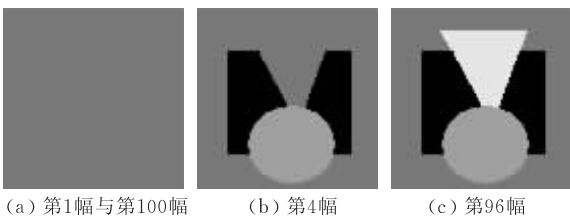


图 10 人工图像序列

取空间步长 $h = 1$, 相关系数 $\alpha_i = 10^5$, $\gamma_i = 0.01 \times 255^2$, $g = 1$. 图 11(e)~(l) 所示是其三维分割与重建过程, 最终分割出三维图像中用不同颜色表示的 3 个对象.

分割后的结果是根据各个灰度区域部分建立的三维立体图, 在原始图像序列中设置了几张断层图片, 分割后的结果真实地反映了断层信息.

7 总结与展望

本文面向三维图像多相分割提出了一种新的变分水平集模型, 该模型可直接应用于二维图像多相分割. 该方法用 $n-1$ 个水平集函数划分 n 个区域, 并基于 Heaviside 函数设计出区域划分的通用的特征函数, 每个水平集函数对应一个前景区域或对象, 第 n 个区域为背景, 本文还简要严格证明了所提出的区域划分能避免重叠和漏分. 本文所设计的能量泛函包括通用的区域模型、边缘检测模型、水平集函数为符号距离函数的约束项 3 部分, 其中第 1 部分为包含参数的一般图像区域模型, 第 2 部分为经典的测地轮廓面模型, 第 3 部分为水平集函数为符号距离函数的约束项, 以避免水平集函数的重新初始化. 其中的区域模型采用基于参数化概率分布的通用形式, 可实例化为不同概率分布的图像. 最后, 针对所得到的曲面演化方程, 采用半隐式差分格式进行离散, 并对多种类型三维图像进行分割/重建对所

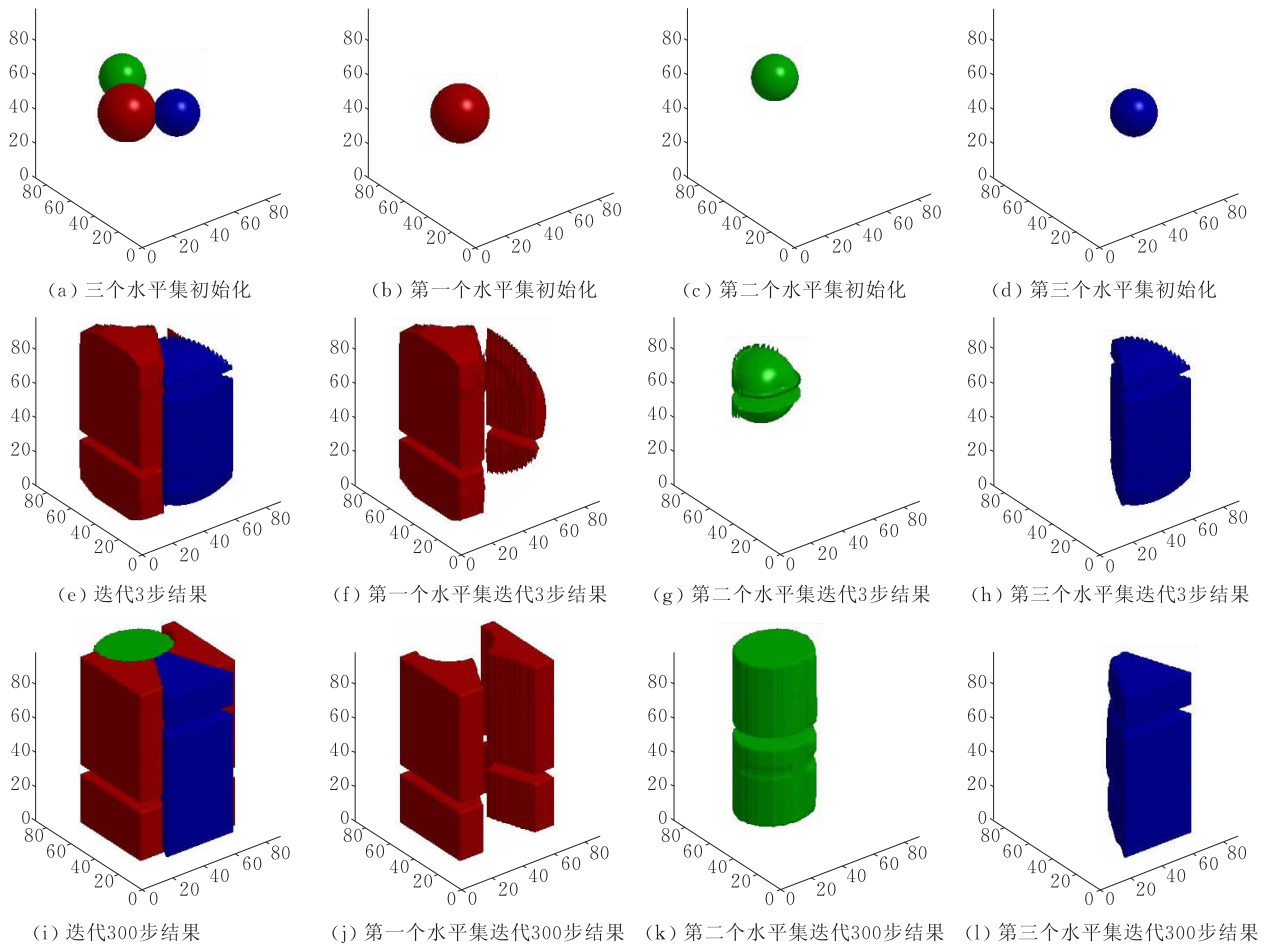


图 11 四相图像序列的三维分割与三维模型重建过程

提出的模型的通用性和有效性进行验证。

本文后续工作拟将上述以分段常值假设拓展到分段光滑图像的分割,并发挥变分水平集方法的优势,进一步研究包括纹理信息、先验形状信息、运动信息在多相分割的变分水平集模型。

参 考 文 献

- [1] Morigi S, Sgallari F. 3D long bone reconstruction based on level sets. *Computerized Medical, Imaging and Graphics*, 2004, 28(7): 377-390
- [2] Drapaca C S, Cardenas V, Studholme C. Segmentation of tissue boundary evolution from brain MR image sequences using multi-phase level sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 2005, 100(3): 312-329
- [3] Sekkati H, Mitiche A. Joint optical flow estimation, segmentation, and 3D interpretation with level sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 2006, 103(2): 89-100
- [4] Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed; Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49
- [5] Zhao H K, Chan T, Merriman B, Osher S. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 1996, 127(1): 179-195
- [6] Osher S, Paragios N. *Geometric Level set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. New York: Springer-Verlag, 2003
- [7] Cremers D, Rousson M, Deriche R. A review of statistical approaches to level set segmentation: Integrating color, texture, motion and shape. *International Journal of Computer Vision*, 2007, 72(2): 195-215
- [8] Chan T, Vese L. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 266-277
- [9] Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, 42(5): 577-685
- [10] Vese L, Chan T. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *International Journal of Computer Vision*, 2002, 50(3): 271-293
- [11] Vese L. Multiphase object detection and image segmentation//*Proceedings of the Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. New York: Springer, 2003: 175-194

- [12] Samson C, Blanc-Feraud L, Aubert G, Zerubia J. A level set model for image classification. *International Journal of Computer Vision*, 2000, 40(3): 187-197
- [13] Lie J, Lysaker M, Tai X-C. A binary level set model and some applications to Mumford-Shah image segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(5): 1171-1181
- [14] Lie J, Lysaker M, Tai X-C. A variant of the level set method and applications to image segmentation. *Mathematics of Computation*, 2006, 75(255): 1155-1174
- [15] Chung G, Vese L A. Energy minimization based segmentation and denoising using a multilayer level set approach. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, 3757: 439-455
- [16] Chesnaud C, Refregier P, Boulet V. Statistical region snake-based segmentation adapted to different physical noise models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(11): 1145-1157
- [17] Zhu S, Yuille A L. Region competition: Unifying snakes, region growing, energy/Bayes/MDL for multi-band image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, 18(9): 884-900
- [18] Mansouri A R, Mitiche A, Vazquez C. Multiregion competition: A level set extension of region competition to multiple region image partitioning. *Computer Vision and Image Understanding* 101, 2006, (3): 137-150
- [19] Paragios N K. Geodesic active regions and level set methods: Contributions and applications in artificial vision [Ph. D. dissertation]. University of Nice Sophia Antipolis, Nice, 2000
- [20] Zhu Fu-Ping, Tian Jie, Lin Yao et al. Medical image segmentation based on Level Set method. *Journal of Software*, 2002, 13(9): 1866-1872 (in Chinese)
- (朱付平, 田捷, 林瑶等. 基于 Level Set 方法的医学图像分割. *软件学报*, 2002, 13(9): 1866-1872)
- [21] Chen Qiang, Zhou Ze-Ming, Qu Ying-Ge et al. Auto segmentation of the left ventricle MR images. *Chinese Journal of Computers*, 2005, 28(6): 991-999 (in Chinese)
- (陈强, 周则明, 屈颖歌等. 左心室核磁共振的自动分割. *计算机学报*, 2005, 28(6): 991-999)
- [22] Li Jun, Yang Xin, Shi Peng-Fei. A fast level set approach to image segmentation based on Mumford-Shah model. *Chinese Journal of Computers*, 2002, 25(11): 1175-1183 (in Chinese)
- (李俊, 杨新, 施鹏飞. 基于 Mumford-Shah 模型的快速水平集分割方法. *计算机学报*, 2002, 25(11): 1175-1183)
- [23] Xiao Liang, Wu Hui-Zhong, Wei Zhi-Hui et al. A new level set method of piecewise smooth Mumford-Shah model for image segmentation. *Journal of Computer Research and Development*, 2004, 41(1): 129-135 (in Chinese)
- (肖亮, 吴慧中, 韦志辉等. 图像分割中分段光滑 Mumford-Shah 模型的水平集算法. *计算机研究与发展*, 2004, 41(1): 129-135)
- [24] Zhou Ze-Ming, Wang Yuan-Quan, Wang Ping-An et al. 3D left ventricle surface reconstruction based on level sets. *Journal of Computer Research and Development*, 2005, 42(7): 1173-1178 (in Chinese)
- (周则明, 王元全, 王平安等. 基于水平集的 3D 左心室表面重建. *计算机研究与发展*, 2005, 42(7): 1173-1178)
- [25] Chen Bo, Lai Jian-Huang. Active contour models on image segmentation: A survey. *Journal of Image and Graphics*, 2007, 12(1): 11-20 (in Chinese)
- (陈波, 赖剑煌. 用于图像分割的活动轮廓模型综述. *中国图象图形学报*, 2007, 12(1): 11-20)



PAN Zhen-Kuan, born in 1966, Ph. D., professor. His research interests include dynamics and optimization of multibody systems, numerical analysis of differential/algebraic equations, medical simulation and image processing.

LI Hua, born in 1979, M. S.. His research interests include image processing, video tracking, 3D segmentation and

3D reconstruction.

WEI Wei-Bo, born in 1981, Ph. D., lecturer. His research interests include image processing, automatic target recognition and tracking.

GUO Zhen-Bo, born in 1966, Ph. D., advanced engineer. His research interests include image processing, GIS, embedded system.

ZHANG Chun-Fen, born in 1982, M. S.. Her research interests include medical image processing and data analysis.

Background

The problem of multiphase image segmentation and 3D reconstruction of multiple objects in image processing and computer vision is very difficult which has been received considerable attention recent years. The 3D reconstruction of multiple organs based on 3D CT images is a part of the project of "Computational Models for Surgical Simulation" which is supported by the Program for New Century Excellent Talents in Universities of China. The purpose of this project is to develop a comprehensive simulation environment for surgi-

cal training, which include 3D reconstruction of organs, deformation computing due to interactive forces, collision detection, feedback force computation, visualization and so on. This paper focuses on developing a generic model for 3D reconstruction based on 3D images using variational level set method and a generic characteristic function formulation with strong region competition is proposed. The project has been studied 3 years in the research group, and over 20 papers on these topics have been published.