第 32 卷 第 12 期
2009 年 12 月
计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS
Vol. 32 No. 12
Dec. 2009

网络演算的矩阵解释

樊葆华 窦 强 张鹤颖
(国防科学技术大学计算机学院 长沙 410073)

摘 要 网络演算是离散事件动态系统理论在计算机网络中的应用,网络演算通过到达曲线和服务曲线计算网络的性能参数,这两个概念封装了复杂的理论背景,从而易于在实际中应用,但对到达曲线和服务曲线概念的理论研究比较缺乏.文中采用幂等矩阵的角度描述到达曲线和服务曲线,演算的过程成为矩阵运算,通过结合矩阵双子理论和余理论的研究结果,得出了由矩阵表演算的基本定理.研究表明,幂等矩阵理论为网络演算提供了很好的理论解释.文中还提出一种基于变换矩阵的方法求某些网络元素的服务曲线.

关键词 离散事件动态系统;网络演算;到达矩阵;服务矩阵;幂等矩阵;余理论
中图法分类号 TP323 **DOI 号**:10.3724/SP.J.1016.2009.02411

A Matrix Interpretation of Network Calculus

FAN Bao-Hua DOU Qiang ZHANG He-Ying
(*School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha* 410073)

Abstract Network calculus is the application of Discrete Event Dynamic System theory in computer networks. Network calculus uses arrival curve and service curve to calculate performance parameters. The definition of arrival curve and service curve encapsulates complex theoretical background, so it is more compatible in practice. Unfortunately there is a lack of theoretical study on arrival and service curve. The authors regard arrival curve and service curve as idempotent matrices, and the calculation process can be represented by matrix operations. By corresponding results in idempotent matrix theory and residuation theory, the basic theorem of matrix network calculus is obtained. This research proves that idempotent matrix theory give network calculus a good theoretic interpretation.

Keywords discrete event dynamic system; network calculus; arrival matrix; service matrix; idempotent matrix; residuation theory

1 引 言

离散事件动态系统 DEDS(Discrete Event Dynamic System)理论可以应用于计算机网络建模分析,这一领域有两个研究方向:一是直接将 DEDS 理论应用于计算机网络,如文献[1,2],这一方向偏重理论分析,对系统的稳定性、因果性以及周期性等性质有较为深入的研究;另一个方向是针对计算机网络的特点对 DEDS 理论进行简化,采用到达曲线和服务曲线等概念对网络进行分析,降低了计算和分析复杂度,增强了理论的实用性,这种方法被称为网络演算(Network Calculus)[3].

Cruz 于 1991 年首次提出网络演算的概念[1],随着研究的深入,网络演算与 DEDS 以及其它理论的关系得到重视. Boudec[3]将服务曲线看作是服务

收稿日期:2008-07-16;最终修改稿收到日期:2009-10-25.本课题得到国家自然科学基金(60603064,60603061)资助.**樊葆华**,男,1977 年生,博士研究生,主要研究方向为计算机网络性能分析. E-mail: fanbaohua@nudt.edu.cn. **窦 强**,男,1976 年生,副教授,主要研究方向为高速网络互联、计算机体系结构等. **张鹤颖**,女,1976 年生,博士,副研究员,主要研究方向为计算机网络拥塞控制、互连网络等.

器的冲激响应;Chang[4-6]采用极小代数动态滤波器(dynamic filter)模型对计算机网络进行分析;Chang[7]还采用矩阵方法分析了多输入输出流时的服务器性能.许多新的理论方法也被引入了网络演算的研究:Fidler[8]提出了基于勒让德(Legendre)变换的共轭(conjugate)网络演算,在这一理论中极小卷积(min-plus convolution)可以被看成勒让德变换下的加法,从而降低了计算复杂度.Jiang[9]提出了一种基于模糊逻辑(fuzzy logic)的方法.

国内学术界也重视网络演算的研究,张信明等采用网络演算分析某些特殊的网络元素,如无缓冲区整形器、GPS 服务器等[10-12].高文宇等发表了对网络演算的综述性文献[13].张连明等采用网络演算的理论对网络中的某些特殊流如自相似流等进行了分析[14-15].国内对离散事件动态系统理论的研究达到国际先进水平,清华大学的郑大中等对 DEDS 进行了系统研究[16-17],蔡研等更是直接将 DEDS 理论运用于网络分析[18].但作为 DEDS 在计算机网络中的典型应用的网络演算,国内研究大多集中在实际应用,理论研究相对缺乏.

根据以上文献的研究内容,可知网络演算与 DEDS 理论有深刻联系.DEDS 是一种幂等(Idempotent)的线性系统理论,主要采用矩阵进行分析,特征值、冲激响应矩阵、Cayley-Hamilton 定理等矩阵论的经典结果都在 DEDS 理论研究中发挥了重要作用.因此如果能将整个网络演算采用矩阵来解释,将有助于对这一理论的深入研究并进一步得到新的结论.本文是对网络演算的理论研究,直接采用矩阵来描述到达曲线和服务曲线,得到到达矩阵与服务矩阵的概念,从而将网络演算与 DEDS 理论以及幂等矩阵理论紧密联系.研究表明,到达矩阵和服务矩阵是比到达曲线和服务曲线更为深刻的概念.基于到达矩阵和服务矩阵,采用余理论(residuation theory)可以得矩阵演算的基本定理,这一基本定理比网络演算中的定理更具一般性,更能反映网络的本质,矩阵网络演算的主要结论可以根据基本定理得出.

从形式上看,本文的工作与文献[7]相似,但实际上两者是完全不同的研究,不同之处主要表现在如下几个方面:

(1)本文采用幂等数学(idempotent mathematics)以及余理论研究到达矩阵和服务矩阵的性质,得出了矩阵演算的基本定理.而文献[7]中直接对矩阵进行推理;

(2)本文是对单入单出(SISO)服务器的进一步深入研究,文献[7]是用矩阵方法将一般的网络演算扩展到多入多出(MIMO)的情形.可以说本文是对网络演算在深度上的扩展,而文献[7]是对网络演算在广度上的扩展;

(3)本文对网络中数据流的生成矩阵进行了分类,定义了一阶以及二阶生成矩阵,结合到达矩阵与服务矩阵的性质可以对矩阵演算进行分类,文献[7]中矩阵的意义与本文完全不同.

本文第 2 节介绍相关理论基础,包括幂等数学、双子、余理论和确定性网络演算;第 3 节研究广义增矩阵以及定义在其上的双子结构,采用余理论研究了矩阵乘法及其余运算的性质;第 4 节研究到达曲线与服务曲线的矩阵表示,定义到达矩阵和服务矩阵,得出了矩阵演算的基本定理;第 5 节提出一种采用变换矩阵求服务矩阵的方法;第 6 节研究矩阵演算的应用,得出一种保证流量服务器以及令牌桶的服务矩阵和服务曲线;最后一节总结全文的工作并提出下一步的研究计划.

2 相关工作

2.1 幂等数学

幂等是指对于某个代数结构中的加法$\oplus$,性质$a\oplus a=a$成立[19].在计算机网络分析中,如果采用幂等的加法,则可将网络近似看作幂等线性系统,网络演算也可看作是基于幂等数学的一种确定性排队理论.

幂等数学中最重要的代数结构是双子(dioid):在集合$\mathcal{D}$上定义运算$\oplus$和$\otimes$,这两种运算都满足结合律并且分别有中立元ε和e,$\oplus$可交换并且是幂等的,$\otimes$对$\oplus$满足分配率,ε对$\otimes$运算吸收,此时称$\{\mathcal{D},\otimes,\oplus\}$为双子.

下面列举几个常用的双子:

(1)极小代数:$\overline{\mathbb{R}}=\{\mathbb{R}\cup+\infty,\min,\times\}$;

(2)考虑所有定义在$[0,+\infty)$的非负广义增函数(即非减函数)的集合$\mathscr{F}$,在其中定义运算:

(a)$(f\oplus g)(t)=f(t)\oplus g(t)$;

(b)$(f*g)(t)=\inf_{0\le s\le t}\{f(s)+g(t-s)\}$;

(c)$f\oslash g=\sup_{u\ge 0}\{f(t+u)-g(u)\}$.

则$\{\mathscr{F},\oplus,*\}$构成一个可交换双子.

双子中可以根据加法定义一种序关系:$a,b\in\mathcal{D}$,定义$a\le b$当且仅当$a=a\oplus b$.称$\le$为$\oplus$引起的序,在极小代数中的序关系就是通常的$\le$.

在双子理论中,半连续(Semi-continuous)映射占有重要地位.上半连续(Upper-semi-continuous)映射是指在两个双子$\{D,\oplus^D,\otimes^D\}$,$\{C,\oplus^C,\otimes^C\}$间的某个映射Π,对D的任意子集D':

$$\Pi(\oplus_{x\in D'}^{D}x)=\oplus_{x\in D'}^{C}\Pi(x) \tag{1}$$

将上面定义中的$\oplus$改为max,便得到下半连续映射(Lower-semi-continuous)的概念.

2.2 余理论

余理论是双子的主要分析工具之一[20-21],其主要研究对象是余映射和对偶余映射.

定义1(余映射)[20]. 从有序集$\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$的保序映射,如果对所有$y\in\mathcal{Y}$,子集$\{x\in\mathcal{X}\mid f(x)\le y\}$存在最大元,则称$f$是余映射(residuated mapping),该最大元记作$f^{\#}(x)$,映射$f^{\#}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$称作$f$的余(residual).如果对所有$y\in\mathcal{Y}$,子集$\{x\in\mathcal{X}\mid f(x)\ge y\}$存在最小元,则$f$是对偶余映射(dual-residuated mapping),该最小元记作$f^{\flat}(x)$,映射$f^{\flat}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$称为$f$的对偶余(dual-residual).

余映射在实际应用中较为常见,例如映射$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x$既是余映射也是对偶余映射.

文献[2]证明,双子$\mathcal{D}$到$\mathcal{C}$之间的映射是余映射的充要条件为其将$\mathcal{D}$中最大元映射为$\mathcal{C}$中最大元并且是下半连续映射.双子$\mathcal{D}$到$\mathcal{C}$之间的映射是对偶余映射的充要条件为其将$\mathcal{D}$中最小元映射为$\mathcal{C}$中最小元并且是上半连续映射.

余映射和对偶余映射主要有以下性质.

定理1(余映射的性质)[20]. f,g为从完全双子$\mathcal{A}$到完全双子$\mathcal{D}$上的映射,如下性质成立:

(1) $f\circ f^{\flat}\ge I_{\mathcal{A}}$, $f^{\flat}\circ f\le I_{\mathcal{D}}$,

(2) $f\circ f^{\#}\le I_{\mathcal{A}}$, $f^{\#}\circ f\ge I_{\mathcal{D}}$;

(3) $f\circ f^{\#}\circ f=f$, $f^{\#}\circ f\circ f^{\#}=f^{\#}$;

(4) $f\circ f^{\flat}\circ f=f$, $f^{\flat}\circ f\circ f^{\flat}=f^{\flat}$;

(5) $(f\circ g)^{\#}=g^{\#}\circ f^{\#}$, $(f\circ g)^{\flat}=g^{\flat}\circ f^{\flat}$;

(6) $(f\oplus g)^{\#}\ge f^{\#}\vee g^{\#}$, $(f\oplus g)^{\flat}=f^{\flat}\vee g^{\flat}$;

(7) $(f\vee g)^{\#}=f^{\#}\oplus g^{\#}$, $(f\vee g)^{\flat}\le f^{\flat}\oplus g^{\flat}$.

其中$(f\circ g)(t)=f(g(t))$,$I_{\mathcal{A}}$, $I_{\mathcal{D}}$分别为$\mathcal{A}$,$\mathcal{D}$上的恒等映射.

容易证明,对任意$f\in\mathscr{F}$,映射$\Pi_f(x)$: $\mathscr{F}\to\mathscr{F}$,$\Pi_f(x)=x*f$是对偶余映射,其对偶余为

$$\Pi_f^{\flat}(x):\mathscr{F}\to\mathscr{F},\ \Pi_f^{\flat}(x)=x\oslash f \tag{2}$$

因此可以用余理论分析极小卷积的性质.幂等数学的一个重要结论是Bellman定理,叙述如定理2.

定理2(Bellman定理[19]). 令$\{\mathcal{D},\oplus,\otimes\}$为双子,设$A,B,X\in\mathcal{D}$,则对$X=A\otimes X\oplus B$的最小解为$X=A^*\otimes B$.

2.3 网络演算

本小节根据文献[3]简单地介绍网络演算,假设服务器是工作保持(work-conserving)的,采用FIFO排队规则.流(flow)用其流量累积函数(cumulative traffic function)表示,如果F是某个服务器的输入流,则$F(t)$表示到时刻t为止该流到达服务器的总流量.总是用A代表某个服务器输入流,D代表相应的输出流,其各自的流量累积函数分别记作$A(t)$,$D(t)$,显然,$A(t)$,$D(t)\in\mathscr{F}$.

定义2(到达曲线). 设$\alpha\in\mathscr{F}$,对于一个累积函数为$A(t)$的流,如果对所有$t\ge0$,$A(t)\le(A\times\alpha)(t)$,则称$\alpha$是流$A(t)$的到达曲线.

定义3(服务曲线). 假设网络元素S,其输入和输出流量累积函数分别为$A(t)$,$D(t)\in\mathscr{F}$.称S提供服务曲线β,当且仅当以下条件同时成立:

(1) $\beta\in\mathscr{F}$, $\beta(0)=0$;

(2) $\forall t\ge0$, $D(t)\ge(A*\beta)(t)$.

根据到达曲线与服务曲线可以计算网络性能参数的确界.

定理3(确定性网络演算基本定理[3]). 经过网络元素S流$A(t)$有到达曲线$\alpha(t)$,S提供服务曲线$\beta(t)$,则

(1) 在时刻t,S的最大积压满足:

$$B(t)\le\sup_{0\le s\le t}\{\alpha(s)-\beta(s)\} \tag{3}$$

(2) 在t时刻所有到达分组经历的最大延迟满足:

$$D(t)\le\sup_{0\le s\le t}\{\inf\{\tau\ge0:\alpha(s)\le\beta(s+\tau)\}\} \tag{4}$$

(3) $D(t)$有到达曲线$(\alpha\oslash\beta)(t)$.

3 幂等矩阵研究

离散时间系统中,函数可以写成向量形式,由广义增函数得到的向量称为广义增向量.基于广义增向量的概念,可以定义广义增矩阵.

定义4(广义增矩阵). 广义增矩阵是指每一行从左到右,每一列从下到上都是广义增向量的矩阵.

本文用加黑的大写字母表示矩阵,如$\mathbf{A}$,当$0\le i,j\le t$时,用A_{ij}表示$t\otimes t$维矩阵$\mathbf{A}$位于第i行第j列的元素.

设t为整数,$\mathcal{M}^t$表示所有$t\times t$的广义增矩阵集合.对$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}^{t+1}$定义如下运算:

设 $0\le i,j\le t$,

(1) $(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})_{ij}=A_{ij}\oplus B_{ij}$;

(2) $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})_{ij}=\bigoplus_{k=0}^{t}(A_{ik}\otimes B_{kj})$.

$\{\mathcal{M}^{t+1},\oplus,\otimes\}$构成了完全双子,称为矩阵双子(matrix dioid).零元 $\boldsymbol{\Phi}$ 为所有元素为 ε 的矩阵,单位元 $\boldsymbol{E}$ 为对角线及对角线以下元素为 e,其余元素为 ε 的矩阵.其中 e,ε 分别代表极小代数双子 $\overline{\mathbb{R}}=\{\mathbb{R}\cup+\infty,\min,\times\}$ 中的单位元与零元.矩阵双子中的序关系定义为 $\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\forall 0\le i,\ j\le t$, $A_{ij}\le B_{ij}$.

矩阵的闭包运算定义为

$$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{A}^{1}\oplus\boldsymbol{A}^{2}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}^{n}\oplus\cdots \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{1}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{n}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}^{n-1}$.

设 $\boldsymbol{Y}\in\mathcal{M}^{t+1}$,定义 $\mathcal{M}^{t+1}\to\mathcal{M}^{t+1}$ 的映射:

$$\forall \boldsymbol{X}\in\mathcal{M}^{t+1},\ \Pi_{Y}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y} \tag{6}$$

在矩阵双子中,乘法不一定是可交换顺序的,所以以上定义的 Π_Y 称作右乘映射.还可定义左乘映射 $\Phi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}\otimes\boldsymbol{X}$,本文仅研究右乘映射.

可以证明 Π_Y 是上半连续映射,证明可参考文献[3].

定理 4. 设 $\boldsymbol{Y}\in\mathcal{M}^{t+1}$,则 Π_Y 是从 $\mathcal{M}^{t+1}\to\mathcal{M}^{t+1}$ 的上半连续映射.

由映射 Π_Y 的上半连续性,可得如下重要定理.

定理 5. $\Pi_Y(\boldsymbol{X})=X\otimes Y$ 是对偶余映射,其对偶余为 $\Pi_Y^{\flat}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\div\boldsymbol{Y}$,其中 $(\boldsymbol{X}\div\boldsymbol{Y})_{ij}=\bigvee_{k=0}^{n}(X_{ik}-Y_{jk})$.

证明. 因为 $\Pi_Y(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{\Phi}\ge\boldsymbol{Z}$,所以不等式 $\Pi_Y(\boldsymbol{X})\ge\boldsymbol{Z}$ 的解集不空,设为 D^{e},根据上半连续性,$\Pi_Y(\bigoplus_{\boldsymbol{X}\in D^{e}}\boldsymbol{X})=\bigoplus_{\boldsymbol{X}\in D^{e}}\Pi_Y(\boldsymbol{X})\ge\boldsymbol{Z}$.于是 $\Pi_Y(\boldsymbol{X})\ge\boldsymbol{Z}$ 的最小解存在.

其次证明 $\boldsymbol{Z}\div\boldsymbol{Y}$ 是不等式的解:

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{Z}\div\boldsymbol{Y})\otimes\boldsymbol{Y})_{ij}&=\bigoplus_{k=0}^{t}(\boldsymbol{Z}\div\boldsymbol{Y})_{ik}\otimes Y_{kj}\\&=\bigoplus_{k=0}^{t}\bigvee_{l=0}^{t}((Z_{il}-Y_{kl})+Y_{kj})\\&\ge\bigoplus_{k=0}^{t}Z_{ij}=Z_{ij}\end{aligned} \tag{7}$$

最后证明如果 $\boldsymbol{C}$ 是不等式的解,则 $\boldsymbol{C}\ge\boldsymbol{Z}\div\boldsymbol{Y}$,设 $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{Y}\ge\boldsymbol{Z}$,即

$$\bigoplus_{k=0}^{t}C_{ik}\otimes Y_{kj}\ge Z_{ij} \tag{8}$$

于是

$$C_{ik}\ge\bigvee_{j=0}^{t}(Z_{ij}-Y_{kj}) \tag{9}$$

证毕.

根据定理 5,不难结合定理 1 得出矩阵乘法及其余运算的如下性质.

推论 1(矩阵双子的性质). 设 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}\in\mathcal{M}^{t+1}$,则

(1) $\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{H}\div\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{H}$;

(2) $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}\div\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{H}$;

(3) $\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{H}\div\boldsymbol{H}\le\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}\ge\boldsymbol{F}$;

(4) $(\boldsymbol{F}\oplus\boldsymbol{G})\div\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{H})\vee(\boldsymbol{G}\div\boldsymbol{H})$;

(5) $(\boldsymbol{F}\vee\boldsymbol{G})\div\boldsymbol{H}\le(\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{H})\oplus(\boldsymbol{G}\div\boldsymbol{H})$.

4 网络演算的矩阵解释

本节给出矩阵网络演算的基本结论.首先定义到达矩阵和服务矩阵,然后根据这两个概念得出矩阵演算的基本定理.

4.1 到达矩阵和服务矩阵

上一节研究了广义增矩阵双子的性质,在网络分析中,经常遇到由某个数据流生成的矩阵,设 $\boldsymbol{A}(t)$ 为某个流的流量累积函数,对固定的 t,根据 $\boldsymbol{A}(t)$ 可得到如下两个 $(t+1)\times(t+1)$ 矩阵,对所有 $0\le i\le j\le t$:

(1) $\boldsymbol{A}_t^{v}$:$\boldsymbol{A}_{tij}^{v}=A(j-i)$;

(2) $\boldsymbol{A}_t^{inv}$:$\boldsymbol{A}_{tij}^{inv}=A(j)-A(i)$.

称 $\boldsymbol{A}_t^{v}$ 为流 A 在时刻 t 的一阶生成矩阵;称 $\boldsymbol{A}_t^{inv}$ 为流 A 在时刻 t 的二阶生成矩阵或自相关矩阵.显然如果 $A(t)$ 是广义增函数,则 $\boldsymbol{A}_t^{v}$,$\boldsymbol{A}_t^{inv}$ 都是广义增矩阵.定义 $\mathscr{F}^{inv}(t)$ 为某个时刻 t,$\mathscr{F}$ 中所有函数的时不变生成矩阵集合,$\mathscr{F}^{v}(t)$ 为相应的时变生成矩阵的集合.容易证明对固定的 t,$\{\mathscr{F}^{inv}(t),\oplus,\otimes\}$ 与 $\{\mathscr{F}^{v}(t),\oplus,\otimes\}$ 都是双子,并且前者的乘法是可交换的,后者的乘法是不可交换的,后文在不至引起混淆的前提下省略下标 t.

仿照网络演算中的定义公式,可以给出如下到达矩阵和服务矩阵的定义.

定义 5(矩阵的到达矩阵). 对于矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{M}^{t+1}$,如果存在矩阵 $\boldsymbol{H}\in\mathcal{M}^{t+1}$ 使得 $\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{H}$,则称 $\boldsymbol{H}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的到达矩阵.

以上定义中的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{H}$ 可以为时变或时不变的矩阵.根据这一定义,到达矩阵也可写作 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{H}$.即矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{A}$ 的一个上界,或者说 $\boldsymbol{H}$ 限制了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $\div$ 意义上的"差分"行为.

到达矩阵与幂等矩阵论中的特征值问题有很大联系,根据 $\boldsymbol{A}\le\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{H}$ 可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{H}) \tag{10}$$

$\boldsymbol{A}$ 为映射 $\Pi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\otimes(\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{H})$ 的一个特征矩

阵,其特征值为 $\boldsymbol{E}$.

以上定义的到达矩阵是脱离网络中数据流定义的一个抽象概念,在实际的网络演算中,要将到达矩阵的概念与流的概念结合来定义流的到达矩阵,因为每个流可以有两种生成矩阵,所以对一个数据流可以定义两种到达矩阵.

定义 6(数据流的到达矩阵). 设 $A(t)$ 为网络中某个流的流量累积函数,在某个时刻 t,$A(t)$ 的一阶生成矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 有到达矩阵 $\boldsymbol{H}_1$,则称在时刻 t 流 A 有一阶到达矩阵 $\boldsymbol{H}_1$;如果流 A 在时刻 t 的二阶生成矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 有到达矩阵 $\boldsymbol{H}_2$,则流 A 在时刻 t 有二阶到达矩阵 $\boldsymbol{H}_2$.

流的到达矩阵描述了该流的差分行为的上界. 可以证明,当到达矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是时不变矩阵时(即 $0\le i,j\le t$ 时 H_{ij} 只与 $j-i$ 有关),一阶到达矩阵和二阶到达矩阵是等价的.

定理 6. 设 $\boldsymbol{H}\in\mathcal{M}^{t+1}$,并且 $\boldsymbol{H}$ 是时不变矩阵,$A(t)$ 为某个流 A 的累积函数,$\boldsymbol{A}_1$ 为流 A 的一阶生成矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 为流 A 的二阶生成矩阵,则下面两个命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}_1\le\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{H}$;(2) $\boldsymbol{A}_2\le\boldsymbol{A}_2\otimes\boldsymbol{H}$.

证明. 根据到达矩阵定义:

$$\forall 0\le i,j,k\le t,\ A_{ij}\le A_{ik}+H_{kj} \tag{11}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是一阶生成矩阵,则

$$A(j-i)-A(k-i)\le H_{k,j}=H_{k-i,j-i} \tag{12}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是二阶生成矩阵,则有

$$A(j)-A(i)-(A(k)-A(i))\le H(k,j)$$
$$\Rightarrow A(j)-A(k)\le H_{k,j} \tag{13}$$

显然两种定义是等价的. 证毕.

从定理 6 的证明过程可以看出,如果到达矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是时变矩阵,则一阶和二阶到达矩阵定义不一定等价,一阶到达矩阵的定义包含了二阶到达矩阵的定义,如下推论所述,证明简单故略去.

推论 2. 设 $\boldsymbol{H}\in\mathcal{M}^{t+1}$,并且 $\boldsymbol{H}$ 是时变矩阵,$A(t)$ 为某个流 A 的累积函数,$\boldsymbol{A}_1$ 为流 A 的一阶生成矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 为流 A 的二阶生成矩阵,则

$$\boldsymbol{A}_1\le\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{H}\Rightarrow\boldsymbol{A}_2\le\boldsymbol{A}_2\otimes\boldsymbol{H} \tag{14}$$

可以用到达矩阵的观点看待时不变网络演算中的到达曲线定义,解释如下:如果流 A 有到达曲线 $F\in\mathscr{F}$,则在任意时刻,根据到达曲线定义可得:

$$A(t)\le A(0)\otimes F(t)\oplus\cdots\oplus A(t)\otimes F(0) \tag{15}$$

从而有 $\boldsymbol{A}_1\le\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{F}_1$,其中 $\boldsymbol{F}_1$ 是由时不变到达曲线 F 生成的一阶矩阵.

在矩阵双子中可以定义服务矩阵的概念,和到达矩阵的不同之处在于服务矩阵不能脱离网络元素而单独给出抽象的定义. 和到达矩阵一样,服务矩阵也存在一阶和二阶的区分.

定义 7(服务矩阵). 网络元素 S 的输入流为 A,输出流为 D,在时刻 t,设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{D}_1$ 为 A,D 的一阶生成矩阵,$\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{D}_2$ 分别为 A,D 的二阶生成矩阵.

(1) 如果存在矩阵 $\boldsymbol{S}_1\in\mathcal{M}^{t+1}$,$S_{100}=0$,使 $\boldsymbol{D}_1\ge\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1$ 成立,则称 S 在时刻 t 提供一阶服务矩阵 $\boldsymbol{S}_1$.

(2) 如果存在矩阵 $\boldsymbol{S}_2\in\mathcal{M}^{t+1}$,$S_{1ii}=0,0\le i\le t$,使 $\boldsymbol{D}_2\ge\boldsymbol{A}_2\otimes\boldsymbol{S}_2$ 成立,则称 S 在时刻 t 提供二阶服务矩阵 $\boldsymbol{S}_2$.

一阶服务矩阵描述了服务器的服务能力,对输出流 $D(t)$ 的特征进行了描述,而二阶服务矩阵则对输出流的差分特征 $D(t)-D(s)$ 进行了描述. 对于服务矩阵,不管其是时变或时不变矩阵,一阶服务矩阵与二阶服务矩阵定义都不等价.

以下对服务矩阵的意义进行讨论,以一阶服务矩阵为例:设 S 提供一阶服务矩阵 $\boldsymbol{S}_1$,如果 S 可以被近似看作一个一阶线性系统,则对任意输入,S 存在唯一的一阶线性响应矩阵 $\boldsymbol{H}_1$. 于是对某个输入 A 的一阶生成矩阵 $\boldsymbol{A}_1$,可得

$$\boldsymbol{D}_1\ge\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1;\ \boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{H}_1 \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{D}_1$ 为输出流 D 的一阶生成矩阵,于是

$$\boldsymbol{D}_1\oplus\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1$$
$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{H}_1)\oplus\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1$$
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_1\otimes(\boldsymbol{H}_1\oplus\boldsymbol{S}_1)=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1 \tag{17}$$

显然 $\boldsymbol{H}_1\ge\boldsymbol{S}_1$ 时上面等式成立. 如果 $\boldsymbol{H}_1\le\boldsymbol{S}_1$,等式变成 $\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{S}_1$,根据线性响应矩阵的唯一性,可以得 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{S}_1$,又因为这一结论对所有 $t\times t$ 阶生成矩阵都成立,所以最后有 $\boldsymbol{S}_1\ge\boldsymbol{H}_1$,即一阶线性响应矩阵是最小的一阶服务矩阵. 对二阶服务矩阵可得到相同结论,即 $\boldsymbol{S}_2\ge\boldsymbol{H}_2$.

可以根据到达矩阵和服务矩阵是时变或是时不变矩阵将网络演算分为时变和时不变网络演算;而根据到达矩阵和服务矩阵定义中流的生成矩阵的阶数,又可以将网络演算分为一阶网络演算和二阶网络演算;因此总共可以组合成如表 1 所示的 4 种矩阵演算.

表 1 网络演算的分类

网络演算分类	输入输出矩阵	服务矩阵	相关文献
一阶时不变	一阶	时不变	文献[3]
一阶时变	一阶	时变	文献[6]
二阶时不变	二阶	时不变	本文
二阶时变	二阶	时变	本文

一般来说,时变网络演算用于描述服务器的动态行为,而二阶网络演算则用于描述服务器输出流的差分行为.以往文献并未仔细区分这一区别,本文首次对其中的区别进行了研究.这种分类法也可用于非矩阵的网络演算,如文献[3-4]中的网络演算可以认为是属于一阶时不变网络演算,而文献[6]中的网络演算则属于一阶时变网络演算,二阶演算尚属于待研究的领域,下一节的研究表明这四种矩阵演算可以用统一的方法分析.

4.2 矩阵演算的基本定理

4 种网络演算都可以用幂等矩阵理论分析,首先证明如下重要引理.

引理 1. 设 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}\in\mathcal{M}^{t+1}$,则 $(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{H})\div(\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{H})\leq(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G})$.

证明. 根据推论 1 可得 $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{G}\geq\boldsymbol{F}$,两边右乘 $\boldsymbol{H}$ 得到 $(\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{G})\otimes(\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{H})\geq\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{H}$,于是 $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{G}\geq(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{H})\div(\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{H})$. 证毕.

根据引理 1,可以得到在矩阵演算的基本定理.

定理 7(矩阵演算基本定理). 一阶(二阶)到达矩阵为 $\boldsymbol{F}$ 的流经过一个提供一阶(二阶)服务矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的服务器,输入和输出的一阶(二阶)生成矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$,则 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$.

证明. 根据到达矩阵与服务矩阵的定义可得

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{F}\geq\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{D}\geq\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{S}.$$

根据矩阵乘法的单调性以及引理 1:

$$\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\leq(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{F})\div(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{S})\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}.$$

证毕.

以上基本输入输出关系式之所以叫基本定理是因为这一定理对任何一种矩阵网络演算都成立,无论是一阶还是二阶演算,也无论是时变还是时不变演算.网络演算的主要结论都可以根据这一定理得出,以一阶时不变网络演算为例:

(1) 在一阶时不变网络演算中,有 $\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{D}$,于是

$$\boldsymbol{D}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S} \tag{18}$$

从而 $\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{D}\otimes(\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S})$,即 $\boldsymbol{D}$ 有到达矩阵 $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$.

(2) 根据 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$,可得 $(\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D})(0,0)\leq(\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S})(0,0)$,这意味着 $\sup_t\{A(t)-D(t)\}\leq\sup_t\{F(t)-S(t)\}$;并且 $\sup_t\{A(t)-D(t)\}=B_{\max}$ 恰为最大积压的表达式.

对二阶演算可以进行相似的讨论.可以证明对二阶网络演算,以上讨论的(1)仍然成立.

推论 3. 二阶到达矩阵为 $\boldsymbol{F}$ 的流经过一个提供二阶服务矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的服务器,输入和输出的二阶生成矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$,则输出流 D 有二阶到达矩阵 $\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$.

证明. 注意到如下等式成立:

$$A(t)\geq D(t)\Rightarrow A(t)-D(s)\geq D(t)-D(s),$$

即 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\geq\boldsymbol{D}$,根据 $\boldsymbol{A}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$ 可得 $\boldsymbol{D}\div\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{D}\leq\boldsymbol{F}\div\boldsymbol{S}$. 证毕.

以下定理给出了串联网络元素提供的服务矩阵.

定理 8(串联). 设网络元素 $S_i,i=1,2$ 在时刻 t 的一阶(二阶)服务矩阵为 $\boldsymbol{B}_i$,则由 S_1,S_2 串连组成的系统提供的一阶(二阶)服务矩阵为 $\boldsymbol{B}_1\otimes\boldsymbol{B}_2$.

证明. 根据矩阵乘法的单调性容易证明结论.

5 基于变换矩阵求服务曲线

可以采用矩阵方法来求某些网络元素的服务曲线,即先求得一阶服务矩阵,再将其写成函数形式.定义如下一组矩阵为传输矩阵:

$$\{\boldsymbol{Z}_i(k)\}:\boldsymbol{Z}_i(k)\in\mathcal{M}^{t+1},\ k\in\mathbb{N} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_0(k)$ 定义为

$$\boldsymbol{Z}_0(k)=\begin{bmatrix} k & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ k & k & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & & & \vdots \\ k & k & k & \cdots & \varepsilon \\ k & k & k & \cdots & k \end{bmatrix} \tag{20}$$

对于 $i\geq0$,$\boldsymbol{Z}_{i+1}(k)$ 通过将 $\boldsymbol{Z}_i(k)$ 最右边一列移走而在左边增加一列零向量得到,例如:

$$\boldsymbol{Z}_1(k)=\begin{bmatrix} e & k & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ e & k & k & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & & & \vdots \\ e & k & k & \cdots & k \\ e & k & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}_2(k)=\begin{bmatrix} e & e & k & \cdots & \varepsilon \\ e & e & k & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & & & \vdots \\ e & e & k & \cdots & k \\ e & e & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

网络演算中一般假设 $A(0)=D(0)=0$.因此定义如下初始条件矩阵 $\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{e},\boldsymbol{\varepsilon},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}]$,其中 $\boldsymbol{e}$ 为元素全为 e 的列向量,而 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为元素全为 ε 的列向量.

$\boldsymbol{Z}_i(k)$ 可被用作双子 $\{\mathscr{F},\oplus,\otimes\}$ 中的变换矩阵.例如考虑递归式 $f(t)=kf(t-1)$,初始条件为 $f(0)=0$,矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为函数 f 的一阶生成矩阵,原式可以写成 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{Z}_1(k)$,根据 Bellman 定理这个方程的解为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{Z}_1(k)^*$.

$\boldsymbol{Z}_i(k)\oplus\boldsymbol{E}$ 可以用于解 $\mathscr{F}$ 中的不等式.如不等式 $f(t)\leq kf(t-1)$,这个不等式可以写成等式 $f(t)=$

$f(t-1)\otimes k\oplus f(t)$，矩阵形式为 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{E}=\boldsymbol{f}\otimes(\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E})$，这个方程的解为 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}\otimes(\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E})^*$.

本文假设对于 i 阶递归式，其初始条件为$f(k)=f(0)=0,k=1,2,i-1$，所以矩阵 $\boldsymbol{Z}_i(k)$的前 i 列为向量，对于不同的初始条件，要对 $\boldsymbol{Z}_i(k)$的前 i 列作相应修改.

采用矩阵 $\boldsymbol{Z}_i(k)$作为变换矩阵的一个原因是这个矩阵的闭包比较容易计算，如下定理所述.

定理 9.　(1) 矩阵 $\boldsymbol{Z}_i(k)$的闭包为

$$\boldsymbol{Z}_i(k)^*=\begin{bmatrix} e & \cdots & k & 2k & \cdots & (t-i+1)k \\ e & \cdots & k & k & \cdots & (t-i)k \\ e & \cdots & k & k & \cdots & (t-i-1)k \\ \vdots & & & & & \vdots \\ e & \cdots & k & k & \cdots & k \\ e & \cdots & k & k & \cdots & k \end{bmatrix}$$

(2) $(\boldsymbol{Z}_i(k)\oplus\boldsymbol{E})^*=\boldsymbol{Z}_i(k)^*\oplus\boldsymbol{E}$.

证明.　根据图论知识，$Z_1^*(k)_{ij}$ 代表生成图中 2 个节点 i,j 之间的最短距离，可以证明如下性质：

(1) 如果 $Z_i(k)_{ij}=e$，则 $Z_i(k)_{ij}^*=e$；

(2) 如果 $Z_i(k)_{ij}=k$，则 $Z_i(k)_{ij}^*=k$.

性质(1)明显成立，下面给出性质(2)的简单证明：对 $i\leq j$，$Z_i(k)_{ij}^*$ 只能取 e 或 k，如果 $Z_i(k)_{ij}^*=e$，则存在 i,j 之间的一条路径，记为$\{ip_1p_2\cdots j\}$，并且每个 $Z_i(k)_{p_kp_{k+1}}=e$. 但根据 $\boldsymbol{Z}_i(k)$的定义可知如果 $Z_i(k)_{ij}=k$，则对所有 l，$Z_i(k)_{lj}\geq k$，于是 $Z_i(k)_{ij}^*=k$. 根据性质(1)和性质(2)可得$(\boldsymbol{Z}_i(k)\oplus\boldsymbol{E})^*=\boldsymbol{Z}_i(k)^*\oplus\boldsymbol{E}$.

以求 $\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E}$ 的闭包为例. 画出矩阵 $\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E}$ 的生成图(precedence graph)(图 1)，可得到结论.

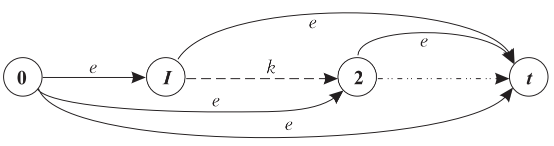

图 1　矩阵 $\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E}$ 的生成图

$\boldsymbol{Z}_1(k)^*$ 可通过$(\boldsymbol{Z}_1(k)\oplus\boldsymbol{E})^*$ 得到. 对于 $i>1$ 的情况，可以采用相同的方法.

于是根据定理 9，$f(t)=kf(t-1)$的解为 $f(t)=kt$；$f(t)\leq kf(t-1)$的解为 $f(k)=kt\oplus f(k)$，即 $f(k)\leq kt$.

6　矩阵网络演算的若干应用

在这一节，我们用两个例子解释矩阵方法在网络分析中的应用.

6.1　保证流量服务器

保证速率(guaranteed rate)服务器是一种常见的服务器模型，文献[6]采用网络演算分析了该服务器的性能. 但 GR 服务器本质上是基于极大代数定义的，本节定义一种与 GR 服务器对偶(dual)的服务器模型，采用极小代数定义，称之为保证流量(guaranteed traffic)服务器，然后采用矩阵方法求其服务矩阵进一步得到其服务曲线.

定义 8(保证流量服务器).　设某个服务器 S，输入输出累计函数分别为 $A(t),D(t)$，r 为服务速率，定义序列 $f(t)$如下：

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(t)=\min\{a(t),f(t-1)+r\} \end{cases} \tag{21}$$

如果服务器保证在任何时刻 $t>0$，$d(t)\geq f(t)+b$，则称 S 为(r,b)保证流量服务器.

和 GR 服务器不同，GT 服务器对服务器输出的流量作出了保证. 我们使用矩阵方法可以得到 GT 服务器的服务曲线，并进而研究其输入输出特性，将等式(1)写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{Z}_1(r) \tag{22}$$

$\boldsymbol{F},\boldsymbol{A}$ 为 f,a 对应的一阶生成矩阵，这个方程的解为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{Z}_1(r)^*$，设 D 的生成矩阵为 $\boldsymbol{D}$，则 $d(t)\geq f(t)+b$ 可以写成 $\boldsymbol{D}\geq\boldsymbol{F}\otimes(\boldsymbol{Z}_0(b)\oplus\boldsymbol{I})$，得到 GT 服务器的服务矩阵为 $\boldsymbol{Z}_1(r)^*\otimes(\boldsymbol{Z}_0(b)\oplus\boldsymbol{I})$. 于是 GT 服务器的服务曲线为 $\beta(t)=\begin{cases} rt+b, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$.

6.2　令牌桶的服务矩阵

矩阵方法不仅可以应用于极小代数演算，也可用于极大代数演算，和极小代数演算相似，极大代数下也可定义到达矩阵和服务矩阵，不同之处在于极大代数下的加法$\oplus$定义为 max.

在极大代数演算中，输入输出 $A(n),D(n)$分别表示第 n 个分组到达与离开服务器的时间. 下面用矩阵方法求一个桶高为 b，令牌产生速率为 ρ 的离散令牌桶在极大代数下的整形矩阵.

假设 $x(n)$表示时刻第 n 个被接受(即未丢弃)的令牌产生的时刻，如果要第 n 个到达的分组离开令牌桶，需要同时满足如下两个条件，令 $\lambda=1/\rho$ 表示每产生一个令牌所需时间：

(1) 令牌桶接受了一个新令牌，因为已经用掉了 $n-b-1$ 个被接受的令牌，从而该时刻为 $x(n-b)$；

(2) 第 n 个分组已经到达，该时刻为 $a(n)$.

于是得到 $d(n)=\max\{a(n),x(n-b)\}$，改用极大代数的符号：

$$\begin{cases} x(n) = x(n-1) \otimes \lambda \oplus a(n) \\ y(n) = a(n) \oplus x(n-b) \end{cases} \tag{23}$$

初始条件为 $x(0)=\varepsilon$，和第一个 GT 服务器例子不同的是本例得到一个方程组，令

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon \\ \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon & \lambda & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \cdots & \lambda & \varepsilon \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & e & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$\boldsymbol{X},\boldsymbol{A},\boldsymbol{Y}$ 为相应的一阶生成矩阵，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{X} \end{cases} \tag{24}$$

对方程组中第一个方程，依次左乘矩阵 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2,\cdots,\boldsymbol{B}^n$ 可以得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{BX} \oplus \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{BA} \\ \cdots \\ \boldsymbol{B}^n\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{n+1}\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{B}^n\boldsymbol{A} \end{cases} \tag{25}$$

将方程由下而上的迭代，可以得出

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{n+1}\boldsymbol{X} \oplus \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A} \tag{26}$$

而由矩阵与其有向图之间的关系可知 $\boldsymbol{B}^{n+1}=\boldsymbol{\Phi}$，所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$，结合图论方法可得

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CB}^*\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A} = \boldsymbol{HA} \tag{27}$$

从而

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{CB}^* \oplus \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e & \lambda & \cdots & \cdots & b\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & e & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \cdots & e \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{28}$$

因此得到在极大代数网络演算下，(b,ρ) 令牌桶的极大整形曲线为

$$f(n) = \lambda(t-b)^+ = \frac{1}{\rho}(t-b)^+ \tag{29}$$

通过这个例子可以看出，矩阵演算的一个好处是可以将许多矩阵论中的工具和方法用于计算机网络分析.

7 总 结

本文采用幂等矩阵理论对网络演算中到达曲线和服务曲线等概念进行了解释，并对网络演算进行了分类，得出了矩阵演算的基本定理，分析的主要工具是余理论与幂等矩阵理论. 采用矩阵分析网络演算的工作有以下几个优点：

(1) 矩阵形式更易于理解，在矩阵演算中，极小卷积变成了较为常见的矩阵乘法并且可以采用研究结果较为成熟的幂等矩阵理论进一步研究网络演算；

(2) 矩阵演算为网络演算与 DEDS 理论、网络演算与图论之间架起一座桥梁；

(3) 不管是时变还是时不变网络演算，都可以用统一的矩阵形式来表达，矩阵演算的基本定理都成立.

下一步研究可在如下两个方面展开：

(1) 矩阵与随机网络演算的结合，采用矩阵解释随机网络演算；

(2) 幂等矩阵理论相关结果在网络演算中的进一步应用. 例如文献[2] 中的映射理论以及矩阵的最小实现问题等.

致 谢 感谢挪威科技大学的 Jiang Yuming 教授对本文提出了若干中肯的意见；感谢审稿人的辛勤工作！

参 考 文 献

[1] Cruz R L. A calculus for network delay, Part I: Network elements in isolation. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, 36(2): 114-131

[2] Baccelli F, Hong D. TCP is max-plus linear: And what it tells us on its throughput//Proceedings of ACM SIGCOMM. Stockholm, Sweden, 2000: 219-230

[3] Boudec J Y L, Thiran P. Network calculus: A theory of deterministic queuing system for the Internet//LNCS 2050, Online Version, 2004

[4] Chang C S. On deterministic traffic regulation and service guarantees: A systematic approach by filtering. Transactions on Information Theory, 1998, 44(3): 1096-1107

[5] Chang C S. Performance Guarantees in Communication Networks. London: Springer, TNCS, 2000

[6] Chang C S, Cruz R L et al. A (min, +) system theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2002, 10(6): 805-817

[7] Chang C S. Matrix extensions of the filtering theory for deterministic traffic regulation and service guarantees. IEEE Journal Selected Areas in Communications, 1998, 16(5): 708-718

[8] Fidler M, Recker S. Conjugate network calculus: A dual approach applying the Legendre transform. Computer Networks, 2006, 50(8): 1026-1039

[9] Jiang X. New perspectives on network calculus. ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 2008, 37(1): 95-97

[10] Zhang Xin-Ming, Chen Guo-Liang et al. A traffic shaping framework based on network calculus. Journal of Software, 2002, 13(12): 2225-2230(in Chinese)
(张信明，陈国良等．基于网络演算的流量整形模型．软件学报，2002，13(12)：2225-2230)

[11] Zhang Xin-Ming. Research on the aggregate traffic characterization and QoS performance bounds. Computer Science, 2004, 31(2): 31-33(in Chinese)
(张信明．聚集业务流特性与 QoS 性能界限的研究．计算机科学，2004，31(2)：31-33)

[12] Zhang Xin-Ming, Chen Guo-Liang, Gu Jun. On the computation of end-to-end delay bound in guaranteed service by network calculus. Journal of Software, 2002, 12(6): 889-893 (in Chinese)
(张信明，陈国良，顾钧．基于网络演算计算保证服务端到端延迟上界．软件学报，2002，12(6)：889-893)

[13] Gao Wen-Yu, Chen Song-Qiao et al. A survey on network calculus. Microelectronics & Computer, 2004, 21(11): 76-80(in Chinese)
(高文宇，陈松乔等．网络微积分学研究．微电子学与计算机，2004，21(11)：76-80)

[14] Zhang Lian-Ming, Chen Zhi-Gang et al. Deterministic upper bounds on performance of generalized processor sharing based on fractal regulators. Journal on Communications, 2007, 28 (2): 51-57(in Chinese)
(张连明，陈志刚等．基于分形整形器的 GPS 系统性能确定上界研究．通信学报，2007，28(2)：51-57)

[15] Chen Zhi-Gang, Zhang Lian-Ming, Den Xiao-Heng, Zhao Ming. Performance analysis of generalized processor sharing based on fractal leaky bucket regulators. Journal on Communications, 2006, 27(6): 29-35(in Chinese)
(陈志刚，张连明，邓晓衡，赵明．基于分形漏桶整形器的通用处理器共享系统性能分析．通信学报，2006，27(6)：29-35)

[16] Chen Wen-De, Qi Xiang-Dong. Discrete Event Dynamic System: A Max-Plus Approach. Beijing: Science Press, 1994(in Chinese)
(陈文德，齐向东．离散事件动态系统：极大代数方法．北京：科学出版社，1994)

[17] Zheng Da-Zhong, Zhao Qian-Chuan. Discrete Event Dynamic System. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 (in Chinese)
(郑大钟，赵千川．离散事件动态系统．北京：清华大学出版社，2000)

[18] Cai Yan, Zhao Qian-Chuan. The analysis of TCP protocol based on max-plus. Chinese Journal of Computers, 2002, 25 (11): 1133-1143(in Chinese)
(蔡研，赵千川．基于极大代数的 TCP 协议分析．计算机学报，2002，25(11)：1133-1143)

[19] Litvinov G L, Maslov G B. Shpiz idempotent functional analysis: An algebraic approach. Mathematical Notes, 2001, 69 (5-6): 696-729

[20] Baccelli F, Cohen G et al. Synchronization and Linearity, an Algebra for Discrete Event Systems. West Sussex, Great Britain: John Wiley and Sons, 1992

[21] Blyth T S, Janovitz M F. Residuation Theory. United Kingdom: Pergamon Press, 1972

FAN Bao-Hua, born in 1977, Ph. D. candidate. His current research interests include performance analysis of computer networks, network calculus.

DOU Qiang, born in 1976, associate professor. His main research interests are high-speed network interconnection, computer architecture.

ZHANG He-Ying, born in 1964, professor. Her main research interests are computer network congestion control, interconnection network.

Background

Network calculus is a deterministic queuing theory based on non-linear algebra. It has been successfully applied to a number of important issues in the field of computer networks modeling and performance analysis. It is also an efficiency tool for calculating the deterministic bounds of end-to-end performance parameters such as delay and backlog. Aimed at these shortcomings of theory research, and based on the summary of existing research results, the authors study network calculus theoretically by idempotent matrices and DEDS theory. They study arrival curve and service curve by idempotent matrix theory, also define the concept of arrival matrix and service matrix, and propose a matrix network calculus based on these two notions. Network calculus is divided into four categories by order of flow's generated matrix. There are many advantages of matrix network calculus: First, in matrix network calculus, min-plus convolution turns into our familiar matrix multiplication; Second, the results can be used in developed idempotent matrix theory to analyze network calculus; At last matrix network calculus deepens the relationship between network calculus and DEDS theory, thus makes it possible for using DEDS theory to further study network calculus. The work is supported by National Natural Science Foundation of China (60603064) and (60603061). The authors have been made great progress in the field of network calculus, and have publicized many papers in this research direction.