

# 基于混合线性模型的图像去噪

曹 扬 罗予频 杨士元

(清华大学自动化系 北京 100084)

**摘 要** 现有的图像去噪算法大多假设图像为分段平滑信号,通过滤除图像中的振动分量达到去噪的效果. 如果将这类方法应用于纹理图像,则会导致图像细节信息的损失. 该文针对保留图像细节的问题,提出了基于混合线性模型的去噪方法. 新方法不假设图像分段平滑,仅假设图像具有自相似性,利用图像的相似性区分图像信号与噪声. 文中使用统计学习的方法对图像区域进行聚类,并得到图像主成份,以主成份作为信号分量重组图像,从而对纹理图像取得很好的去噪效果.

**关键词** 图像去噪; 自相似性; 混合线性模型

**中图法分类号** TP391 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2009.02260

## Hybrid Linear Model Based Image Denoising

CAO Yang LUO Yu-Pin YANG Shi-Yuan

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** Most of previous image denoising method assume image signal is piecewise smooth. They suppress oscillating patterns in the image to denoise. This kind of method remove high-frequency signal from texture image. This paper proposes a hybrid linear model based image denoising method in order to preserve texture signal. The new method doesn't use piecewise smoothness assumption. Supposing image signal is self-similar while noise is not. Statistical learning algorithm is used to cluster the image regions and extract the principle component. The principle component is used as the image signal to form the denoised image, so as to preserve most detail signal of texture image.

**Keywords** image denoising; self-similarity; hybrid linear model

## 1 引 言

传统的去噪方法以时频域滤波器为主,例如高斯滤波器<sup>[1]</sup>,这类方法大多假设图像信号平滑,从而将高频分量作为噪声滤除,这将导致图像细节信息的损失. 近年来很多研究工作集中在保留图像细节上,但大多方法仍然假设图像分段平滑,这样虽然能保留边缘信息,但对纹理细节的保留贡献不大. 例如 TV 方法<sup>[2-3]</sup>最小化图像全变分,得到分段平滑图

像. 小波方法<sup>[4]</sup>假设图像可以小波稀疏表达,即图像中大部分区域不存在高频分量. 一些改进方法采用了如 Contourlet 等其它变换代替小波变换<sup>[5]</sup>,取得了更好的效果,但其基本假设不变. 已有的算法通常将图像各部分分为平滑与边缘两种模式,通过滤除平滑模式图像中的高频分量进行去噪,既将其处理为理想的平滑模式. 当图像包含纹理时,纹理也会被当作以上两种模式处理,所以会损失细节信息.

为了保留图像的纹理信息,一些学者提出了针对纹理自相似性的去噪方法. 例如自适应主成分去

噪<sup>[6]</sup>假设图像相邻区域具有相同的主成分,以相邻区域为样本做主成分分析得到无噪声图像模型.分形去噪方法<sup>[7-8]</sup>假设不同尺度的图像具有自相似性,利用图像的统计信息估计无噪声图像的分形压缩系数,从而得到去噪图像.非局部均值方法<sup>[9]</sup>假设相邻区域具有自相似性,搜索领域内的相似图像区域做加权平均得到去噪结果.通用离散去噪方法<sup>[10]</sup>只假设图像具有平稳分布,在不假设概率分布族的情况下,使用非参数估计的方法统计图像块的分布,再用最小代价准则计算去噪结果.

由于纹理图像具有重复性,即不同位置的多处区域具有相似图像,所以在不同的光照条件下,相似的区域将处于向量空间中的一个低维子空间内.如果能够首先识别出纹理图像所属的特殊模式,则可以滤除图像中其它模式分量,从而在去噪的同时保留纹理细节.本文中使用的混合线性模型描述图像的自相似性,并通过投影变换滤除噪声.

本文第2节将给出图像的混合线性模型描述及其对应的去噪算法;第3节给出实验结果;第4节进行总结.

## 2 基于自相似性的图像去噪算法

### 2.1 图像模型

数字图像可表示为信号及噪声的叠加:

$$u^o(x, y) = u^f(x, y) + u^n(x, y) \quad (1)$$

其中,  $u^o(x, y)$  表示噪声图像,  $u^f(x, y)$  表示无噪声图像,  $u^n(x, y)$  表示加性噪声,这里假设  $u^n(x, y)$  为高斯白噪.

由于图像主要由物体的反射光组成,文献[11]中将无噪声图像分解为光照强度和物体表面反射率的乘积:

$$u^f(x, y) = s(x, y)r(x, y) \quad (2)$$

其中,  $s(x, y)$  表示光照分布,  $r(x, y)$  表示物体表面反射率.一般来说光照强度是一个低频信号,在某一小局部可以将其近似为常数.  $r(x, y)$  由物体表面纹理决定,由于同一物体的不同局部具有相同的纹理,图像中也常出现多个相似的物体,所以  $r(x, y)$  具有重复性,即在图像的不同局部会出现相同的  $r(x, y)$ .

用  $P(x, y)$  表示以  $(x, y)$  为中心的包含  $m \times m$  个像素的局部区域,这一局部的无噪声图像可以用  $m^2$  维向量  $\mathbf{I}^f(x, y)$  表示.若图像中  $P(x_1, y_1)$  与

$P(x_2, y_2)$  具有相同的纹理,即在这两个局部的对应位置的  $r$  相同,则根据式(2),有

$$\mathbf{I}^f(x_1, y_1) = \frac{s(x_1, y_1)}{s(x_2, y_2)} \mathbf{I}^f(x_2, y_2) \quad (3)$$

因此,具有相同纹理的图像区域对对应的向量处于一个子空间中.

考虑到图像中存在着不同的纹理区域,则整个图像中所有的向量样本可用混合线性模型描述.用  $\Omega$  和  $X$  表示所有的像素坐标和向量样本,对于具有  $n$  种模式的图像,样本集  $X$  属于  $n$  个线性子空间.用  $\{S_i \subseteq R^{m^2}\}_{i=1}^n$  表示各个子空间,  $X_i = \{\mathbf{I}^f(x, y): \mathbf{I}^f(x, y) \in S_i\}$  表示属于同一线性子空间的样本,并用  $\Omega_i = \{(x, y): \mathbf{I}^f(x, y) \in X_i\}$  表示属于同一模式的图像区域坐标,则有  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$  和  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ .

根据式(1),一个包含噪声的图像向量可以表示为  $\mathbf{I}^o(x, y) = \mathbf{I}^f(x, y) + \mathbf{I}^n(x, y)$ ,其中  $\mathbf{I}^o(x, y)$  为带有噪声的图像向量,  $\mathbf{I}^n(x, y)$  为噪声向量,由于  $u^n(x, y)$  为高斯白噪,所以  $\mathbf{I}^n(x, y)$  是  $m^2$  维高斯噪声,且各维独立同分布.在得到观测样本  $\mathbf{I}^o(x, y)$  后,就可以用统计学习的方法估计出各个子空间  $S_i$  及其所属样本,设某一位置的向量  $\mathbf{I}^f(x_1, y_1) \in S_i$ ,由于  $\mathbf{I}^n(x_1, y_1)$  各维的无关性,  $\mathbf{I}^o(x_1, y_1) \notin S_i$ .通过将  $\mathbf{I}^o(x_1, y_1)$  投影到  $S_i$  中,可以得到  $\mathbf{I}^f(x_1, y_1)$  的估计值  $\mathbf{I}^d(x_1, y_1)$ ,使用  $\mathbf{I}^d(x_1, y_1)$  组成新图像既可达去噪效果,方法流程如图1所示.

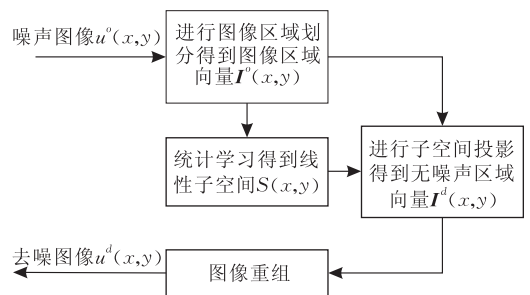


图1 去噪方法流程图

### 2.2 样本聚类

在上述去噪算法中需要从样本中统计得到各个子空间  $\{S_i \subseteq R^{m^2}\}_{i=1}^n$ ,这可以通过 EM<sup>[12]</sup>、GPCA<sup>[13]</sup>、SGPCA<sup>[14]</sup> 等方法计算,本文中使用的 SGPCA 方法进行聚类分析.

为了使算法能够根据噪声的大小调整去噪的强度,需要在使用 SGPCA 算法时,根据噪声方差调整  $S_i$  的维数  $k_i$ .由于 SGPCA 采用迭代算法不断减小子空间维数,只要如下修改迭代终止条件即可控制

去噪参差:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|I_i^o - I_i^d\|^2 > cm^2 \sigma^2 \quad (4)$$

其中,  $N$  为总样本数,  $\sigma^2$  为噪声方差,  $c$  为常数, 在实验中取  $c=1.2$ .

### 2.3 图像重组

由于  $\Omega$  包括相邻的像素坐标, 而  $P(x, y)$  包括了  $(x, y)$  为中心的  $m \times m$  区域的所有像素, 所以不同图像区域之间存在重叠. 图像内部的像素点同时出现在  $m^2$  个区域中, 设包含像素  $(x, y)$  的区域为  $\{P(x_j, y_j)\}_{j=1}^{m^2}$ . 其中每个区域向量经过映射后得到的  $\{I^d(x_j, y_j)\}_{j=1}^{m^2}$ , 其在  $(x, y)$  点的取值  $\{u_j^d(x, y)\}_{j=1}^{m^2}$  可能不相同, 在本文中采用  $u_j^d(x, y)$  的加权平均作为点  $(x, y)$  的去噪结果  $u^d(x, y)$ . 在噪声的影响下,  $I^o(x, y)$  的分类有一定不确定性, 造成映射结果  $I^d(x_j, y_j)$  的错误. 距离子空间较远的样本受噪声影响较大, 分类错误的概率也较大, 所以给予较小的权重, 反之给予较大的权重. 去噪结果定义为

$$u^d(x, y) = \frac{\sum_{j=1}^{m^2} c_j u_j^d(x, y)}{\sum_{j=1}^{m^2} c_j} \quad (5)$$

$$c_j = \exp(-d(I^o(x_j, y_j), S(x_j, y_j))^2) \quad (6)$$

其中  $d(I^o(x_j, y_j), S(x_j, y_j))$  表示样本  $I^o(x_j, y_j)$  到子空间  $S(x_j, y_j)$  的欧氏距离.

## 3 实验结果

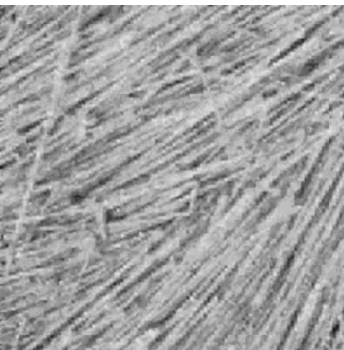
由于传统的去噪算法假设图像分段平滑, 具有损失图像纹理细节的局限性, 本文提出了一种新的基于图像自相似性的去噪方法, 不仅对平滑图像有效, 还能够解决纹理恢复的问题. 实验 1 使用纹理图像进行实验, 实验中设  $m=4$ , 子空间数  $n=2$ . 图 2 给出了实验结果, 同时给出了小波全局软阈值法<sup>[4]</sup>和分形去噪方法<sup>[7]</sup>的去噪结果作为对比. 小波法中小波基与阈值的选择很多, 这里使用 9/7 小波, 并遍历  $\{0, 1, \dots, 256\}$  内的所有阈值, 采用均方误差 (mse) 最小的阈值作为小波方法的结果. 从图 2 的实验结果上看, 小波方法丢失图像细节, 纹理图像被模糊. 分形去噪方法的处理结果上残留了一定的噪声信号, 而且还造成了对比度的损失. 而本文提出得基于混合线性模型的去噪方法可以很好地恢复图像纹理信号, 既没有出现模糊现象, 对比度也没有下降.



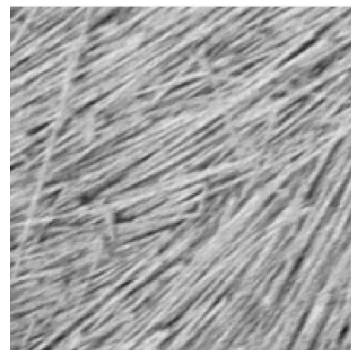
(a) 无噪声图像

(b) 噪声图像 (mse=399.3)

(c) 小波去噪结果 (mse=225.2)



(d) 分形去噪方法结果 (mse=298.4)



(e) 新方法结果 (mse=138.5)

图 2 纹理图像去噪结果



图 3 平滑图像去噪结果

实验 2 使用 Lena 图像,小波方法用同样的方法重新选择最优阈值,新方法参数选择与前一组实验相同.实验结果如图 3 所示,小波方法中可以明显看到边缘的模糊现象,而分形去噪方法残留噪声较多,新方法结果的边缘仍然保持尖锐,没有造成对比度损失.均方误差数值同样显示新方法对平滑图像的去噪效果也优于原有方法.

## 4 结 论

本文针对现有去噪方法损失图像细节信息的问题,提出了一种新的图像去噪方法.新方法不假设图像平滑,利用 SGPCA 分析图像纹理模式并去除噪声,在去噪的同时能够很好地保留纹理信号.实验表明新方法确实能够同时恢复平滑图像和纹理图像.

## 参 考 文 献

- [1] Castleman K R. Digital Image Processing. New Jersey: Prentice-Hall, 1979
- [2] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259
- [3] Zhang Hong-Ying, Pen Qi-Cong. Adaptive image denoising model based on total variation. Opto-Electronic Engineering, 2006, 33(3): 50-53(in Chinese)  
(张红英, 彭启琮. 全变分自适应图像去噪模型. 光电工程, 2006, 33(3): 50-53)
- [4] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627
- [5] Zhou Z-F, Shui P-L. Contourlet-based image denoising algorithm using directional windows. Electronics Letters, 2007, 43(2): 92-93
- [6] Muresan D D, Parks T W. Adaptive principal components and image denoising//Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, 2003, 1: 1101-1104
- [7] Ghazel M, Freeman G H, Vrscaj E R. Fractal image denoising. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(12): 1560-1578
- [8] Ghazel M, Freeman G H, Vrscaj E R. Fractal-wavelet image denoising revisited. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(9): 2669-2675
- [9] Buades A, Coll B, Morel J-M. A non-local algorithm for image denoising//Proceedings of the IEEE CVPR. San Diego, CA, 2005, 2: 60-65
- [10] Weissman T, Ordentlich E, Seroussi G, Verdu S, Weinberger M J. Universal discrete denoising, Known channel. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 5-28
- [11] Jobson D J, Rahman Z, Woodell G A. Properties and performance of a center/surround retinex. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(3): 451-462
- [12] Tipping M E, Bishop C M. Mixtures of probabilistic principal component analyzers. Neural Computation, 1999, 11:

443

- [13] Vidal R, Ma Y, Sastry S. Generalized principal component analysis (GPCA). *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(12): 1945-1959
- [14] Cao Yang, Luo Yu-Pin, Yang Shi-Yuan. Subspace searching

based generalized principal component analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(12): 2151-2155 (in Chinese)

(曹扬, 罗予频, 杨士元. 子空间搜索广义主成分分析. *计算机学报*, 2007, 30(12): 2151-2155)



**CAO Yang**, born in 1979, Ph. D. . His research interests include image denoising and image representation.

**LUO Yu-Pin**, born in 1959, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include image processing, computer vision and computer aided design.

**YANG Shi-Yuan**, born in 1945, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include fault test and diagnosis of electric system, digital community and intelligent home network.

## Background

Most of previous image denoising methods assume image signal is piecewise smooth. This kind of method remove high-frequency signal from texture image. Some recent researches utilize self-similarity of image. These methods suppose that regions of one image are similar. They try to search for similar regions and from which extract underlying image patterns. Using the patterns, denoised image can be reconstructed. In general, smooth region and edge region can be

seen as two kinds of patterns. Smooth based method can only deal with these kinds of image regions. Self-similarity based method can deal with all kinds of image regions.

In this paper, a new self-similarity based method is proposed. New method supposes all image regions have only a few image patterns and every pattern form a subspace in the data space. Since noise is not limited in subspace, it can be canceled by project the noisy data onto the subspaces.