

基于双阶样条的代数双曲 B 样条升阶及割角算法

张 波 汪国昭

(浙江大学数学系计算机图象图形研究所 杭州 310027)

摘 要 考虑代数双曲 B 样条曲线的升阶问题,从理论上证明了曲线的升阶可以理解为控制顶点的割角过程. 为了实现代数双曲 B 样条曲线的升阶,文中构造了一组基函数——双阶代数双曲 B 样条基函数,这组基函数并不具有统一的阶数,而具有“双阶”性质. 代数双曲 B 样条基函数与双阶样条基函数之间的变换公式可以导出曲线升阶的割角算法.

关键词 双阶样条;代数双曲 B 样条曲线;升阶;割角算法

中图法分类号 TP391

Degree Elevation of Algebraic Hyperbolic B-spline Curves and Corner Cutting Based on Bi-order Spline

ZHANG Bo WANG Guo-Zhao

(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The authors consider the degree elevation of algebraic hyperbolic (AH) B-spline curves and prove that the degree elevation of AH B-spline curves can be interpreted as corner cutting process in theory. A new class of basis functions, to be called bi-order algebraic hyperbolic B-spline basis functions, is constructed and discussed by the integral definition of spline. This class of basis functions has bi-order property and the transforming formulae between AH B-spline and bi-order AH B-spline lead to the corner cutting for degree elevation of AH B-spline curves.

Keywords bi-order spline; algebraic hyperbolic B-spline; degree elevation; corner cutting

1 引 言

B 样条曲线在计算机辅助几何设计(CAGD)中占有十分重要的地位,但它也存在一些缺陷,例如 B 样条曲线不能精确表示在 CAD/CAM 中广泛应用的圆锥曲线. 为了克服这一局限,很多文献提出许多模型,例如 Wang 和 Chen 在文献[1]中以 $\{1, t, \dots, t^{n-3}, \sin t, \cos t\}$ 为基构造非均匀代数三角(NUAT) B 样条曲线,可以精确表示圆锥螺线和摆线. Li 和

Wang 在文献[2]中以 $\{1, t, \dots, t^{n-3}, \sinh t, \cosh t\}$ 为基构造代数双曲 B 样条(AH B-basis)曲线,能够精确表示一类重要的曲线,例如悬链线与双曲线等.

样条曲线的升阶在几何造型中是十分重要的, Bézier 曲线的升阶可以理解为控制顶点的割角过程,对于 B 样条曲线,也有很多文献提出相关算法(例如文献[3-9]). 这些算法也可运用到代数双曲 B 样条曲线,但这些升阶算法不能理解为割角算法.

本文考虑代数双曲 B 样条曲线的升阶问题. 不同于以往的升阶算法,本文通过构造一类新的样条

基函数——双阶代数双曲 B 样条基, 来实现代数双曲 B 样条曲线的升阶. 由这组新基可以构造一类新的参数曲线——双阶代数双曲 B 样条曲线. 这类参数曲线有如下特点: 曲线由两段阶数不同的代数双曲 B 样条曲线组成, 前段曲线的阶数比后段曲线高一阶. 通过寻求样条基函数的相互关系, 实现了代数双曲 B 样条曲线的升阶.

2 代数双曲 B 样条曲线及其升阶问题

2.1 代数双曲 B 样条曲线的定义

设 T 是给定的节点向量 $\mathbf{T}: \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, t_i \leq t_{i+1}, i=0, \pm 1, \pm 2 \cdots$, 则空间 $\Gamma_k = span\{1, t, \cdots, t^{k-3}, \sinh t, \cosh t\}$ 中由下列递推方式所定义的函数 $N_{i,k}(t)$ 称为相应于节点向量 \mathbf{T} 的 k 阶代数双曲 B 样条基函数:

$$\begin{cases} N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t-t_i)}{\sinh(t_{i+1}-t_i)}, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\sinh(t_{i+2}-t)}{\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})}, & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ N_{i,k}(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}(s)}{\Delta_{i,k-1}} - \frac{N_{i+1,k-1}(s)}{\Delta_{i+1,k-1}} \right] ds, k \geq 3 \end{cases},$$

其中, $\Delta_{i,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) dt$, 并且规定 $0/0=0$.

当 \mathbf{T} 为均匀节点向量时, 可以得到文献[10]中定义的均匀双曲多项式 B 样条基函数. 文献[2]证明了代数双曲 B 样条基函数有类似于 B 样条基函数的性质, 如局部支撑性、归一性、正性、线性无关性等, 并进一步证明了代数双曲 B 样条基是 B 基.

定义 k 阶代数双曲 B 样条曲线:

$$P(t) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) P_i, \quad t \in [t_{k-1}, t_{m+1}], m \geq k-1.$$

代数双曲 B 样条曲线有类似于 B 样条曲线的性质, 如凸包性、几何不变性、局部调整性、连续阶性质、变差缩减性等.

2.2 代数双曲 B 样条曲线的升阶问题

考虑 k 阶代数双曲 B 样条曲线

$$P(u) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(u) P_i, u \in [u_{k-1}, u_{m+1}],$$

其中, P_i 是控制顶点, $N_{i,k}(u) (i=0, 1, \cdots, m)$ 为定义于节点向量 $\mathbf{U} = \{u_0, u_2, \cdots, u_{m+k}\}$ 上的代数双曲 B 样条基函数. 为了下文叙述方便, 将节点向量改写为 $\mathbf{T} = \{\underbrace{t_1, \cdots, t_1}_{m_1}, \cdots, \underbrace{t_n, \cdots, t_n}_{m_n}\}$, 其中, $m_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 表示节点 t_i 的重数, 并且规定 $m_1 = m_n = k$.

与 B 样条曲线类似, k 阶代数双曲 B 样条曲线是在空间 $\Gamma_k = span\{1, t, \cdots, t^{k-3}, \sinh t, \cosh t\}$ 中构造的曲线, 它完全可以在空间 $\Gamma_{k+1} = span\{1, t, \cdots, t^{k-2}, \sinh t, \cosh t\}$ 中精确表示, 即将 k 阶代数双曲 B 样条曲线升阶为 $k+1$ 阶. 存在控制顶点 \hat{P}_i 与节点向量 $\hat{\mathbf{T}}$, 满足

$$P(t) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) P_i = \sum_{i=0}^{\hat{m}} N_{i,k+1}(t) \hat{P}_i = \hat{P}(t),$$

因此代数双曲 B 样条曲线的升阶过程可归结为节点向量 $\hat{\mathbf{T}}$ 和新控制顶点 \hat{P}_i 的求解过程.

曲线 $\hat{P}(t)$ 是 $P(t)$ 在高维空间的一个嵌入, 两曲线的几何形状与参数完全相同, 且曲线 $P(t)$ 与 $\hat{P}(t)$ 有相同的连续性, 由曲线在节点处的连续阶性质得到新节点向量 $\hat{\mathbf{T}}$ 应具有以下形式:

$$\hat{\mathbf{T}} = \{\underbrace{t_1, \cdots, t_1}_{m_1+1}, \cdots, \underbrace{t_n, \cdots, t_n}_{m_n+1}\}.$$

曲线的升阶问题进而转化为新控制顶点 \hat{P}_i 的求解问题.

一个直观的升阶方法是将升阶问题转化为线性

方程组的求解, 设 $\sum_{i=0}^{\hat{m}} N_{i,k+1}(t) \hat{P}_i = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) P_i$, 计算 $N_{i,k+1}(t)$ 和 $N_{i,k}(t)$ 在适当的 $\hat{m}+1$ 个值处的函数值, 可以得到 $\hat{m}+1$ 个关于控制顶点 \hat{P}_i 的线性方程, 求解此线性方程组便可以得到新控制顶点的表达式.

另外一种方法可以仿照文献[7]得出, 首先将节点向量 \mathbf{T} 中节点 $t_i (i=1, \cdots, n)$ 的重数嵌为 k , 这样便由原曲线得到 n 段分别定义在 $[t_i, t_{i+1}] (i=1, \cdots, n-1)$ 上的代数双曲 Bézier 曲线, 然后利用文献[2]中的方法对这 n 段曲线分别进行升阶, 最后根据曲线在节点处的连续性要求移去冗余的节点, 完成曲线的升阶.

以上两种方法的共同特点是一次性地增加节点重数, 然后求解新控制顶点的表达式. 这样求得的新控制顶点是原控制顶点的线性组合, 升阶的几何意义并不明显. 不同于上面两种方法, 本文在对代数双曲 B 样条曲线升阶时, 采用逐段升阶的策略, 不是一次性的将所有节点的重数增加 1, 而是在升阶的过程中, 依次增加各个节点的重数. 设 $\mathbf{T}^j = \{\underbrace{t_1, \cdots, t_1}_{m_1+1}, \cdots, \underbrace{t_j, \cdots, t_j}_{m_j+1}, \underbrace{t_{j+1}, \cdots, t_{j+1}}_{m_{j+1}}, \cdots, \underbrace{t_n, \cdots, t_n}_{m_n}\}$ 是增加第 j 个节点后的节点向量, 由于是逐段升阶, 为了能够统一表达已升阶和未升阶的曲线段, 我们在 \mathbf{T}^j 上定义一种新的样条基函数, 称为双阶代数双曲 B 样条基函数 $\{N_{i,k}^j(t)\}$, 基于这类基函数可以构造

双阶代数双曲 B 样条曲线 $P^j(t)$. 曲线 $P^j(t)$ 的特点是具有“双阶”性质, $P^j(t)$ 在区间 $[t_1, t_{j+1}]$ 上为 $k+1$ 阶, 在区间 $[t_{j+1}, t_n]$ 上为 k 阶, 利用它可以统一地表示已升阶和未升阶的曲线段.

3 双阶代数双曲 B 样条基函数

3.1 双阶代数双曲 B 样条基函数的定义

改写节点向量 $\mathbf{T}^j = \{\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{t_j, \dots, t_j}_{m_j+1}, \underbrace{t_{j+1}, \dots, t_{j+1}}_{m_{j+1}}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{m_n}\} = \{t_0^j, t_2^j, \dots, t_{s_j}^j\}$, 其中, $s_j = m_1 + m_2 + \dots + m_n + j - 1$, 设 k 为双阶代数双曲 B 样条基函数的阶数, 设 $l_j = m_1 + m_2 + \dots + m_j + j - 1$, 则可由下列方式定义节点向量 \mathbf{T}^j 上的双阶代数双曲 B 样条基函数.

当 $k=1$ 时, 定义

$$N_{i,1}^j(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t-t_i^j)}{\sinh(t_{i+1}^j-t_i^j)}, & t_i^j \leq t < t_{i+1}^j, 0 \leq i \leq l_j \\ \frac{\sinh(t_{i+2}^j-t)}{\sinh(t_{i+2}^j-t_{i+1}^j)}, & t_{i+1}^j \leq t < t_{i+2}^j, 0 \leq i \leq l_j-1 \\ 1, & t_i^j \leq t < t_{i+1}^j, i > l_j \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1}$$

当 $k=2$ 时(见图 1), 定义

$$N_{i,2}^j(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t [N_{i,1}^j(s)/\Delta_{i,1}^j - N_{i+1,1}^j(s)/\Delta_{i+1,1}^j] ds, & (t_i^j \leq t < t_{i+1}^j, 0 \leq i \leq l_j) \text{ 或} \\ & (t_{i+1}^j \leq t < t_{i+2}^j, 0 \leq i \leq l_j-1) \text{ 或} \\ & (t_{i+2}^j \leq t < t_{i+3}^j, 0 \leq i \leq l_j-2) \\ \frac{\sinh(t-t_i^j)}{\sinh(t_{i+1}^j-t_i^j)}, & (t_i^j \leq t < t_{i+1}^j, i > l_j) \\ \frac{\sinh(t_{i+2}^j-t)}{\sinh(t_{i+2}^j-t_{i+1}^j)}, & (t_{i+1}^j \leq t < t_{i+2}^j, i \geq l_j) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{2}$$

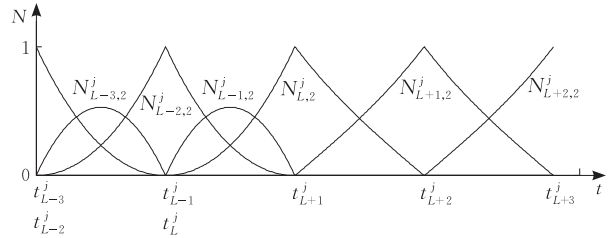


图 1 $k=2$ 时基函数示意图($L=l_j$)

$k \geq 3$ 时, 双阶代数双曲 B 样条基函数通过下式定义

$$N_{i,k}^j(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}^j(s)}{\Delta_{i,k-1}^j} - \frac{N_{i+1,k-1}^j(s)}{\Delta_{i+1,k-1}^j} \right] ds \quad (k \geq 3) \tag{3}$$

如果 $N_{i,k}^j(t) \equiv 0$, 则定义

$$\int_{-\infty}^t \frac{N_{i,k}^j(s)}{\Delta_{i,k}^j} ds = \begin{cases} 1, & t \geq t_{i+k+1}^j (i \leq l_j - k) \text{ 或} \\ & t \geq t_{i+k}^j (i > l_j - k) \\ 0, & t < t_{i+k+1}^j (i \leq l_j - k) \text{ 或} \\ & t < t_{i+k}^j (i > l_j - k) \end{cases}$$

注 1. 由于 t_n 是最后一个节点, 所以 \mathbf{T}^{n-1} 可取为 $\hat{\mathbf{T}} = \{\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{m_n+1}\}$.

通过以上基函数定义容易看出: 当 $j=1, 2, \dots, n-2$ 时, 定义在节点向量 \mathbf{T}^j 上的基函数 $\{N_{i,k}^j(t)\}$ ($j=1, 2, \dots, n-2$) 并不具有统一的阶数, 定义在区间 $[t_1, t_{j+1}]$ 上的基函数阶数是 $k+1$, 定义在区间 $[t_{j+1}, t_n]$ 上的基函数为 k 阶, $\{N_{i,k}^j(t)\}$ ($j=1, 2, \dots, n-2$) 阶数可记为 $(k+1, k)$. 而当 $j=0, n-1$ 时, 分别定义在 \mathbf{T}^0 与 \mathbf{T}^{n-1} 上的基函数 $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 在定义区间上分别为 k 与 $k+1$ 阶. 进一步有以下定理.

定理 1. 记节点向量 $\mathbf{T} = \{\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{m_n}\}$, $\hat{\mathbf{T}} = \{\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{t_n, \dots, t_n}_{m_n+1}\}$, 设 $\{N_{i,k}(t)\}$ 与 $\{\hat{N}_{i,k+1}(t)\}$ 为分别定义在节点向量 \mathbf{T} 与 $\hat{\mathbf{T}}$ 上的代数双曲 B 样条基函数, $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 为分别定义在 $\mathbf{T}^0 = \mathbf{T}$ 与 $\mathbf{T}^{n-1} = \hat{\mathbf{T}}$ 上的双阶代数双曲 B 样条基函数, 则有 $N_{i,k}^0(t) = N_{i,k}(t)$, $N_{i,k}^{n-1}(t) = \hat{N}_{i,k+1}(t)$.

证明. 利用数学归纳法, 当 $k=2$ 时,

$$N_{i,2}^0(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t-t_i^0)}{\sinh(t_{i+1}^0-t_i^0)}, & t_i^0 \leq t < t_{i+1}^0, i \geq 0 \\ \frac{\sinh(t_{i+2}^0-t)}{\sinh(t_{i+2}^0-t_{i+1}^0)}, & t_{i+1}^0 \leq t < t_{i+2}^0, i \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = N_{i,2}(t),$$

$$N_{i,2}^{n-1}(t) = \int_{-\infty}^t [N_{i,1}^{n-1}(s)/\Delta_{i,1}^{n-1} - N_{i+1,1}^{n-1}(s)/\Delta_{i+1,1}^{n-1}] ds = \int_{-\infty}^t [\hat{N}_{i,2}(s)/\hat{\Delta}_{i,2} - \hat{N}_{i+1,2}(s)/\hat{\Delta}_{i+1,2}] ds = \hat{N}_{i,3}(t).$$

当 $k > 2$ 时, 利用归纳假设

$$N_{i,k}^0(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}^0(s)}{\Delta_{i,k-1}^0} - \frac{N_{i+1,k-1}^0(s)}{\Delta_{i+1,k-1}^0} \right] ds = \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}(s)}{\Delta_{i,k-1}} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{\Delta_{i+1,k-1}} \right] ds = N_{i,k}(t),$$

$$\begin{aligned} N_{i,k}^{n-1}(t) &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k-1}^{n-1}(s)}{\Delta_{i,k-1}^{n-1}} - \frac{N_{i+1,k-1}^{n-1}(s)}{\Delta_{i+1,k-1}^{n-1}} \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{\hat{N}_{i,k}(s)}{\hat{\Delta}_{i,k}} - \frac{\hat{N}_{i+1,k}(s)}{\hat{\Delta}_{i+1,k}} \right] ds = \hat{N}_{i,k+1}(t). \end{aligned}$$

定理得证. 证毕.

由定理 1 可以看到, $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 实际上并不是“双阶”, 而是普通的代数双曲 B 样条基函数, 但为了方便, 本文仍称它们为双阶代数双曲 B 样条基函数.

利用定理 1, 代数双曲 B 样条曲线的升阶方程 $\sum_{i=0}^{\hat{m}} N_{i,k+1}(t) \hat{P}_i = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) P_i$ 可以转化为 $\sum_{i=0}^{\hat{m}} \hat{N}_{i,k}^{n-1}(t) \hat{P}_i = \sum_{i=0}^m N_{i,k}^0(t) P_i$. 如果能找到基函数 $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 之间的关系, 则新控制顶点 $\hat{P}_i (i=0, 1, \dots, \hat{m})$ 与旧控制顶点 $P_i (i=0, 1, \dots, m)$ 的关系可以相应得到. 为了得到 $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 之间的关系, 我们首先建立 $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^j(t)\} (j=1, 2, \dots, n-1)$ 之间的关系.

3.2 双阶代数双曲 B 样条函数之间的变换公式

本节将导出基函数 $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^j(t)\} (j=1, 2, \dots, n-1)$ 的关系, 其中 $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^j(t)\}$ 分别定义在节点向量 \mathbf{T}^{j-1} 与 \mathbf{T}^j 上 ($\mathbf{T}^j = \mathbf{T}^{j-1} + \{t_j\}$).

通过计算可得到 $N_{i,2}^{j-1}$ 与 $N_{i,2}^j$ 之间的关系式

$$N_{i,2}^{j-1}(t) = \begin{cases} N_{i,2}^j(t), & i < l_j - 2 \\ N_{i,2}^j(t) + \frac{N_{i+1,2}^j(t)}{2\cosh^2[(t_{i+3}^j - t_{i+2}^j)/2]}, & i = l_j - 2 \\ \frac{N_{i,2}^j(t)}{2\cosh^2[(t_{i+2}^j - t_{i+1}^j)/2]} + N_{i+1,2}^j(t), & i = l_j - 1 \\ N_{i+1,2}^j(t), & i > l_j - 1 \end{cases} \quad (4)$$

图 2 给出了 $N_{i,2}^{j-1}$ 与 $N_{i,2}^j$ 的关系示意图.

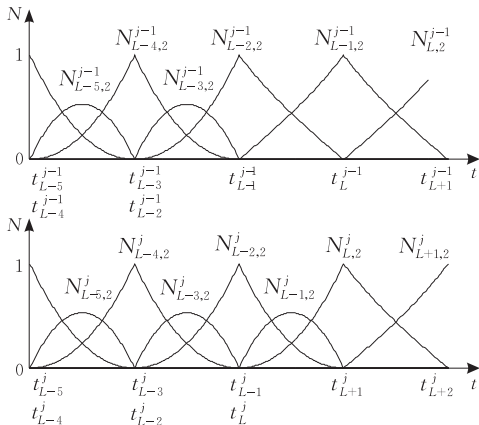


图 2 $N_{i,2}^{j-1}$ 与 $N_{i,2}^j$ 的关系示意图 ($L=l_j$)

当 $k \geq 3$ 时代数双曲 B 样条基函数是 B 基, 我们首先计算 $\{N_{i,3}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,3}^j(t)\}$ 的关系式, 然后通过递推可以得到 $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^j(t)\} (j=1, 2, \dots, n-1) (k > 3)$ 的关系.

当 $k=3$ 时, 通过计算有如下关系式

$$N_{i,3}^{j-1}(t) = \begin{cases} N_{i,3}^j(t), & i < l_j - 3 \\ N_{i,3}^j(t) + \left(1 - \frac{\Delta_{i+1,2}^j}{\Delta_{i+1,2}^{j-1}}\right) N_{i+1,3}^j(t), & i = l_j - 3 \\ \frac{\Delta_{i,2}^j}{\Delta_{i,2}^{j-1}} N_{i,3}^j(t) + \frac{\Delta_{i+2,2}^j}{\Delta_{i+1,2}^{j-1}} N_{i+1,3}^j(t), & i = l_j - 2 \\ \left(1 - \frac{\Delta_{i+1,2}^j}{\Delta_{i,2}^{j-1}}\right) N_{i,3}^j(t) + N_{i+1,3}^j(t), & i = l_j - 1 \\ N_{i+1,3}^j(t), & i > l_j - 1 \end{cases} \quad (5)$$

定理 2. 分别定义在 \mathbf{T}^{j-1} 与 \mathbf{T}^j 上的双阶代数双曲 B 样条基函数 $\{N_{i,k}^{j-1}(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^j(t)\} (j=1, 2, \dots, n-1)$, 有如下关系式

$$N_{i,k}^{j-1}(t) = \begin{cases} N_{i,k}^j(t), & i < l_j - k \\ (1 - a_{i,k}^j) N_{i,k}^j(t) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(t), & l_j - k \leq i \leq l_j - 1 \\ N_{i+1,k}^j(t), & i > l_j - 1 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $a_{i,k}^j$ 可以由下面的公式递推得到

$$a_{i,3}^j = \begin{cases} 0, & l_j - k \leq i \leq l_j - 3 \\ 1 - \Delta_{i,2}^j / \Delta_{i,2}^{j-1}, & i = l_j - 2 \\ \Delta_{i+1,2}^j / \Delta_{i,2}^{j-1}, & i = l_j - 1 \\ 1, & i = l_j \end{cases},$$
$$a_{i,l+1}^j = \begin{cases} 0, & l_j - k \leq i < l_j - l \\ a_{i+1,l}^j \frac{\Delta_{i+1,l}^j}{\Delta_{i,l}^{j-1}}, & l_j - l \leq i \leq l_j - 1, l \geq 3. \\ 1, & i = l_j \end{cases}$$

证明. 由式(5)可知当 $k=3$ 时定理成立. 设当 $k \geq 3$ 时定理成立, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}^{j-1}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - a_{i,k}^j) N_{i,k}^j(t) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(t)] dt, \\ \text{即 } \Delta_{i,k}^{j-1} &= (1 - a_{i,k}^j) \Delta_{i,k}^j + a_{i+1,k}^j \Delta_{i+1,k}^j. \end{aligned}$$

当阶数为 $k+1$ 时, 利用数学归纳法

$$\begin{aligned} N_{i,k+1}^{j-1}(t) &= \int_{-\infty}^t [N_{i,k}^{j-1}(s) / \Delta_{i,k}^{j-1} - N_{i+1,k}^{j-1}(s) / \Delta_{i+1,k}^{j-1}] ds \\ &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{(1 - a_{i,k}^j) N_{i,k}^j(s) + a_{i+1,k}^j N_{i+1,k}^j(s)}{(1 - a_{i,k}^j) \Delta_{i,k}^j + a_{i+1,k}^j \Delta_{i+1,k}^j} - \frac{(1 - a_{i+1,k}^j) N_{i+1,k}^j(s) + a_{i+2,k}^j N_{i+2,k}^j(s)}{(1 - a_{i+1,k}^j) \Delta_{i+1,k}^j + a_{i+2,k}^j \Delta_{i+2,k}^j} \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-a_{i,k}^j)\Delta_{i,k}^j}{(1-a_{i,k}^j)\Delta_{i,k}^j+a_{i+1,k}^j\Delta_{i+1,k}^j} \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i,k}^j(s)}{\Delta_{i,k}^j} - \frac{N_{i+1,k}^j(s)}{\Delta_{i+1,k}^j} \right] ds + \\ &\quad \frac{a_{i+2,k}^j\Delta_{i+2,k}^j}{(1-a_{i+1,k}^j)\Delta_{i+1,k}^j+a_{i+2,k}^j\Delta_{i+2,k}^j} \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^t \left[\frac{N_{i+1,k}^j(s)}{\Delta_{i+1,k}^j} - \frac{N_{i+2,k}^j(s)}{\Delta_{i+2,k}^j} \right] ds \\ &= \left(1 - \frac{a_{i+1,k}^j\Delta_{i+1,k}^j}{(1-a_{i,k}^j)\Delta_{i,k}^j+a_{i+1,k}^j\Delta_{i+1,k}^j} \right) N_{i,k+1}^j(t) + \\ &\quad \frac{a_{i+2,k}^j\Delta_{i+2,k}^j}{(1-a_{i+1,k}^j)\Delta_{i+1,k}^j+a_{i+2,k}^j\Delta_{i+2,k}^j} N_{i+1,k+1}^j(t) \\ &= \left(1 - a_{i+1,k}^j \frac{\Delta_{i+1,k}^j}{\Delta_{i,k}^j} \right) N_{i,k+1}^j(t) + \\ &\quad a_{i+2,k}^j \frac{\Delta_{i+2,k}^j}{\Delta_{i+1,k}^j} N_{i+1,k+1}^j(t) \\ &= (1-a_{i,k+1}^j)N_{i,k+1}^j(t) + a_{i+1,k+1}^j N_{i+1,k+1}^j(t). \end{aligned}$$

定理得证. 证毕.

注 2. 利用数学归纳法容易证明: $0 < a_{i,k}^j < 1$ ($l_j - k < i < l_j$).

3.3 双阶代数双曲 B 样条基函数的性质

由定理 1 知道 $\{N_{i,k}^0(t)\}$ 与 $\{N_{i,k}^{n-1}(t)\}$ 实际上为代数双曲 B 样条基函数, 因此具有代数双曲 B 样条基函数的性质, 下面将利用定理 2 给出双阶代数双曲 B 样条基函数的几个性质.

(1) 正性: 当 $t \in (t_i^j, t_{i+k+1}^j)$ ($i \leq l_j - k$) 或者 $t \in (t_i^j, t_{i+k}^j)$ ($i > l_j - k$) 时, $N_{i,k}^j(t) > 0$.

证明. 当 $j = n - 1$ 时, $N_{i,k}^{n-1}(t)$ 为 $k + 1$ 阶代数双曲 B 样条基函数, 性质成立. 设 $j \leq n - 1$ 时性质成立, 则由式(6)可得 $N_{i,k}^{j-1}(t) > 0$, 性质得证. 证毕.

(2) 归一性: $\sum_i N_{i,k}^j(t) = 1$.

证明. 当 $j = n - 1$ 时, $N_{i,k}^{n-1}(t)$ 为 $k + 1$ 阶代数双曲 B 样条基函数, 性质成立. 设 $j \leq n - 1$ 时性质成立, 则由式(6)得 $\sum_i N_{i,k}^{j-1}(t) = \sum_i N_{i,k}^j(t) = 1$, 性质得证. 证毕.

(3) 线性无关性: 定义在 \mathbf{T}^j 上的基函数 $\{N_{i,k}^j(t)\}$ 线性无关 ($N_{i,k}^j(t)$ 不恒为零).

证明. 当 $j = n - 1$ 时, $N_{i,k}^{n-1}(t)$ 为 $k + 1$ 阶代数双曲 B 样条基函数, 性质成立. 设 $j \leq n - 1$ 时性质成立, 设 $\sum_{l=0}^h \alpha_l N_{i+l,k}^{j-1}(t) = 0, t \in [t_1, t_{n+1}]$, 则由式(6)可得

$$\sum_{l=0}^h \alpha_l ((1-a_{i+l,k}^j)N_{i+l,k}^j(t) + a_{i+l+1,k}^j N_{i+l+1,k}^j(t)) = 0,$$

利用归纳假设, 由 $\{N_{i,k}^j(t)\}$ 的线性无关性得到

$$\begin{aligned} \alpha_0 (1-a_{i,k}^j) &= \alpha_1 (1-a_{i+1,k}^j) + \alpha_0 a_{i+1,k}^j \\ &= \alpha_2 (1-a_{i+2,k}^j) + \alpha_1 a_{i+2,k}^j = \cdots = \alpha_h a_{i+h+1,k}^j = 0, \end{aligned}$$

所以 $\alpha_0 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_h = 0$, 性质得证. 证毕.

4 代数双曲 B 样条升阶的割角算法

定义双阶代数双曲 B 样条曲线

$$P^j(t) = \sum_{i=0}^{s_j-k} N_{i,k}^j(t) P_i^j(t_1 \leq t \leq t_n),$$

其中 $N_{i,k}^j(t)$ 为定义在节点向量 \mathbf{T}^j 上的双阶代数双曲 B 样条基函数, P_i^j 称为曲线的控制顶点. 由定理 1, 当 j 分别等于 0 与 $n - 1$ 时, 双阶代数双曲 B 样条曲线实际是定义在节点向量 \mathbf{T} 与 $\hat{\mathbf{T}}$ 上的 k 阶与 $k + 1$ 阶代数双曲 B 样条曲线. 若 $P^j(t)$ ($j = 0, 1, \cdots, n - 1$) 表示同一条曲线, 利用定理 2, 可以找到曲线 $P^0(t)$ 与 $P^1(t)$, $P^1(t)$ 与 $P^2(t), \cdots, P^{n-2}(t)$ 与 $P^{n-1}(t)$ 的关系, 从而最终找到 $P^0(t)$ 与 $P^{n-1}(t)$ 的关系, 达到曲线升阶的目的.

定理 3. 设 $P^{j-1}(t)$ 与 $P^j(t)$ 为分别定义在节点向量 \mathbf{T}^{j-1} 与 \mathbf{T}^j 上的双阶代数双曲 B 样条曲线, 若两条曲线表示同一曲线, 则两曲线的控制顶点满足以下关系:

$$P_i^j = \begin{cases} P_i^{j-1}, & i < l_j - k + 1 \\ (1-a_{i,k}^j)P_i^{j-1} + a_{i,k}^j P_{i-1}^{j-1}, & l_j - k + 1 \leq i \leq l_j - 1 \\ P_{i-1}^{j-1}, & i > l_j - 1 \end{cases} \quad (7)$$

证明. 利用式(6)知

$$\begin{aligned} &\sum_i N_{i,k}^{j-1}(t) P_i^{j-1} \\ &= \sum_{i \leq l_j-k} N_{i,k}^j(t) P_i^{j-1} + \sum_{i \geq l_j} N_{i,k}^j(t) P_{i-1}^{j-1} + \\ &\quad \sum_{i=l_j-k+1}^{l_j-1} N_{i,k}^j(t) [(1-a_{i,k}^j)P_i^{j-1} + a_{i,k}^j P_{i-1}^{j-1}] \\ &= \sum_i N_{i,k}^j(t) P_i^j, \end{aligned}$$

利用 $\{N_{i,k}^j(t)\}$ 的线性无关性, 定理得证. 证毕.

定理 4. 代数双曲 B 样条曲线的升阶可以理解为控制顶点的割角过程.

证明. 给定节点向量 \mathbf{T} 上的代数双曲 B 样条曲线 $P(t)$, 由定理 1 将 \mathbf{T} 与 $P(t)$ 分别改写为 \mathbf{T}^0 与 $P^0(t)$, 对于 $j = 1, 2, \cdots, n - 1$, 在 \mathbf{T}^{j-1} 中嵌入节点 t^j , 由式(7)得

$$P(t) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) P_i = \sum_{i=0}^m N_{i,k}^0(t) P_i^0$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{m+1} N_{i,k}^1(t) P_i^1 = \cdots = \sum_{i=0}^{m+n-1} N_{i,k}^{n-1}(t) P_i^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m+n-1} N_{i,k+1}(t) \hat{P}_i \end{aligned} \tag{8}$$

其中， $\{N_{i,k}^j(t)\}$ 定义于节点向量 \mathbf{T}^j 上。

由式(7)、式(8)知代数双曲 B 样条曲线的升阶可以看作控制顶点的割角过程，定理得证。 证毕。

控制顶点的割角关系可由图 3、图 4 给出，其中图 3 中第 j 行顶点的几何意义是定义在节点向量 \mathbf{T}^j 上的双阶样条曲线的控制顶点。

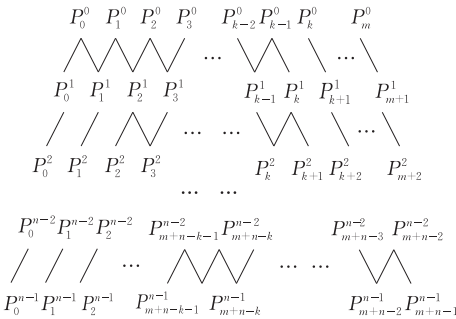


图 3 控制顶点的割角关系(第一行表示升阶前样条曲线的控制顶点,最后一行是升阶后曲线的控制顶点)

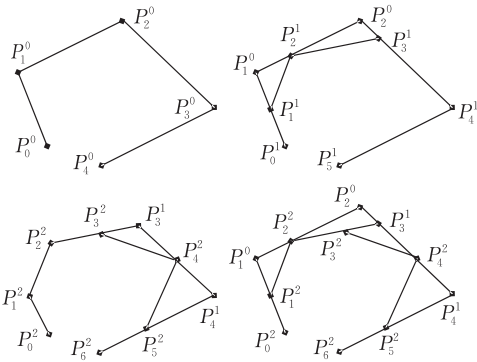


图 4 定义在节点向量 $\{0, 0, 0, 0, 0, 6, 1, 1, 1, 1\}$ 上的四阶代数双曲 B 样条曲线升阶控制顶点割角过程

5 结 论

本文考虑代数双曲 B 样条曲线的升阶问题。关

于 B 样条曲线的升阶,已有大量的文献讨论,这些算法也可相应地运用到代数双曲 B 样条曲线的升阶,但这些算法不能理解为割角算法。本文通过构造双阶代数双曲 B 样条曲线实现了曲线的升阶,并且升阶过程可以看作控制多边形的一系列割角过程,揭示了曲线升阶的几何意义。

参 考 文 献

[1] Wang Guo-Zhao, Chen Qin-Yu, Zhou Ming-Hua. NUAT B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 193-205

[2] Li Ya-Juan, Wang Guo-Zhao. Two kinds of B-basis of the algebraic hyperbolic space. Journal of Zhejiang University, 2005, 6A(7): 750-759

[3] Barry P J, Goldman R N. A recursive proof of a B-spline identity for degree elevation. Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(2): 173-175

[4] Cohen E, Lyche T, Schumaker L. Algorithms for degree raising of splines. ACM Transactions on Graphics, 1985, 4(3): 171-181

[5] Huang Qi-Xing, Hu Shi-Min, Martin R. Fast degree elevation and knot insertion for B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(2): 183-197

[6] Qin Kai-Huai. A new algorithm for degree-raising of nonuniform B-spline curves. Chinese Journal of Computers, 1996, 19(7): 537-542(in Chinese)

(秦开怀.非均匀 B 样条曲线升阶的新算法. 计算机学报, 1996, 19(7): 537-542)

[7] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1997

[8] Prautzsch H. Degree elevation of B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 1984, 1(2): 193-198

[9] Prautzsch H, Piper B. A fast algorithm to raise the degree of B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(4): 253-265

[10] Lü Yong-Gang, Wang Guo-Zhao, Yang Xun-Nian. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 379-393



ZHANG Bo, born in 1982, M. S. candidate. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics.

WANG Guo-Zhao, born in 1944, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics, computer aided geometric design and medical image processing.

Background

This research is supported by the National Natural Science Foundation of China (10371110, 60473130) and the National Basic Research Program (973 Program) of China (2004CB318000).

It is well known that the degree elevation of Bézier curves is corner cutting. The authors consider the degree elevation of algebraic hyperbolic B-spline curves. There are several methods that have been proposed in the literatures for

the degree elevation of B-spline curves, and these methods can also be used in the degree elevation of the algebraic hyperbolic B-spline curves. However none of them can be interpreted as corner cutting. In this paper, the authors construct a new class of basis functions called bi-order algebraic hyperbolic B-spline basis functions. By using these new basis functions, the corner cutting algorithm for the degree elevation of algebraic hyperbolic B-spline curves can be achieved.

第十六届全国网络与数据通信学术会议(NDCC2008)

征文通知

中国计算机学会网络与数据通信专业委员会定于 2008 年 11 月上旬(具体时间另行通知)在南京东南大学召开第十六届全国网络与数据通信学术会议(NDCC2008). 会议将就网络与数据通信理论与技术的最新研究进展和发展趋势开展深入、广泛的学术交流,并特邀著名专家学者作大会报告. 本次大会以《东南大学学报》增刊和《解放军理工大学学报》专刊(Ei 检索)的形式出版论文集,部分优秀论文将被推荐到《计算机学报》、《电子学报》、《通信学报》、《东南大学学报》等学报的正刊和《软件学报》的增刊上发表. 优秀论文的评选工作将在会议期间进行. 为保证本次会议的学术质量,吸引更多的高水平学术论文,大会将履行严格的审稿程序.

一、会议主题

本次会议的主题是:下一代网络的创新和发展

二、征文范围

本次会议的主要征文范围包括(但不限于)以下领域:

网络体系结构;透明计算;协议工程;网络安全;网络管理;分布式计算;网格计算;普适计算;移动和无线网络;传感器网络;服务计算和 Web 服务;网络运行与管理;宽带多媒体通信;光纤通信技术;各种网络应用.

三、投稿须知

- 1. 投稿内容突出作者的创新与成果,具有较重要的学术价值与应用推广价值,未在国内外公开发行的刊物或会议上发表或宣读过.
- 2. 论文语言要求中文,字数一般不超过 6000 字,论文格式参照《计算机学报》,投稿稿件用 Word 或 pdf 文件形式.
- 3. 请在稿件最后附上第一作者姓名、性别、职务/职称、所属单位、通信地址、邮政编码、联系电话和 Email 地址,并注明论文所属领域.
- 4. 被录用的论文,至少要有一位作者参加会议并发言,才有资格参与优秀论文的评选.

四、投稿方式

论文投稿通过电子邮件的方式提交,并在邮件标题注明“NDCC2008 投稿”.

投稿邮箱:ndcc2008@seu.edu.cn

五、重要日期

论文提交截止日期:2008 年 6 月 20 日 论文录用通知日期:2008 年 7 月 20 日 会议注册截止日期:2008 年 8 月 20 日

六、联系方式

通信地址:南京市四牌楼 2 号东南大学计算机学院 邮政编码:210096 联系人:罗军舟,李伟
联系电话:025-8379 1010 传真:025-8379 1010 邮件地址:xchlw@seu.edu.cn
会议网址: <http://cse.seu.edu.cn/ndcc2008>

七、主办承办

会议主办:中国计算机学会网络与数据通信专业委员会
会议承办:东南大学计算机科学与工程学院 中国人民解放军理工大学指挥自动化学院
计算机网络和信息集成教育部重点实验室 江苏省网络与信息安全重点实验室