第 32 卷 第 10 期
2009 年 10 月

计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS

Vol. 32 No. 10
Oct. 2009

不同逻辑间翻译的逻辑性质

申宇铭[1),2)] 马 越[1),2)] 曹存根[1)] 眭跃飞[1)] 王 驹[3)]

[1)](中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室 北京 100190)

[2)](中国科学院研究生院 北京 100039)

[3)](广西师范大学 计算机科学与信息工程学院 广西 桂林 541004)

摘 要 如果考虑逻辑间模型的翻译并且一个逻辑的模型类被翻译为另一个逻辑的模型类的真子类,那么可靠的(the soundness)和完备的(the completeness)翻译可以将不可满足的公式翻译为可满足的公式.针对上述问题,该文提出了语义忠实(the faithfulness)和语义满(the fullness)两条逻辑性质来确保可满足的公式翻译为可满足的公式,不可满足公式翻译为不可满足公式.该文例证了二阶逻辑在标准语义下到一阶逻辑的翻译是语义忠实的但不是语义满的,在 Henkin 语义下是语义忠实的和语义满的.

关键词 翻译;语义忠实翻译;语义满翻译;二阶逻辑;一阶逻辑

中图法分类号 TP18 **DOI 号**: 10.3724/SP.J.1016.2009.02091

Logical Properties on Translations between Logics

SHEN Yu-Ming[1),2)] MA Yue[1),2)] CAO Cun-Gen[1)] SUI Yue-Fei[1)] WANG Ju[3)]

[1)](*Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

[2)](*Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

[3)](*School of Computer Science and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi* 541004)

Abstract Translating one logic into another logic in a satisfiability-preserving way does not immediately lead to the preservation of the unsatisfiability, if the models translation is taken into account and the class of models of the first logic is translated to a proper subclass of the class of models of the second logic. In this paper, two logical properties: the faithfulness and the fullness are defined to ensure the preservations of the satisfiability and the unsatisfiability. As an example, the translation from second-order logic into first-order logic is given. It is shown that under standard semantics, the translation is faithful but not full, whereas it is faithful and full under Henkin semantics.

Keywords translation; faithful translation; full translation; second-order logic; first-order logic

1 引 言

在人工智能知识表示领域根据不同的实际应用需求,人们可以使用多种不同的形式化工具表示知识.比如:直觉多值逻辑、模糊模态逻辑、描述逻辑等等.表达能力和推理任务是一个逻辑的两个重要的特征[1].面对这些不同形式的逻辑,如何比较它们在表达能力和推理任务上的差异,目前通常的做法是建立两个逻辑间的翻译,即把一个逻辑(源逻辑)翻

收稿日期:2009-07-15;最终修改稿收到日期:2009-08-25.本课题得到国家自然科学基金(60496326,60573063,60573064,60773059)与国家"八六三"高技术研究发展计划项目基金(2007AA01Z325)资助.**申宇铭**,男,1976 年生,博士研究生,主要研究领域为模态逻辑和描述逻辑.E-mail: shenyuming@ict.ac.cn. **马 越**,男,1984 年生,博士研究生,主要研究领域为模态逻辑和描述逻辑.**曹存根**,男,1964 年生,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为人工智能.**眭跃飞**,男,1963 年生,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为模态逻辑和本体工程.**王 驹**,男,1950 年生,博士,研究员,主要研究领域为人工智能.

译到另一个逻辑(目标逻辑)之上.

一个逻辑的表达能力可以从以下的 3 个角度来分析[1]:(1) 给定一个逻辑,什么样的符号串是该逻辑的公式(well-formed formula);(2) 一个逻辑公式的语义解释;(3) 利用翻译把一个逻辑翻译到另一个逻辑之上,然后比较两个逻辑的相对表达能力. 本文侧重从第 3 个角度来分析一个逻辑的表达能力. van Benthem[2]最早的系统研究了命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译(standard relational translation),在命题模态逻辑的表达能力方面得到了如下定理(称为 van Benthem 刻画定理,van Benthem characterization theorem):假定一阶逻辑的语言仅含一个二元关系符号和一元谓词符号,那么一阶公式 $\alpha(x)$ 等价于某个命题模态逻辑公式在标准关系翻译下的公式当且仅当该公式在互模拟关系下被保持,即其真假值在互模拟关系下被保持. 此后,以 van Benthem 刻画定理为起点,研究人员开展了一些后续的工作: Kurtonina 和 de Rijke[3] 在带 Since 和 Until 算子的时态逻辑(temporal logic)上建立了互模拟关系,建立了带 Since 和 Until 算子的时态逻辑到一阶逻辑的翻译,得到了与 van Benthem 刻画定理相似的结论. 随后,Kurtonina 和 de Rijke[4] 又借助描述逻辑到一阶逻辑的翻译,证明了一个一阶公式 $\alpha(x)$ 等价于描述逻辑的某个概念在该翻译下的公式当且仅当该公式在互模拟关系下被保持. Areces 和 de Rijke[5] 建立了描述逻辑到混合逻辑(hybrid logic)的翻译,在描述逻辑的表达能力上得到了与 van Benthem 刻画定理相似的结论. 除此之外,Baader[6] 定义了术语知识表示语言的表达能力,利用描述逻辑到一阶逻辑的翻译,来实现描述逻辑不同 TBox 之间表达能力的比较. Borgida[7] 利用描述逻辑到一阶逻辑的翻译,研究了不同描述逻辑与哪些一阶逻辑的子系统表达能力等价的问题.

一个逻辑的推理任务主要包括[1]:定理证明(theorem proving)、反例生成(counterexample generation)和模型检验(model checking). 本文侧重讨论翻译在定理证明中的应用. 翻译在定理证明方面的应用主要集中在如何利用模态逻辑到一阶逻辑的翻译和一阶逻辑的推理机来实现模态逻辑的定理证明,从而就没有必要专门为模态逻辑设计专门的推理机. de Nivelle 和 de Rijke[8] 以命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译为基础,研究了如何提高定理证明效率的问题. Ohlbach 和 Schmidt[9-10] 以命题模态逻辑到一阶逻辑函数式翻译(functional translation)为基础,研究了如何提高定理证明效率的问题. Nonnengart[11] 结合了命题模态逻辑到一阶逻辑标准关系翻译和函数式翻译的各自的优点,提出了半函数式翻译(semi-functional translation),并以此为基础研究如何提高定理证明的效率问题. 此外,Schmidt 和 Hustadt[12] 提出了命题模态逻辑到一阶逻辑带公理的翻译.

现有的许多翻译主要侧重讨论两个逻辑间语法的对应关系,建立逻辑语言间的翻译和公式间的翻译,验证这样的翻译具备如下两条逻辑性质:(1) 可靠性(the soundness). 对任意的公式 φ,如果 φ 可满足则翻译后的公式 φ' 也可满足. (2) 完备性(the completeness). 对任意的公式 φ,如果 φ' 可满足,则 φ 可满足. 由式(1)和式(2)可知,公式的可满足性在可靠和完备的翻译下被保持. 但是这样的翻译不保持不可满足性,即可靠的和完备的翻译可以将不可满足的公式翻译为可满足的公式. 例如:一阶模态逻辑到对应物理论(the counterpart theory)就有 3 种不同形式的可靠的和完备的翻译,Fara 和 Williamson[13] 举例指出这 3 种翻译均存在把一阶模态逻辑中不可满足公式翻译成对应物理论中的可满足公式. 造成这一问题的主要原因是在建立翻译的时候只是考虑了语言间的翻译和公式间的翻译,没有建立其相应的语义翻译.

针对上述问题,定义一个逻辑到另一个逻辑间的翻译由语法层翻译和语义层翻译组成. 语法层翻译是由逻辑语言间的翻译和公式间的翻译构成; 语义层翻译是由模型间的翻译和赋值间的翻译构成. 为了确保源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式,不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式,定义如下两条逻辑性质:

(1) 语义忠实. 对任意的公式 φ,对任意的源逻辑的模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v,$\mathfrak{M}, v$ 满足 φ 当且仅当翻译后的模型 $\mathfrak{M}'$ 和赋值 v' 也满足翻译后的公式 φ'.

(2) 语义满. 对任意的公式 φ,对任意的目标逻辑的模型 $\mathfrak{M}''$ 和赋值 v'',如果 $\mathfrak{M}'', v''$ 满足翻译后的公式 φ',则总存在 φ 的可满足模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v 使得 $\mathfrak{M}$ 翻译后等于 $\mathfrak{M}''$,v 翻译后等于 v''.

翻译的语义忠实性是一个翻译的可靠性和完备性之和; 语义满性是要求目标逻辑每一个满足 φ' 的模型和赋值,都能在源逻辑中找到相应的模型和赋值满足 φ. 根据语义忠实和语义满的定义,可以证明语义忠实的翻译将源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式; 语义忠实和语义满的翻译将源

逻辑的不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式.

按照这个思路，本文讨论了二阶逻辑到一阶逻辑的一个翻译，这样的翻译由二阶的语言、公式和模型到一阶逻辑的语言、公式和模型上的翻译组成. 由于二阶逻辑有两种语义：标准语义（standard semantics）和 Henkin 语义，我们可以证明：一般的二阶逻辑到一阶逻辑的翻译在标准语义下是语义忠实的，但不是语义满的，这样的翻译将不完备的二阶逻辑翻译为完备的一阶逻辑；而同样这样的翻译在 Henkin 语义下是语义忠实的和语义满的，这样保证了将 Henkin 语义下二阶逻辑的可满足公式和不可满足公式分别翻译为一阶逻辑的可满足公式和不可满足公式，从而将完备的 Henkin 语义下的二阶逻辑翻译为完备的一阶逻辑. 这里选择二阶逻辑到一阶逻辑的翻译仅仅是为了说明定义逻辑之间翻译的语义忠实性和语义满性的必要性. 这样的定义可以用来研究其它翻译及其逻辑性质，比如，一阶模态逻辑到对应物理论的翻译的语义忠实性和语义满性. 因为对于这样的逻辑之间的翻译是很复杂的，到目前为止还没有一个公认的判定一个逻辑翻译好坏的标准，而保持可满足性和不可满足性是翻译的基本要求.

本文第 2 节，根据一个逻辑是由逻辑语言、语法和语义 3 个部分组成，给出逻辑间翻译、语义忠实翻译和语义满翻译 3 个定义，证明公式的可满足性和不可满足性在语义忠实和语义满的翻译下被保持；第 3 节给出一个二阶逻辑到一阶逻辑的翻译，并证明上述翻译在标准语义下是语义忠实的但不是语义满的翻译，在 Henkin 语义下是语义忠实和语义满的翻译；第 4 节是本文的结论和工作展望.

为了讨论问题方便，对本文所涉及的数学符号作如下约定：我们用$\mathcal{S}$表示一个逻辑，$\mathcal{L}$表示逻辑$\mathcal{S}$所在的逻辑语言；$\models$表示可满足关系；假定$\mathcal{S}$的逻辑语言$\mathcal{L}$不含相等符号.

2　准备工作

本节将给出逻辑间翻译、语义忠实翻译和语义满翻译 3 个定义并证明公式的可满足性和不可满足性在语义忠实和语义满翻译下被保持. 一个逻辑是由逻辑的语言、语法和语义组成，其中语法部分有公式形成规则、推理公理和推理规则组成的公理系统；语义部分由模型和赋值组成. 比如，一阶逻辑是由如下的 3 个部分组成.

① 一阶逻辑的语言$\mathcal{L}$包含下列符号：

个体常元：$c_0, c_1, \cdots$；

个体变元：$x_0, x_1, \cdots$；

谓词符号[①]：$p_0, p_1, \cdots$；

逻辑联结词[②]：$\neg, \rightarrow$；

量词符号：$\forall$；

标点符号：(，).

一阶逻辑的一个公式是一个符号串，定义为

$$\varphi = p(t_1, t_2, \cdots, t_n) \mid \neg\psi \mid \psi \rightarrow \theta \mid \forall x\psi(x),$$

其中 p 是一个 n 元谓词符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为一阶逻辑的项.

② 一阶逻辑的推理公理.

(A1) $\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \varphi)$；

(A2) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$；

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$；

(A4) $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$，$t$ 相对于 x 在 φ 中自由；

(A5) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$，$x$ 不在 φ 中自由出现.

③ 一阶逻辑的推理规则.

(R1) 分离规则：由 φ 和 $\varphi \rightarrow \psi$ 得 ψ；

(R2) 推广规则：由 φ 得 $\forall x\varphi$.

一阶逻辑的一个模型 $\mathfrak{M}$ 是一个二元组(U, I)，其中 U 为一个非空集合，I 是一个解释，使得对任意的个体常元 c，$I(c) \in U$；对 n 元谓词符号 p，$I(p) \subseteq U^n$.

一个赋值函数 v 是个体变元集合到模型论域上的一个函数，使得对任何个体变元 x，$v(x) \in U$.

本文暂时先不讨论两个逻辑之间的推理公理和推理规则的对应关系. 定义一个逻辑到另一个逻辑间的翻译由语法层翻译和语义层翻译组成. 语法层翻译是由逻辑语言间的翻译和公式间的翻译构成；语义层翻译是由模型间的翻译和赋值间的翻译组成. 令 $Form(\mathcal{L})$表示$\mathcal{S}$上全体公式所构成的集合；$Mod(\mathcal{L})$表示$\mathcal{S}$上所有模型所构成的集合；$v(\mathcal{L})$是$\mathcal{S}$上所有赋值所构成的集合，给出如下$\mathcal{S}$到$\mathcal{S}'$翻译的定义.

定义 1.　给定两个逻辑$\mathcal{S}$和$\mathcal{S}'$，一个$\mathcal{S}$到$\mathcal{S}'$的翻译 σ 是满足如下条件的一个映射：

(1) 语法层. 对$\mathcal{L}$中的任意非逻辑符号 s，σ 映射 s 为$\mathcal{L}'$中的非逻辑符号；对 $Form(\mathcal{L})$中的任意公式 φ，σ 映射 φ 为 $Form(\mathcal{L}')$中的公式.

---

① 在本文中用元变量符号 p, c, x 分别表示谓词符号、常量符号、变量符号.

② 联结词只考虑$\neg, \rightarrow$对于其它二元连接词：$\vee$，$\wedge$ 分别可以定义为 $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi$，$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

(2) 语义层. 对 $Mod(\mathcal{L})$ 中的任意模型 $\mathfrak{M}$，σ 映射 $\mathfrak{M}$ 为 $Mod(\mathcal{L}')$ 中的模型；对 $v(\mathcal{L})$ 中的任意赋值 v，σ 映射 v 为 $v(\mathcal{L}')$ 中的赋值.

定义 1 要求源逻辑的一个解释翻译为目标逻辑的一个解释，源逻辑的一个赋值翻译为目标逻辑的一个赋值，但是并不是所有的逻辑语言都包含变量符号，比如命题逻辑、命题模态逻辑. 因此，如果两个逻辑语言都包含变量符号，那么源逻辑的赋值被映射为目标逻辑的赋值；如果两个逻辑语言都不包含变量符号，那么两个逻辑没有赋值间的对应关系，比如命题逻辑到直觉命题逻辑的翻译；如果两个逻辑语言中的一方含变量符号而另一方不含变量符号，那么映射 σ 应理解为一个偏函数，即允许赋值间没有对应关系，比如命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译.

令 $\sigma(Mod(\mathcal{L}))=\{\sigma(\mathfrak{M})$[①] $|\mathfrak{M}\in Mod(\mathcal{L})\}$. 如果 $\sigma(Mod(\mathcal{L}))$ 是 $Mod(\mathcal{L}')$ 的真子类，那么源逻辑的不可满足公式有可能翻译为目标逻辑的可满足公式. 为了确保源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式，不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式，定义如下两条逻辑性质.

定义 2. 设 σ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的一个翻译，如果 σ 满足：对于任意给定的 $\mathcal{S}$ 上的公式 φ，模型 $\mathfrak{M}$，赋值 v，都有 $(\mathfrak{M},v)\models\varphi$ 当且仅当 $(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))\models\sigma(\varphi)$，则称 σ 为一个语义忠实的翻译.

由定义 2 可得：公式的可满足性在语义忠实的翻译下被保持.

命题 1. 如果 σ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的一个语义忠实的翻译，那么对 $\mathcal{S}$ 的任意的公式 φ，φ 在 $\mathcal{S}$ 中可满足当且仅当 $\sigma(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}'$ 中可满足.

定义 3. 设 σ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的一个翻译，如果 σ 满足：对于任意给定的 $\mathcal{S}$ 上的公式 φ，任意的 $\mathcal{S}'$ 模型 $\mathfrak{M}'$，赋值 v' 都有：如果 $(\mathfrak{M}',v')\models\sigma(\varphi)$，那么存在 $\mathcal{S}$ 的模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v 使得 $(\mathfrak{M},v)\models\varphi$ 并且 $\sigma(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}'$，$\sigma(v)=v'$，则称 σ 为一个语义满的翻译.

定义 1、定义 2 和定义 3 与 Kerber[14] 给出的逻辑映射(morphism of logics)、可靠性(soundness)和完备性(completeness)3 个定义的区别是定义 1、定义 2 和定义 3 明确了语义间的对应关系，建立了逻辑间语义翻译.

由定义 1 至定义 3，下面证明如果一个翻译 σ 是语义忠实和语义满的翻译，那么源逻辑的不可满足公式被翻译为目标逻辑的不可满足公式.

命题 2. 如果一个翻译 σ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的既语义忠实又语义满的翻译，那么对 $\mathcal{S}$ 的任意公式 φ，φ 在 $\mathcal{S}$ 中不可满足当且仅当 $\sigma(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}'$ 中不可满足.

证明. 假设 φ 在 $\mathcal{S}$ 中不可满足但是 $\sigma(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}'$ 中可满足，那么存在模型 $\mathfrak{M}'$ 和赋值 v' 使得 $(\mathfrak{M}',v')\models\sigma(\varphi)$. 因为 σ 是语义满翻译，所以就有：$\mathcal{S}$ 的模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v 使得 $(\mathfrak{M},v)\models\varphi$. 这与 φ 在 $\mathcal{S}$ 中不可满足矛盾. 反之，若 $\sigma(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}'$ 中不可满足，但是 φ 在 $\mathcal{S}$ 中可满足，那么存在 $\mathcal{S}$ 模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v 使得 $(\mathfrak{M},v)\models\varphi$. 因为 σ 是语义忠实的翻译，所以就有 $(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))\models\sigma(\varphi)$. 这与 $\sigma(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}'$ 中不可满足矛盾. 证毕.

3 二阶逻辑到一阶逻辑翻译的逻辑性质

二阶逻辑的语言是在一阶逻辑的语言基础上，通过在一阶语言中添加函数变量符号和谓词变量符号所得. 与一阶逻辑只有一种语义不同，二阶逻辑有两种语义：一种是标准语义；另一种是 Henkin 语义. 如果二阶逻辑采用的是标准语义，那么完备性定理、紧致性定理和 Löwenheim-Skolem 定理在二阶逻辑中均不成立；如果二阶逻辑采用的是 Henkin 语义，那么完备性定理、紧致性定理和 Löwenheim-Skolem 定理在二阶逻辑中都成立.

3.1 二阶逻辑在标准语义下到一阶逻辑翻译的逻辑性质

下面我们将个体变元称为一阶变量符号，函数变量符号和谓词变量符号称为二阶变量符号. 二阶逻辑的逻辑语言 $\mathcal{L}$ 包含下列符号：

n 元谓词符号：$p_0, p_1, \cdots$；

特殊关系符号：$\in'$；

逻辑联结词：$\neg, \rightarrow$；

全称量词符号：$\forall$；

一阶变量符号：$x_0, x_1, \cdots$；

二阶变量符号：$X_0, X_1, \cdots$；

标点符号：(,).

二阶逻辑的一个公式是一个符号串，定义为

$$\varphi = x\in' X \,|\, p(t_1, t_2, \cdots, t_n)^{②} \,|\, \neg\psi \,|\, \psi\rightarrow\theta \,|\, \forall x\psi(x) \,|\, \forall X\psi(X).$$

二阶逻辑的模型 $\mathfrak{M}$ 是一个二元组 (U,I)，其中

---

① $\sigma(\mathfrak{M})$ 表示 $\mathcal{S}$ 的模型 $\mathfrak{M}$ 在翻译 σ 的作用下所得的 $\mathcal{S}'$ 的模型，类似的 $\sigma(\varphi)$，$\sigma(v)$，$\sigma(t)$ 分别表示 $\mathcal{S}$ 的公式 φ、赋值 v 和项 t 在翻译 σ 作用下所得的 $\mathcal{S}'$ 的公式、赋值和项.

② $p(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是带类型的 n 元谓词公式. 设 τ^1，τ^2 是两个类型变量，如果 τ 和 τ' 是类型，则 $\tau\rightarrow\tau'$，(τ,τ') 是类型. 定义项上的类型 τ，使得对任何一阶项 t，$\tau(t)=\tau^1$；对任何二阶项 T，$\tau(T)=\tau^2$. 给定一个类型为 $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ 的谓词 p，其中 τ_i 是原子类型(即或者是 τ^1 或者是 τ^2)对于项 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，$p(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 是一个公式当且仅当对每一个 $1\leq i\leq n$，$\tau(s_i)=\tau_i$. 特别地，$\in$ 的类型为 (τ^1,τ^2).

U 为一个非空集合，I 是一个解释，使得 p^I 是 U 上的带类型的关系；$\in'^I=\in$，这里 $\in'^I$ 表示 $U\times 2^U$（2^U 表示集合 U 的幂集）上的二元关系.

一个赋值函数 v 是变量集合到模型论域上的一个函数：对任何一阶变量 x，$v(x)\in U$①；对任何二阶变量 X，$v(X)\subseteq U$.

设 σ 是二阶逻辑到一阶逻辑的翻译，翻译以后的一阶逻辑语言 $\mathcal{L}'$ 含有如下特殊谓词符号：

E：$E(x)$ 表示 x 是一个个体项；

S：$S(y)$ 表示 y 是一个集合项；

H：$H(x,y)$ 表示 x 是 y 的元素.

设 x,y 是一阶逻辑中两类变量的元变量，使得对任何二阶逻辑中元变量 x，$\sigma(x)=x$，对任何二阶逻辑中的元变量 X，$\sigma(X)=y$. 下面给出公式间的对应关系：

$$\sigma(\varphi)=\begin{cases} E(x)\wedge S(y)\wedge H(x,y), & \text{如果 } \varphi=x\in' X \\ k_1(\sigma(t_1))\wedge\cdots\wedge k_n(\sigma(t_n))\wedge p(\sigma(t_1),\cdots,\sigma(t_n)), & \\ \qquad\qquad \text{如果 } \varphi=p(t_1,t_2,\cdots,t_n) & \\ \neg\sigma(\psi), & \text{如果 } \varphi=\neg\psi \\ \sigma(\psi)\rightarrow\sigma(\theta), & \text{如果 } \varphi=\psi\rightarrow\theta \\ \forall x(E(x)\rightarrow\sigma(\psi(x))), & \text{如果 } \varphi=\forall x\psi(x) \\ \forall y(S(y)\rightarrow\sigma(\psi(y))), & \text{如果 } \varphi=\forall X\psi(X) \end{cases}$$

其中如果 t_i 为个体项，则 $k_i(\sigma(t_i))=E(x_i)$；如果 t_i 为集合项，则 $k_i(\sigma(t_i))=S(y_i)$.

给定一个二阶逻辑的模型和赋值 $(\mathfrak{M},v)$，定义一个一阶逻辑的模型 $\mathfrak{M}'=(U',I')$ 和赋值 v'，即

$$(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))=(U',I',v')=(\mathfrak{M}',v'),$$

其中

$U'=U\cup 2^U$；

$(\sigma(t_1)^{I',v'},\sigma(t_2)^{I',v'},\cdots,\sigma(t_n)^{I',v'})\in p^{I'}$ 当且仅当 $(t_1^{I,v},t_2^{I,v},\cdots,t_n^{I,v})\in p^I$；这里

$$t_i^{I,v}=\begin{cases} v(x), & \text{如果 } t_i=x \\ v(X), & \text{如果 } t_i=X \end{cases}$$

$v'(x)=v(x)$；

$v'(y)=v(X)$；

$E^{I'}=U$；

$S^{I'}=2^U$；

$(v'(x),v'(y))\in H^{I'}$ 当且仅当 $v(x)\in'^I v(X)$.

二阶逻辑到一阶逻辑的翻译整个过程见图 1.

在图 1 中 $\varphi(x,X)$ 表示二阶逻辑的公式，其中 x 为公式 $\varphi(x,X)$ 中一阶自由变元，它被赋值 v 指派为集合 U 中的元素 a；X 为公式 $\varphi(x,X)$ 中二阶自由变元，它被赋值 v 指派为集合 2^U 中的元素 A；经过翻译 σ 作用后，$\varphi(x,X)$ 变为 $E(x)\wedge S(y)\wedge\varphi(x,y)$，其中 $E(x)$ 表示 x 是一个个体项，x 被赋值 v' 指派为 $E^{I'}$ 中的元素 a；$S(y)$ 表示 y 是一个集合项，y 被赋值 v' 指派为 $S^{I'}$ 中的元素 A. 根据定义 2 施归纳于公式 φ 的结构可以证明本文给出的二阶逻辑到一阶逻辑的翻译是语义忠实的翻译.

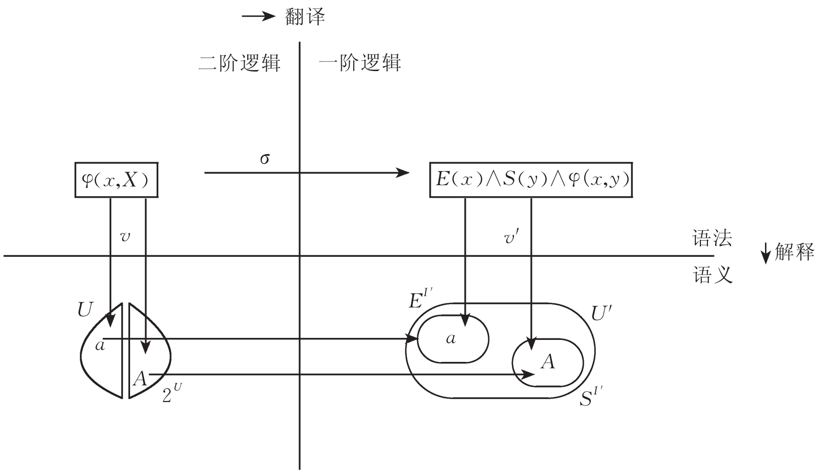

图 1　二阶逻辑到一阶逻辑的翻译过程

定理 1.　二阶逻辑到一阶逻辑的翻译是语义忠实的翻译.

证明.　根据模型的构造，施归纳于公式 φ 的结构. 这里仅列举 $\varphi=x\in' X$ 和 $\varphi=\forall X\psi(X)$ 两种情形，其它情形的证明是类似的.

情形 1. 若 $\varphi=x\in' X$，则 $\sigma(\varphi)=E(x)\wedge S(y)\wedge H(x,y)$.

$$(\mathfrak{M},v)\models x\in' X.$$

当且仅当

① $\in'^I=\in$ 表示 $U\times 2^U$ 上的一个二元关系，是结构上的二元关系，而 $v(x)\in U$ 中的 $\in$ 是元语言的二元关系，在本文中用同一个符号来表示.

$a\in U, A\subseteq U$ 使得 $v(x)=a, v(X)=A$ 并且 $a\in A$.

当且仅当

$$a\in E^{I'},\ A\in S^{I'},\ (a,A)\in H^{I'},$$

$$v'(x)=\sigma(v)(x)=a,\ v'(y)=\sigma(v)(y)=A.$$

当且仅当

$$(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))\models E(x)\wedge S(y)\wedge H(x,y).$$

情形 2. 若 $\varphi=\forall X\psi(X)$, 则 $\sigma(\varphi)=\forall y(S(y)\rightarrow\sigma(\psi(y)))$.

$$(\mathfrak{M},v)\models\forall X\psi(X).$$

当且仅当

对任意的 $A\in 2^U$, 就有 $(\mathfrak{M},v)\models\psi(X/A)$.

当且仅当(归纳假设)

$$(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))\models\sigma(\psi(X/A)).$$

当且仅当

$$(\sigma(\mathfrak{M}),\sigma(v))\models\forall y(S(y)\rightarrow\sigma(\psi(y))).$$ 证毕.

下面我们证明上述翻译不是语义满的翻译. 令 $Mod(\mathcal{L}_1)$, $Mod(\mathcal{L}_2)$ 分别表示一阶逻辑的模型类和二阶逻辑的模型类. 假设公式 $\forall X\psi(X)$ 有无限模型, 那么 $\mathfrak{M}\models\forall X\psi(X)$ 当且仅当对论域 U 的所有子集 A 都有 $\mathfrak{M}\models\psi(X/A)$. 给定一个二阶模型 $\mathfrak{M}$, 构造相应的一阶模型 $\sigma(\mathfrak{M})$ 其中论域 $U'=U\cup 2^U$; 特殊谓词符号 S 的解释: $S^{I'}=2^U$. $\sigma(\mathfrak{M})\models\forall y(S(y)\rightarrow\sigma(\psi(y)))$ 当且仅当对所有的 $A\in S^{I'}=2^U$ 都有 $\sigma(\mathfrak{M})\models S(y/A)\rightarrow\sigma(\psi(y/A))$. 即由满足公式 $\forall X\psi(X)$ 二阶模型 $\mathfrak{M}$ 构造的一阶模型 $\sigma(\mathfrak{M})$ 都是不可数模型. 但是根据 Löwenheim-Skolem 定理: 一阶逻辑的一个句子如果有无限模型则必有可数模型, 从而存在可数模型 $\mathfrak{N}\in Mod(\mathcal{L}_1)$, $\mathfrak{N}\notin\sigma(Mod(\mathcal{L}_2))$ 满足 $\mathfrak{N}\models\forall y(S(y)\rightarrow\sigma(\psi(y)))$. 由此可得下列定理.

定理 2. 二阶逻辑到一阶逻辑的翻译不是语义满的翻译. 证毕.

定理 1 和定理 2 的结果说明了本节给出的二阶逻辑到一阶逻辑的翻译是语义忠实的但不是语义满的翻译, 从而公式的不可满足性未必在该翻译下被保持. 这一结果也对应了 Boolos[15] 所指出的, 二阶逻辑公式到一阶集合论公式的翻译没有把二阶永真公式翻译为集合论的定理.

3.2 二阶逻辑在 Henkin 语义下到一阶逻辑翻译的逻辑性质

本小节讨论如何建立二阶逻辑到一阶逻辑既语义忠实又语义满的翻译问题. 首先证明如果源逻辑能够既语义忠实又语义满地翻译到目标逻辑之上, 那么若紧致性定理在目标逻辑中成立, 则紧致性定理在源逻辑中成立.

命题 3. 如果 σ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 既语义忠实又语义满的翻译, 那么若紧致性定理在 $\mathcal{S}'$ 中成立, 则紧致性定理在 $\mathcal{S}$ 中成立.

证明. 对任意的公式集合 $\Phi\subseteq Form(\mathcal{L})$ 和任意的有穷公式集合 $\Psi_0\subseteq\sigma(\Phi)$, 则存在 Φ 的有穷公式集合 Φ_0 使得: $\sigma(\Phi_0)=\Psi_0$. 因为 σ 是语义忠实的翻译, 所以就有如果 Φ_0 可满足, 那么 Ψ_0 也可满足. 由于紧致性定理在 $\mathcal{S}'$ 中成立, 所以就有 $\sigma(\Phi)$ 是可满足的, 又因为 σ 是语义满翻译, 从而就有 Φ 是可满足的. 证毕.

由于紧致性定理在一阶逻辑中成立, 但在二阶逻辑(标准语义)中不成立. 根据命题 3, 为了建立二阶逻辑到一阶逻辑既语义忠实又语义满的翻译, 可以采用如下的方法: 把二阶逻辑的标准语义扩展为 Henkin 语义, 即允许每个二阶变量的都有自己特定的论域.

二阶逻辑在 Henkin 语义下的模型 $\mathfrak{M}$ 是一个三元组 $(U,\{A_n\}_{n\in N},I)$, 其中 U 为一个非空集合, A_n 为 2^U 的非空子集, 表示二阶变量 X_n 的取值域是 A_n, I 是一个解释, 使得 p^I 是 U 上带类型的关系.

一个赋值函数 v 是变量集合到模型论域上的一个函数: 对任何一阶变量 x, $v(x)\in U$; 对任何二阶变量 X_n, $v(X_n)\subseteq A_n$.

设 σ' 是二阶逻辑在 Henkin 语义下到一阶逻辑的翻译, σ' 的语法层翻译与 σ 的语法层翻译类似; 不同的是: 由于每个二阶变量 X_n 都有自己特定的论域 A_n, 所以在翻译以后的一阶逻辑的语言, 对每一个二阶变量 X_n 对应一个特殊的一元谓词符号 S_n. 由此, $\sigma'(\forall X_n\psi(X_n))=\forall y(S_n(y)\rightarrow\sigma'(\psi(y)))$.

语义层翻译, 给定一个二阶逻辑在 Henkin 语义下的模型和赋值 $(\mathfrak{M},v)$, 定义一个一阶逻辑的模型 $\mathfrak{M}'=(U',I')$ 和赋值 v', 即

$$(\sigma'(\mathfrak{M}),\sigma'(v))=(U',I',v')=(\mathfrak{M}',v'),$$

其中

$U'=U\cup 2^U$;

$(\sigma(t_1)^{I',v'},\sigma(t_2)^{I',v'},\cdots,\sigma(t_n)^{I',v'})\in p^{I'}$ 当且仅当 $(t_1^{I,v},t_2^{I,v},\cdots,t_n^{I,v})\in p^I$;

$v'(x)=v(x)$;

$v'(y)=v(X)$;

$E^{I'}=U$;

$S^{I'}=A_n$;

$(v'(x), v'(y)) \in H^{I'}$ 当且仅当 $v(x) \in'^{I} v(X)$.

根据模型的构造，施归纳于公式的结构可以证明 σ' 是语义忠实的翻译. 证毕.

定理 3. 二阶逻辑在 Henkin 语义下到一阶逻辑的翻译 σ' 是语义忠实的翻译.

下面我们证明 σ' 是语义满的翻译.

定理 4. 二阶逻辑在 Henkin 语义下到一阶逻辑的翻译 σ' 是语义满的翻译.

证明. 任意给定一阶逻辑的模型 $\mathfrak{M}'$ 和赋值 v'，构造一个二阶逻辑的 Henkin 模型 $\mathfrak{M}$ 和赋值 v 如下：

$U = E^{I'}$；

$(t_1^{I,v}, t_2^{I,v}, \cdots, t_n^{I,v}) \in p^I$ 当且仅当 $(\sigma(t_1)^{I',v'}, \cdots, \sigma(t_n)^{I',v'}) \in p^{I'}$；

$v(x) = v'(x)$；

$v(X) = v'(y)$；

$v(x) \in'^{I} v(X)$ 当且仅当 $(v'(x), v'(y)) \in H^{I'}$；

$A_n = S_n^{I'}$.

根据模型的构造，施归纳于合式公式的结构可证 σ' 是语义满的翻译. 证毕.

4 总结及进一步的工作展望

本文定义一个逻辑到另一个逻辑间的翻译是由语法层翻译和语义层翻译组成. 语法层翻译是由逻辑语言间的翻译和公式间的翻译构成；语义层翻译是由模型间的翻译和赋值间的翻译构成. 为了确保源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式，不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式，本文定义了翻译的两条逻辑性质：语义忠实性和语义满性. 语义忠实性保证公式 φ 可满足当且仅当翻译后的公式 φ' 可满足. 语义满性是要求目标逻辑每一个满足 φ' 的模型和赋值，都能在源逻辑中找到相应的模型和赋值满足 φ. 利用上述定义，本文讨论了二阶逻辑到一阶逻辑的一个翻译，证明了上述翻译在标准语义下是语义忠实的但不是语义满的翻译，在 Henkin 语义下是语义忠实的和语义满的翻译.

在翻译、语义忠实翻译和语义满翻译 3 个基本定义的基础上，下一步要建立逻辑间规则之间的对应关系并给出带公理的逻辑间翻译的定义并解决一阶模态逻辑到对应物理论翻译中出现的把不可满足公式翻译为可满足公式的问题.

致 谢 作者衷心感谢评审专家提出的宝贵意见！

参 考 文 献

[1] Ohlbach H, Nonnengart A, de Rijke M, Gabbay D. Encoding two-valued non-classical logics in classical logic//Robinson A, Voronkov A eds. Handbook of Automated Reasoning. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2001: 1403-1486

[2] van Benthem J. Modal correspondence theory [Ph. D. dissertation]. University of Amsterdam, Netherlands, 1976

[3] Kurtonina N, de Rijke M. Bisimulation for temporal logic. Journal of Logic, Language and Information, 1997, 6(4): 403-425

[4] Kurtonina N, de Rijke M. Expressive of concept expression in first-order description logics. Artificial Intelligence, 1999, 107(2): 303-333

[5] Areces C, de Rijke M. From description to hybrid logics, and back//Wolter F et al eds. Advanced in Modal Logic. Stanford: GSLI Publications, 2002, 3: 17-36

[6] Baader F. A formal definition for the expressive power of terminological knowledge representation languages. Journal of Logic and Computation, 1996, 6(1): 33-54

[7] Borgida A. On the relative expressiveness of description logics and predicate logics. Artificial Intelligence, 1996, 82(1-2): 353-367

[8] de Nivelle H, de Rijke M. Deciding the guarded fragments by resolution. Journal of Symbolic Computation, 2003, 35(1): 21-58

[9] Ohlbach H. Semantics based translation methods for modal logics. Journal of Logic and Computation, 1991, 1(5): 691-746

[10] Ohlbach H, Schmidt R. Functional translation and second-order frame properties of modal logics. Journal of Logic and Computation, 1997, 7(5): 581-603

[11] Nonnengart A. First-order modal logic theorem proving and functional simulation//Bajcsy R ed. Proceedings IJCAI-13, Vol. 1. Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 80-85

[12] Schmidt R, Hustadt U. The axiomatic translation principle for modal logic. ACM Transactions on Computational Logic, 2007, 8(4): 1-55

[13] Fara M, Williamson T. Counterparts and actuality. Mind, 2005, 114(453): 1-30

[14] Kerber M. How to prove higher order theorems in first order logic//Mylopoulos J, Reiter R eds. Proceedings of IJCAI'91, Sydney, 1991: 137-142

[15] Boolos G. On second-order logic. Journal of Philosophy, 1975, 72(16): 509-527

SHEN Yu-Ming, born in 1976, Ph. D. candidate. His research interests include modal logic and description logics.

MA Yue, born in 1984, Ph. D. candidate. His research interests include modal logic and description logics.

CAO Cun-Gen, born in 1964, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests focus on artificial intelligence.

SUI Yue-Fei, born in 1963, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include modal logic and ontology engineering.

WANG Ju, born in 1950, Ph. D., professor. His research interests focus on artificial intelligence.

Background

The expressive power and the reasoning tasks are the two most important properties of a logic. Setting up a translation from one logic into another logic is a usual way to compare the expressive power and the reasoning tasks of logics. Many translations have the following two logical properties: the soundness and the completeness. However, the soundness and the completeness do not immediately lead to the preservation of the unsatisfiability, if the models translation is taken into account and the class of models of the first logic is translated to a proper subclass of the class of models of the second logic.

In the paper, two logical properties: the faithfulness and the fullness are defined to ensure the preservations of the satisfiability and the unsatisfiability. As an example, the translation from second-order logic into first-order logic is discussed. We show that under standard semantics the translation is faithful but not full, whereas it is faithful and full under Henkin semantics.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 60496326, 60573063, 60573064, 607730 and the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No. 2007AA01Z325.