

一类新的正交样条函数——Franklin 函数的推广及其应用

蔡占川¹⁾ 陈伟¹⁾ 齐东旭^{1),2)} 唐泽圣^{1),3)}

¹⁾(澳门科技大学资讯科技学院 澳门)

²⁾(中山大学信息科学与技术学院 广州 510275)

³⁾(清华大学信息科学技术学院 北京 100084)

摘 要 为了探索样条曲线曲面的正交表达及其频谱性质,提出了一类新的 k 次正交样条函数——Franklin 函数的推广,简称为 k 次 GF 系统. Haar 函数及 Franklin 正交函数恰好分别是 GF 系统当 $k=0$ 及 $k=1$ 时的特殊情形. 基于 GF 系统,给出了用以计算样条曲线曲面频谱的信息转换算法,该算法具有直观、简便、快速的特点. 构建的数据处理平台可用于样条曲线曲面的分析与综合;实验表明有限项 GF 系统能够实现一类几何造型的精确重构,而有限项傅立叶正交函数则不能精确重构该原图.

关键词 正交;GF 系统;曲线曲面;频谱

中图法分类号 TP391 DOI 号: 10.3724/SP.J.1016.2009.02004

A Class of General Franklin Functions and Its Application

CAI Zhan-Chuan¹⁾ CHEN Wei²⁾ QI Dong-Xu³⁾ TANG Ze-Sheng^{1),3)}

¹⁾(Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macau)

²⁾(School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)

³⁾(School of Information Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract In order to explore orthogonal representation and the property of frequency spectrum for parametric spline curves and surfaces, a class of orthogonal spline functions system, named as GFsystem, is proposed. Based on GFsystem, the transfer processes are described, by which frequency spectrum is obtained for a given spline curves and surfaces. The algorithm is visible, simple and fast; the program for processing data can be used to analyze and synthesize spline curves and surfaces. Experiments demonstrate that GFsystem proposed is more suitable for representing spline curves and surfaces than Fourier function system.

Keywords orthogonal; GFsystem; curves and surfaces; frequency spectrum

1 引 言

曲线曲面造型是计算机辅助几何设计和计算机

图形学的一项重要内容,也是 CAD/CAM 系统的最关键的部分之一,其应用范围除了航空、造船、汽车这三大制造业外,还涉及医疗诊断、生物工程等设计领域^[1]. 样条方法,尤其是 B 样条方法,具有表示、

收稿日期:2009-07-15;最终修改稿收到日期:2009-08-27. 本课题得到澳门科技发展基金项目(003/2008/A1,008/2008/A1)、国家自然科学基金重点项目(10631080)和国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2004CB318000)资助. 蔡占川,男,博士,助理教授,主要研究方向为计算机图形学、月球数据处理与分析及多媒体信息安全等. E-mail: zccai@must.edu.mo. 陈伟,男,硕士研究生,主要研究方向为计算机图形学和信号处理等. 齐东旭,男,1940年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机图形学与数值逼近等. 唐泽圣,男,1932年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机图形学、虚拟现实及可视化等.

设计自由型曲线曲面的强大功能,是目前 CAGD 领域关于曲线曲面造型的重要工具.样条曲线指由多项式曲线段连接而成的曲线,在每段的边界满足特定的连续性条件.为了深入开展 CAGD 中通常的样条函数构成的曲线曲面的分析与综合以及相关数据发掘方面的研究,有必要探讨该样条曲线曲面的正交表达并做相应的频谱分析.目前,曲线曲面造型很少像图像一样进行频谱分析.值得注意的问题是应该选择什么样的正交函数进行频谱分析.

事实上,正交函数不仅在数学理论上发挥重要的作用,而且在信号处理、线性系统、滤波、量子场论、药学等方面表现了极高的应用价值^[2-11].在计算机图形学中,它是图像表达与分析的重要数学工具.18 世纪 80 年代,法国数学家傅立叶(Fourier, Joseph, 1768~1830)建立了 Fourier 分析理论的基础,Fourier 函数是标准化的正交函数系,它是历史上最早、最重要的正交系之一.1910 年,匈牙利数学家 Haar 定义了一个正交完备函数系,称为 Haar 函数.1922 年,德国数学家 Rademacher 提出了另一个正交函数系 Rademacher 函数,但它不是完备的.1923 年,美国数学家 Walsh 将 Rademacher 函数加以完备化,提出了一个标准完备函数系——Walsh 函数.在多项式函数空间,人们对正交多项式函数系的研究也从来没有间断过.18 世纪,法国数学家 Legendre 提出了著名的 Legendre 多项式.19 世纪,俄国数学家 Chebyshev 从研究机械原理出发,研究了用多项式逼近连续函数的问题,建立了偏离零最小函数的理论,他为此构造了著名的 Chebyshev 多项式.19 世纪中后期,法国数学家 Laguerre 提出 Laguerre 多项式就是 Laguerre 微分方程 $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ 的解,它在谐波方面有着广泛应用.20 世纪 80 年代初,文献[8]提出了一类完备正交 k 次分段多项式函数系——U 系统,在当时给出了较完整的理论基础.U 系统囊括了光滑、强间断与各层次的弱间断函数,因而可以对相当广泛的一类复杂信号做到有限且精确的表达.2005 年,文献[10]又研究了 $L_2[0,1]$ 上的另一类完备正交函数系——V 系统,它具有多分辨特性,是一类实用的多小波函数.这些正交函数都在相应的领域发挥着重要作用.但是对 CAGD 中通常的样条函数构成的曲线曲面,应该选择什么样的正交函数系更为恰当,最重要的一点是:曲线曲面在该正交系下有限项分解能够精确重构原图,并且具有比 U、V 系统更高的效率.我们的研究聚焦于一类恰当的正交样条函数的构造及其正交表达.

本文首先提出一类新的 k 次正交样条函数,简称为 k 次 GF 系统.这里 k 为自然数,以下同.熟知的 Haar 函数及 Franklin 正交函数,恰好分别是该 GF 系统当 $k=0$ 及 $k=1$ 时的特殊情形.其次,给出了用以计算给定曲线曲面频谱的信息转换算法;然后,讨论了 GF 系统在一类几何造型正交表达中的应用.最后,给出了实验测试图例.

2 正交样条函数

为了构造 k 次正交样条函数——Franklin 函数的推广,即 k 次 GF 系统,需从熟知的 Franklin 函数^[11]谈起.在分析理论中熟知,对于任意给定的 $t_0 \in [-\pi, \pi]$,总存在连续函数 $f(t)$,使得它的 Fourier 级数在 t_0 处发散.然而,Franklin 证明了,设 $F(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数,则级数 $\sum_{i=0}^{\infty} \langle F, \varphi_i \rangle \varphi_i$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.这里, φ_i 为正交 Franklin 函数. Franklin 的结论说明,这不是连续正交函数系的共同性质,因此具有重要的理论价值,遗憾的是——一直未见到 Franklin 函数在实际中的应用^[12].本文试图推广 Franklin 函数并将探讨其在一类几何造型中的应用.

2.1 Franklin 函数

Franklin 函数是 Philip Franklin 于 1928 年给出的函数系,它是由 $L_2[0,1]$ 上可数无穷多个函数组成的.其构造过程如下:考虑如下的线性无关的函数组 $\{V_{1,n}(t)\}$:

$$V_{1,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{1,1}(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{1,2}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ t-1/2, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$V_{1,3}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/4 \\ t-1/4, & 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$V_{1,4}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3/4 \\ t-3/4, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

...

$$V_{1,n}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a_n \\ t-a_n, & a_n \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad n=2,3,4,\dots$$

其中, $a_n = (2n-1-2^k)/2^k$, k 为不超过 $2n-1$ 的 2 的最高方幂指数. a_n 的取值顺序为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$$

若引进截断单项式记号:

$$u_+^k = \begin{cases} u^k, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases},$$

则该函数系可简记为

$$V_{1,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{1,1}(t) = t, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{1,n}(t) = (t - a_n)_+^1, n = 2, 3, 4, \dots$$

其前 17 个函数的图形见图 1(a).

易见 $\{V_{1,n}(t)\}$ 是线性独立的, 使用 Gram-Schmidt 正交化过程将其正交化及标准化, 得到标准正交 Franklin 函数, 记为 $\{\varphi_{1,n}(t)\}$. 限于篇幅只给出前 5 项表达式如下:

$$\varphi_{1,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{1,1}(t) = \sqrt{3}(2t - 1), 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{1,2}(t) = \begin{cases} \sqrt{3}(1 - 4t), & 0 \leq t < 1/2 \\ \sqrt{3}(4t - 3), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$\varphi_{1,3}(t) = \begin{cases} -\sqrt{33}(38t - 5)/11, & 0 \leq t < 1/4 \\ \sqrt{33}(26t - 11)/11, & 1/4 \leq t < 1/2 \\ -\sqrt{33}(6t - 5)/11, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$\varphi_{1,4}(t) = \begin{cases} -\sqrt{231}(12t - 1)/77, & 0 \leq t < 1/4 \\ \sqrt{231}(36t - 11)/77, & 1/4 \leq t < 1/2 \\ -\sqrt{231}(76t - 45)/77, & 1/2 \leq t < 3/4 \\ \sqrt{231}(100t - 87)/77, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

...

显然, Franklin 函数就是区间 $[0, 1]$ 上的 1 次正交样条函数. Franklin 函数(即 1 次 GF 系统)前 17 个函数的图形见图 1(b).

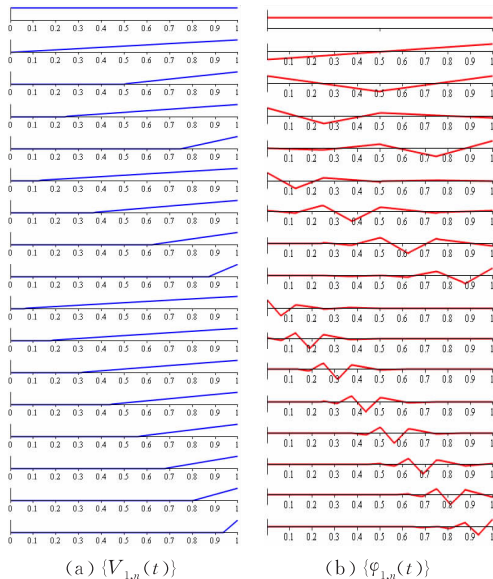


图 1 1 次 GF 系统前 17 个函数

将 Franklin 函数进行推广, 可以构造出 k 次正交样条函数, 即 k 次 GF 系统.

2.2 k 次 GF 系统

下面将 Franklin 函数推广至零次或高次的情

形. 这里 k 次 GF 系统可分为低次 GF 系统与高次 GF 系统. 其中, 低次 GF 系统是指零次或一次 GF 系统, 高次 GF 系统是指二次及其以上 GF 系统.

2.2.1 0 次 GF 系统

现定义下面的函数系 $\{V_{0,n}(t)\}$:

$$V_{0,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{0,1}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$V_{0,2}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/4 \\ 1, & 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$V_{0,3}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3/4 \\ 1, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

...

$$V_{0,n}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a_n \\ 1, & a_n \leq t \leq 1 \end{cases}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

不妨记为

$$V_{0,0}(t), 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{0,n}(t) = (t - a_n)_+^0, n = 1, 2, 3, \dots$$

其前 16 个函数的图形见图 2(a).

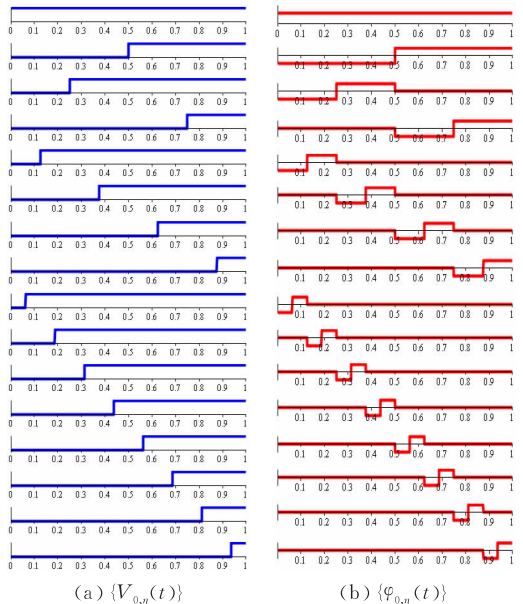


图 2 0 次 GF 系统前 16 个函数

使用 Gram-Schmidt 正交化过程将 $\{V_{0,n}(t), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 正交化及标准化, 得到 0 次 GF 系统, 记为

$$\{\varphi_{0,n}(t), n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

同样, 只给出前 5 项表达式如下:

$$\varphi_{0,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{0,1}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$\varphi_{0,2}(t) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & 0 \leq t < 1/4 \\ \sqrt{2}, & 1/4 \leq t < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{0,3}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ -\sqrt{2}, & 1/2 \leq t < 3/4 \\ \sqrt{2}, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{0,4}(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t < 1/8 \\ 2, & 1/8 \leq t < 1/4 \\ 0, & 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

...

易知, $\{\varphi_{0,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 就是 Haar 函数.

其 0 次 GF 系统 (Haar 函数) 前 16 个函数的图形见图 2(b).

2.2.2 高次 GF 系统

这里先给出 2 次与 3 次的 GF 系统. 然后给出 k 次 ($k>3$) GF 系统.

2.2.2.1 2 次 GF 系统

同样定义下面的函数系 $\{V_{2,n}(t)\}$:

$$V_{2,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,1}(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,2}(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,3}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ (t-1/2)^2, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$V_{2,4}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/4 \\ (t-1/4)^2, & 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$V_{2,5}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3/4 \\ (t-3/4)^2, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

...

$$V_{2,n}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a_n \\ (t-a_n)^2, & a_n \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad n=3,4,5,\dots$$

同样可将 $\{V_{2,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 简记为

$$V_{2,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,1}(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,2}(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{2,n}(t) = (t-a_n)_+^2, \quad n=3,4,5,\dots$$

其前 18 个函数的图形见图 3(a).

对 $\{V_{2,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 正交化并标准化后, 得到 2 次 GF 系统, 记为

$$\{\varphi_{2,n}(t), n=0,1,2,\dots\}.$$

前 6 项表达式如下:

$$\varphi_{2,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{2,1}(t) = \sqrt{3}(2t-1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{2,2}(t) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{2,3}(t) = \begin{cases} -\sqrt{5}(16t^2-10t+1), & 0 \leq t < 1/2 \\ \sqrt{5}(16t^2-22t+7), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{2,4}(t) =$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3715}(2146t^2-754t+43)/743, & 0 \leq t < 1/4 \\ \sqrt{3715}(926t^2-782t+149)/743, & 1/4 \leq t < 1/2 \\ -\sqrt{3715}(290t^2-434t+155)/743, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{2,5}(t) =$$

$$\begin{cases} -a(4350t^2-1187t+47), & 0 \leq t < 1/4 \\ a(5090t^2-3533t+543), & 1/4 \leq t < 1/2 \\ -a(8058t^2-9615t+2744), & 1/2 \leq t < 3/4 \\ a(15718t^2-26049t+10630), & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{2\sqrt{26993190}}{899773}$$

...

2 次 GF 系统前 18 个函数的图形见图 3(b).

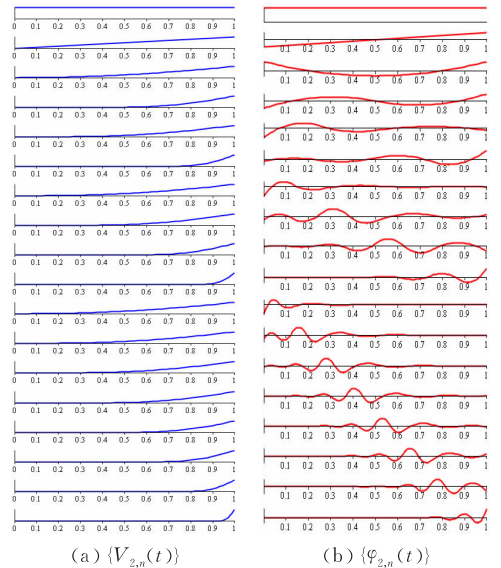


图 3 2 次 GF 系统前 18 个函数

2.2.2.2 3 次 GF 系统

再定义下面的函数系 $\{V_{3,n}(t)\}$:

$$V_{3,0}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,1}(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,2}(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,3}(t) = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,4}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ (t-1/2)^3, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$V_{3,5}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/4 \\ (t-1/4)^3, & 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$V_{3,6}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3/4 \\ (t-3/4)^3, & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

...

$$V_{3,n}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a_n \\ (t-a_n)^3, & a_n \leq t \leq 1 \end{cases}, n=4,5,6,\dots$$

不妨将 $\{V_{3,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 简记为

$$V_{3,0} = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,1} = t, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,2} = t^2, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,3} = t^3, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{3,n}(t) = (t-a_n)_+^3, n=4,5,6,\dots$$

其前 19 个函数的图形见图 4(a).

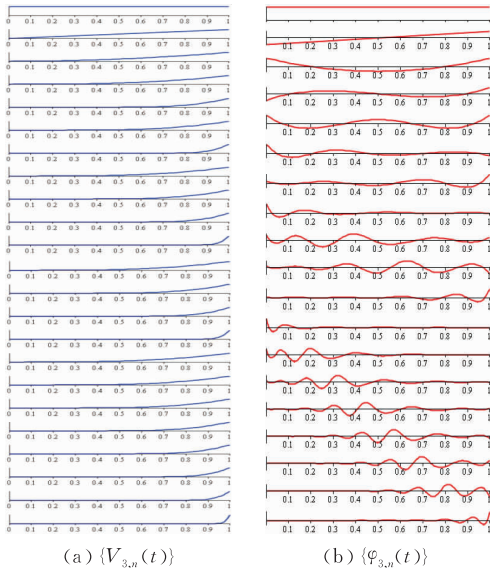


图 4 3 次 GF 系统前 19 个函数

对 $\{V_{3,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 正交化并标准化后, 得到 3 次 GF 系统, 记为

$$\{\varphi_{3,n}(t), n=0,1,2,\dots\}.$$

前 6 项表达式如下:

$$\varphi_{3,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{3,1}(t) = \sqrt{3}(2t-1), 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{3,2}(t) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1), 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{3,3}(t) = \sqrt{7}(20t^3-30t^2+12t-1), 0 \leq t \leq 1,$$

$$\varphi_{3,4}(t) = \begin{cases} -\sqrt{7}(64t^3-66t^2+18t-1), & 0 \leq t < 1/2 \\ \sqrt{7}(64t^3-126t^2+78t-15), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$\varphi_{3,5}(t) = \begin{cases} -a(63724t^3-38226t^2+6228t-211), & 0 \leq t < 1/4 \\ a(18196t^3-23214t^2+9132t-1069), & 1/4 \leq t < 1/2, \\ -a(6636t^3-14034t^2+9492t-2035), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

$$a = \frac{\sqrt{119273}}{17039},$$

...

3 次 GF 系统前 19 个函数的图形见图 4(b).

2.2.2.3 k 次 GF 系统

对任意 k 次 ($k > 3$) GF 系统, 一般地, 记 k 次正

交样条函数为 $\{V_{k,n}(t)\}$, 由 $\{V_{0,n}(t)\}, \{V_{1,n}(t)\}, \{V_{2,n}(t)\}, \{V_{3,n}(t)\}$ 定义, 考虑 $\{V_{k,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$, 可以简记为

$$V_{k,0}(t) = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{k,1}(t) = t, 0 \leq t \leq 1,$$

...

$$V_{k,k}(t) = t^k, 0 \leq t \leq 1,$$

$$V_{k,n}(t) = (t-a_n)_+^k, n=k+1, k+2, k+3, \dots$$

对 $\{V_{k,n}(t), n=0,1,2,\dots\}$ 正交化并标准化后, 得到 k 次 GF 系统, 记为

$$\{\varphi_{k,n}(t), n=0,1,\dots\}.$$

3 基于 k 次 GF 系统的曲线曲面正交表达

3.1 Fourier-K 次 GF 系统级数

Fourier-K 次 GF 系统级数就是函数在 k 次 GF 系统下的展开. 设 $\varphi_{k,i}(t)$ 是 k 次 GF 系统第 i 个函数, 给定函数 F , 记

$$c_i^k = \langle F, \varphi_{k,i} \rangle = \int_0^1 F(t) \cdot \varphi_{k,i}(t) dt, i=0,1,2,\dots,$$

则称 $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^k \varphi_{k,i}$ 为函数 F 的 Fourier-K 次 GF 系统级数.

若 F 是任意 k 次样条函数 (段数为 $2^n, n=0,1,2,\dots$), 那么 F 可以用 Fourier-K 次 GF 系统级数中有限项精确表示.

3.2 样条曲线的正交表达

这里的样条曲线是指 CAGD 中通常的样条函数构成的曲线. 为叙述方便, 不妨以 B 样条曲线为例说明.

设给定的 k 次平面 B 样条曲线

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

其中 $x(t), y(t)$ 分别是 k 次 B 样条函数表达式, 段数为 2^n . 将 $[0,1]$ 区间 2^n 等分, 通过变量替换, 将 $x(t), y(t)$ (均为 k 次 2^n 段多项式) 分别分段映射到各个子区间, 表达式为

$$x(t) = \left\{ x_j(t), t \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \right\}, j=0,1,\dots,2^n-1,$$

$$y(t) = \left\{ y_j(t), t \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \right\}, j=0,1,\dots,2^n-1,$$

其中, $x(t), y(t)$ 是子区间 $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$ 上的 k 次多项式.

下面计算 k 次分段为 2^n 的 B 样条函数的自由度 l .

由于 k 次多项式有 $k+1$ 个自由度,那么任意 k 次分段为 2^n 的多项式函数(不局限于 B 样条函数)有 $2^n \cdot (k+1)$ 个自由度,而 k 次 B 样条函数在每个断点处达到 C^{k-1} 阶连续,如果段数为 2^n ,那么断点数为 2^n-1 . 由此可计算出

$$l = 2^n \cdot (k+1) - (2^n-1) \cdot k = 2^n + k,$$

故有

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^k \varphi_{k,i}(t) \\ \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i^k \varphi_{k,i}(t) \end{pmatrix},$$

其中, $\alpha_i^k = \int_0^1 x(t) \cdot \varphi_{k,i}(t) dt$, $\beta_i^k = \int_0^1 y(t) \cdot \varphi_{k,i}(t) dt$.

利用 k 次 GF 系统前 2^n+k 项就可以对 B 样条曲线 $p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 精确重构. 利用 α_i^k , β_i^k 可以对该 B 样条曲线进行频谱分析.

3.3 样条曲面的正交表达

对于 B 样条曲面,可以看作是两个参数方向的 B 样条曲线的张量积. 设给定的 k 次 B 样条曲面

$$P(u, \omega) = \begin{pmatrix} P_x(u, \omega) \\ P_y(u, \omega) \\ P_z(u, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, \omega) \\ y(u, \omega) \\ z(u, \omega) \end{pmatrix},$$

由 $2^m \times 2^n$ 块 k 次 B 样条曲面片组合而成,相邻的两片曲面之间自然达到 C^{k-1} 连续. 其中 $x(u, \omega)$, $y(u, \omega)$, $z(u, \omega)$ 均为 k 次分片二元多项式. 那么也可以用 k 次 GF 系统前有限项精确重构.

对区域 $[0,1] \times [0,1]$ 进行 $2^m \times 2^n$ 等分,即等分为 2^m 行 2^n 列,通过变量替换,将 $x(u, \omega)$, $y(u, \omega)$, $z(u, \omega)$ 分别各段映射到各个子区域中,表达式为

$$P(u, \omega) = \left\{ P_{ij}(u, \omega), u \in \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m} \right], \omega \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \right\},$$

$$i = 0, 1, \dots, 2^m - 1, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

那么有

$$P(u, \omega) = \sum_{i=0}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \rho_{ij} \varphi_{k,i}(u) \varphi_{k,j}(\omega),$$

其中,

$$\rho_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 P(u, \omega) \varphi_{k,i}(u) \varphi_{k,j}(\omega) du d\omega.$$

设 $M = \max(m, n)$, 那么 k 次分片为 $2^m \times 2^n$ B 样条曲面的自由度

$$L = 2^M + k,$$

那么该 k 次 B 样条曲面可以用 k 次 GF 系统的前 2^M+k 项精确重构. 并且可以利用系数 α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} 对该曲面进行频谱分析.


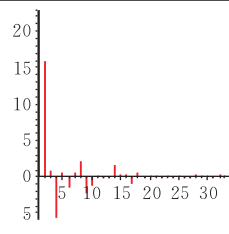
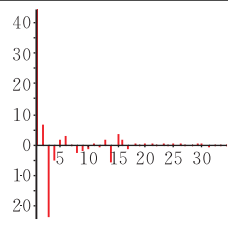

4 测试图例

本节提供图例来验证 k 次 GF 系统(这里取 $k=2, 3$)对样条曲线曲面的正交表达结果. 表 1 给出了 4 个由 B 样条曲线构成的图形在 2 次或 3 次 GF 系统下的频谱及其重构图;由于有限项 Fourier 不能精确重构原图,表 2 给出了相应曲线使用相同项数的 Fourier 重构的误差图. 误差图的横坐标为采样点索引,这里取 201 个采样点;纵坐标为误差值 ϵ_i , 其中, $\epsilon_i = \alpha_i - \beta_i$, 这里, α_i 表示第 i 个采样点的原始值, β_i 表示第 i 个采样点的 Fourier 重构值.

表 3 给出了 4 个由 B 样条曲面构成的图形在 3 次 GF 系统下的频谱及其重构图. 同理,有限项 Fourier 不能精确重构原曲面,表 4 给出了相应曲面使用相同项数的 Fourier 重构的误差图. 误差图的 x, y 坐标为采样点索引,依次取 $100 \times 100, 200 \times 200, 400 \times 400, 400 \times 400$ 个采样点;纵坐标 z 为误差值 ϵ_{ij} , 其中, $\epsilon_{i,j} = \alpha_{i,j} - \beta_{i,j}$, 这里, $\alpha_{i,j}$ 表示第 ij 个采样点的原始值, $\beta_{i,j}$ 表示第 ij 个采样点的 Fourier 重构值.

实验结果表明,利用有限项 GF 系统的频谱可以完全精确重构 CAGD 中通常的样条函数构成的曲线曲面;然而,利用有限项的傅立叶谱重构的图形只是原图的近似.

表 1 曲线对应的 GF 系统的频谱及其重构图

图形(B样条曲线)	X 频谱	Y 频谱	GF 系统重构图及重构的项数
			
2次32段			34项

(续 表)

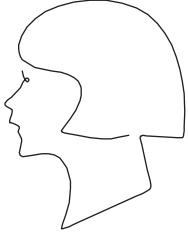
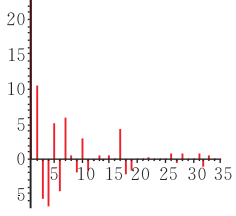
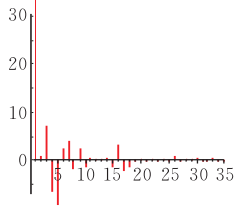
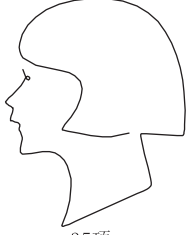
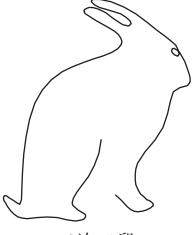
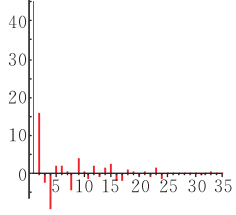
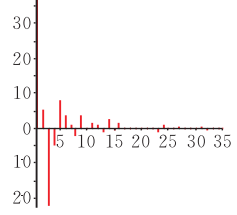
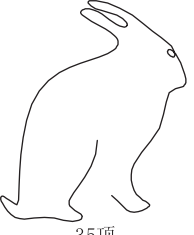

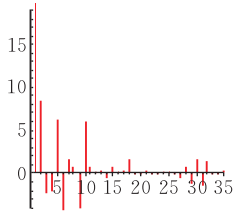
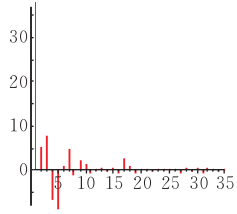


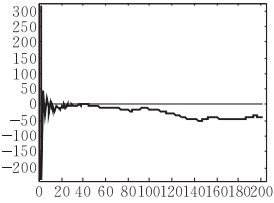
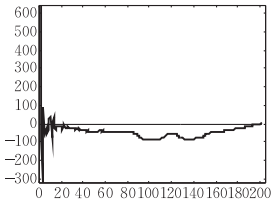

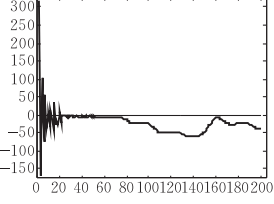
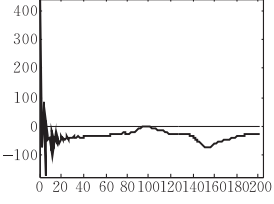

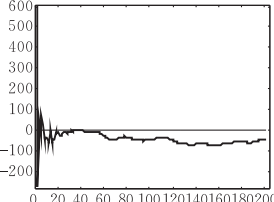
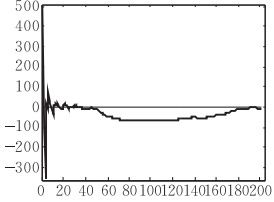
图形(B样条曲线)	X 频谱	Y 频谱	GF 系统重构图及重构的项数
 3次32段			 35项
 3次32段			 35项
 3次32段			 35项

表 2 表 1 中的图形使用 Fourier 重构的误差图

图形(B样条曲线)	Fourier 重构的项数	X 误差图	Y 误差图
 2次32段	34		
 3次32段	35		
 3次32段	35		

(续 表)


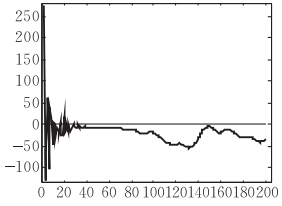
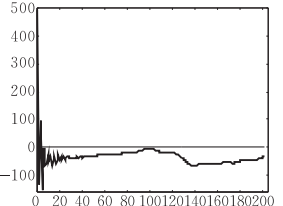
图形(B样条曲线)	Fourier 重构的项数	X 误差图	Y 误差图
 <p>3次32段</p>	35		

表 3 曲面对应的 GF 系统频谱及其重构图

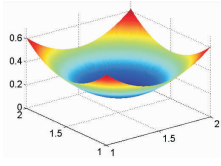
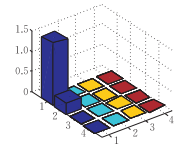
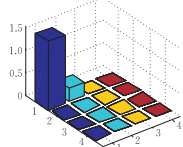
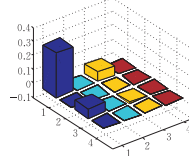
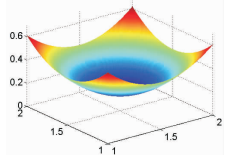
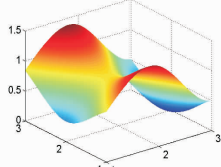
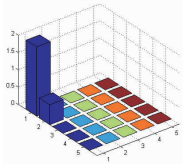
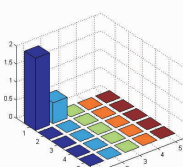
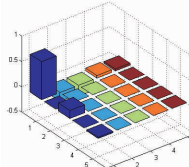
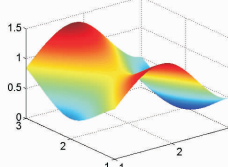
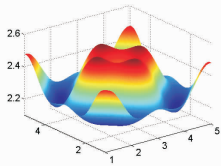
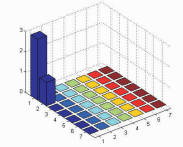
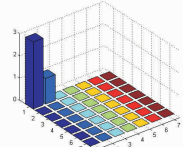
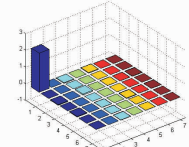
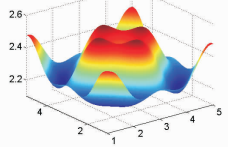
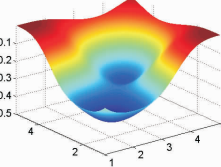
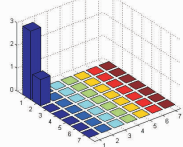
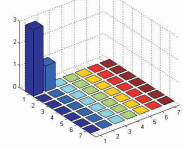
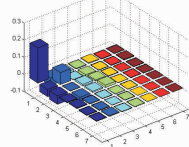
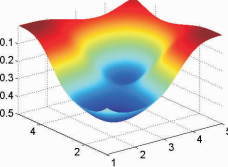
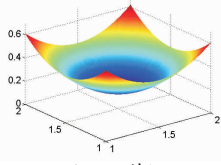
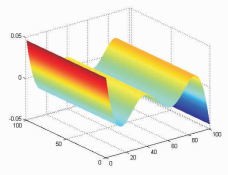
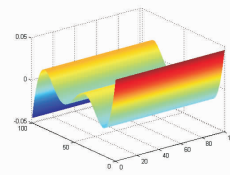
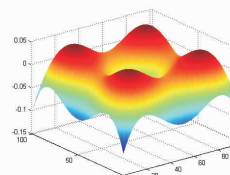
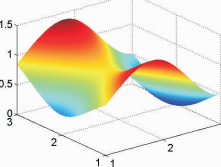
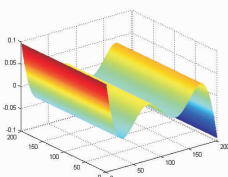
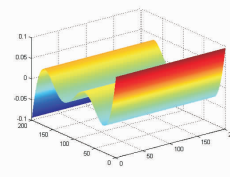
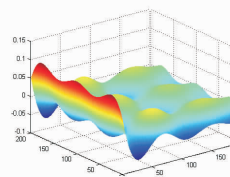
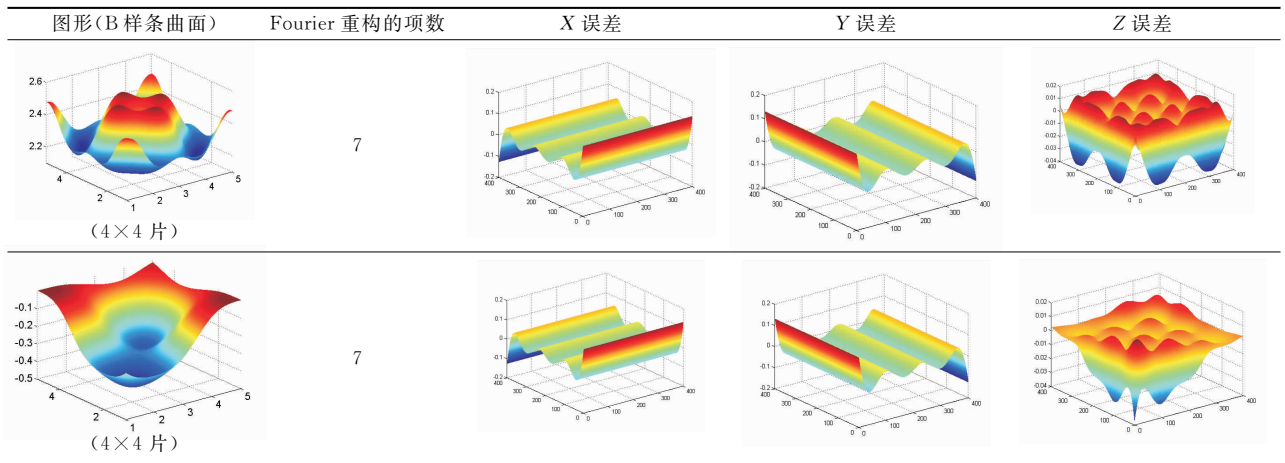
图形(3次B样条曲面)	X 频谱	Y 频谱	Z 频谱	GF 系统重构图
 <p>(1×1 片)</p>				 <p>4 项</p>
 <p>(2×2 片)</p>				 <p>5 项</p>
 <p>(4×4 片)</p>				 <p>7 项</p>
 <p>(4×4 片)</p>				 <p>7 项</p>

表 4 曲面对应的 Fourier 重构的误差图

图形(B样条曲面)	Fourier 重构的项数	X 误差	Y 误差	Z 误差
 <p>(1×1 片)</p>	4			
 <p>(2×2 片)</p>	5			

(续 表)



5 结 论

本文提出了一类新的 k 次正交样条函数, 即 k 次 GF 系统. 研究了该 GF 系统对 B 样条曲线与曲面信息的表达与分析能力. 通常在信号处理中 Fourier 变换方法, 虽然其正交函数具有高度光滑性, 但它不是多项式函数, 故在表达 CAGD 中通常的样条函数构成的曲线曲面时不能作有限精确表达, 计算量也很大. 而作为样条函数空间的一组标准正交基, k 次 GF 系统对表达样条信息具有得天独厚的优势, 这种信息转换算法具有直观、简便、快速及精确的特点. 作者构建的平台为进一步对基于样条曲线曲面的几何信息进行分析与综合做了准备. 有望在逆向工程、几何模型的信息检索及模式识别等方面得到应用.

参 考 文 献

- [1] Wang Guo-Jin et al. Computer Aided Geometric Design. Beijing: Higher Education Press and Springer Press, 2001: 1-17(in Chinese)
(王国瑾等. 计算机辅助几何设计. 北京: 高等教育出版社, 施普林格出版社, 2001: 1-17)
- [2] Groenevelt Wolter. Fourier transforms related to a root sys-

tem of rank 1. Transformation Groups, 2007, 12(1): 77-116

- [3] Zhang Zhi-Hua. Supports of Fourier transforms of scaling functions. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 22(2): 141-156
- [4] Wei Yu-Chuan, Zhang Qi-Shan, Cheng Ling. New methods for Fourier analysis and Fourier synthesis. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(12): 315-317
- [5] Wei Yu-Chuan, Zhang Shan, Cheng Ling. Transmission of information biorthogonal functions. IEEE Communications Letters, 2000, 4(7): 224-225
- [6] Manz J W. A sequence-ordered fast walsh transform. IEEE Transactions on Audio Electronic, 1972, AU-20: 204-205
- [7] Wei Yong-Mei, Bi Guo-An. Fast algorithms for polynomial time frequency transform. Signal Processing, 2007, 87(5): 789-798
- [8] Feng Yu-Yu, Qi Dong-Xu. A sequence of piecewise orthogonal polynomials. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1984, 15(4): 834-844
- [9] Foley James D et al. Computer Graphics Principles and Practice. 2nd Edition. New York: Addison-Wesley, 2002
- [10] Song Rui-Xia, Ma Hui, Wang Tian-Jun, Qi Dong-Xu. Complete orthogonal V-system and its applications. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(3): 853-871
- [11] Franklin P. A set of continuous orthogonal functions. Mathematische Annalen, 1928, 100(1): 522-529
- [12] Qi Dong-Xu. Fractal and Its Generation on Computer. Beijing: Science Press, 1994(in Chinese)
(齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京: 科学出版社, 1994)

CAI Zhan-Chuan, Ph. D., assistant professor. His research interests include computer graphics, image processing, lunar data processing and analysis etc.

CHEN Wei, M. S. candidate. His research interests include computer graphics and signal processing etc.

QI Dong-Xu, born in 1940, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics and numerical analysis etc.

TANG Ze-Sheng, born in 1932, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics, scientific visualization and virtual reality etc.



Background

This project is supported by the Science and Technology Development Fund of Macau under grant Nos. 003/2008/A1 and 008/2008/A1, the National Natural Science Foundation of China (important special project) under grant No. 10631080 and the National Basic Research Program of China (973 Program) of China under grant No. 2004CB318000. The work aims to propose a class of orthogonal spline function system and provide a new method to represent the geometric data of parametric spline curves and surfaces.

With the increasing use of geometric modeling in industry, algorithms processing geometric signals become more and more important. Currently, despite the recent promising progress of digital geometric processing, it still lacks analysis of frequency spectrum like digital image. The research of digital geometry has been rarely conjoint with the analysis of frequency spectrum, mainly because of the choice of orthogonal functions. In fact, not any class of orthogonal functions

is suitable for the analysis and synthesis of geometric information. So, it is necessary to discuss the effective methods on how to make frequency spectrum analysis with the data coming from these geometric graphs. In the field of CAGD, discussion of frequency spectrum will help to classify graphics.

This paper proposes a new class of orthogonal spline functions system, named as GFsystem. It can exactly represent spline curves and surfaces by using finite items. So it is suitable for analysis of frequency spectrum for spline curves and surfaces. However, by using Fourier-system to deal with these spline curves and surfaces, the results will be much more different from the original ones. This paper also provided the realization algorithm of the orthogonal spline functions system. The algorithm is visible, simple and fast. The program for processing data can be used to analyze and synthesize spline curves and surfaces.