

粒计算研究现状及基于 Rough 逻辑语义的粒计算研究

刘 清^{1),3)} 孙 辉¹⁾ 王洪发²⁾

¹⁾(南昌工程学院计算机科学与技术系 南昌 330099)

²⁾(浙江水利水电专科学校 杭州 310018)

³⁾(南昌大学计算机科学系 南昌 330031)

摘 要 综述了粒计算的提出背景、研究现状及其发展趋势,也给出了作者的评论;论述了粒计算应用的广泛性,包括 AI 中的图像检索、医学诊疗系统、连续数学中的积分学及其它许多逻辑推理等方面的应用. 讨论了粒计算将有希望成为处理信息和研究其它学科的理论工具和方法学. 讨论了粒计算中基于 Rough 逻辑语义的粒及其相关性,建立了这种粒的演绎推理. 提出了基于 Rough 逻辑语义的粒归结原理和归结策略,包括 λ -归结策略和锁归结策略. 证明了这种粒归结的完全性. 基于 Rough 逻辑语义的粒在 AI 的问题求解、专家系统以及机器定理证明中都将成为一种新的研究思想和新的理论工具. 最后,提出了这种基于 Rough 逻辑语义的粒计算研究前景.

关键词 粒计算; Rough 逻辑语义;粒归结原理和策略;问题求解; λ -归结和锁归结策略

中图法分类号 TP301

The Present Studying State of Granular Computing and Studying of Granular Computing Based on the Semantics of Rough Logic

LIU Qing^{1),3)} SUN Hui¹⁾ WANG Hong-Fa²⁾

¹⁾(Department of Computer Science & Technology, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099)

²⁾(Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou 310018)

³⁾(Department of Computer Science, Nanchang University, Nanchang 330047)

Abstract In this article, the proposed background, the present studying state and its developing direction of granular computing are summarized. Author's view are also inserted in the article. The applied universality of granular computing is discussed, including the applications of image searching technology in AI, diagnosis and treatment systems in medicine, calculus in seriate mathematics and other approximate reasoning. Granular computing could hopefully be the theoretical tool and methodology on information processing and studying other subject. Granulations and related properties based on the semantics of Rough logic are also discussed. Deductive reasoning of the granulations is created. Resolution principles and resolution strategies of granulations based on the semantics of Rough logic are proposed, it includes λ -resolution strategy and lock resolution strategy. The soundness of the granular resolution is proved. Application of granulations based on the semantics of Rough logic in problem resolving, expert systems and machine theorem proving of AI could hopefully be a new research idea and new theoretical tools. Finally, further developing perspectives of granulations based on the semantics of Rough logic are also proposed in this article.

Keywords granular computing; semantics of Rough logic; resolution principles and strategies of the granulations; problem solving; λ -resolution and lock resolution strategies

1 引言

粒是自人类有史以来就应该存在并应用于实践的概念,因为它是人类日常生活中处理问题很自然的一种方法学.但专文论述粒概念似乎应当归结为 Zadeh 于 1979 年发表的论文^[1].随后, Pawlak 于 1982 年提出的 Rough 集^[2],实质上也是研究用粒的思想方法来处理不可定义集问题,只不过他的动机在于解决 1904 年 Frege 提出的边界线上的元素计算问题.所以, Pawlak 于 1982 年发表的论文和 Hobbs 于 1985 年发表的论文^[3]等文章都是试图以粒的方法来处理问题并解决问题.但他们的研究目标不一样. Zadeh 试图将 Fuzzy 逻辑的研究变换为其语义的研究; Pawlak 是将一个不可定义的集合经不可区分关系划分成粒,从而精确地计算出上、下近似集,以解决边界线上的元素计算问题; Hobbs 从人工智能中的问题求解出发,试图研究出一种问题求解的方法学. 1996 年 Lin 倡导了粒计算(Granular Computing)这个词,立即得到 Zadeh 的高度重视,并把它缩写成 GrC.认为 GrC 是所有用粒方法处理问题最好的概括描述^[4].由此看来,粒计算的确可作为研究信息、处理信息及其它许多求解问题的一种方法学.

信息粒(Information Granules)是指人类在解决和处理大量复杂信息问题时,由于人类的能力有限,把大量复杂信息按其各自的特征和性能将其划分成若干较简单的块,而每个如此划分出来的块被称作一个粒.这种处理信息的过程,就被称作信息粒化(Granulating).被划分的粒是清晰的还是模糊的,完全依赖于被用来分割的不分明性、相似性、近似性或功能性关系的特性所决定^[5].

Zadeh 在研究模糊集的基础上,基于模糊逻辑的语义提出了信息粒度概念,这就是 1979 年他发表的第一篇关于粒的论述文章^[1].在这篇文章中,他定义信息粒为一个命题,即 x 的值是以程度 λ 隶属于模糊子集 $G \subseteq U$,其中 x 是 U 上的变量, x 的值是 U 上的一个实体,写成:

$$g = x \text{ is } G \text{ is } \lambda,$$

形式上被记成:

$$g = \{u \in U: x \text{ 的值}(v(x)=u, v \text{ 是 } U \text{ 上的赋值符号}) \text{ 是以程度 } \lambda \text{ 隶属于模糊子集 } G \subseteq U\}.$$

这实际上是模糊命题逻辑公式的意义集.从 Zadeh 的观点试图将模糊逻辑的研究转换为模糊逻辑的

语义研究.

描述粒计算通常应用英文单词: Granularity, Granule 和 Granulation,现将它们的意义和区别讨论如下:

“Granularity”被解释为“粒度”.在早期关于粒的研究文献中多用这个词,如 Zadeh 于 1979 年发表的论文就用这个词^[1].就这个词在该文中描述的内容可以看出粒计算是研究被粒化的类或块的大小. Stanford 大学教授 Hobbs 于 1985 年发表于在美国 Los Angeles 举行的国际人工智能联合会议上的论文^[3],直接用这个词作论文题目.我国较早研究粒的学者张钹和张铃于 1990 年出版的专著引用了“粒度”(Granularity)的概念^[6].

从这些文献中描述的内容可以理解粒计算除了研究被分割的粒的大小外,还研究不同层次的粒之间的关系、粒的分解和合并等.

“Granule”被解释为“基本粒”,是紧紧凝结在一起的“糰”、“颗粒”和“块”等,近些年都用“Information Granules”这个词.是研究将信息集切割成互不相交的“片”、“块”等,或划分成互不相交的“子集”、“组”、“类”和“群”等,实质上是“划分”(partition)的意义,表示颗粒之间是清晰、互不相交的.可见用这个词研究粒计算是研究信息被划分.

“Granulation”被解释为“粒”.只有 Zadeh 于 1998 年发表的另一篇论文中用了这个词^[4].“Information Granulation”意思是将信息切割或分成可能两两有交的“类”和“块”等,他从模糊集观点讨论,所以被分成的粒可能是模糊的或边缘不清晰的“块”.

在中文文献中究竟用“粒”还是“粒度”来表达,本人认为似乎应从研究内容和讨论的问题本身所决定.如果讨论的问题属边缘模糊的粒(Granulation)似乎称“粒”为宜,因为这种粒的量度是不清晰的.

2 粒计算的研究现状

粒概念的提出和用法无法追溯到它的历史,但粒计算这个词的倡导是 Lin 于 1996 年第一次提出、是有源头的^[4].自这个源头计算至今已有十余年的研究史了.其研究进展大致可分成如下几种观点和方法.

2.1 以模糊集理论、邻域拓扑和数学模型的观点研究粒计算

Zadeh 于 1979 年在他的论文中^[1]定义信息粒为一个命题.形式上被记成:

$g = \{u \in U: x \text{ 的值 } u(v(x)=u, v \text{ 是 } U \text{ 上的赋值符号}) \text{ 是以程度 } \lambda \text{ 隶属于模糊子集 } G \subseteq U\}$.

很显然, $0 \leq \lambda \leq 1$. 从模糊集的观点来看, 此处的 λ 是模糊隶属函数 μ_G 的值; 而从逻辑的观点看, 此处的 λ 是所建立的命题的模糊真值或概率值. 所以, 在这篇文章中, 除了定义模糊粒外, 还讨论了模糊粒的概率分布及其概率的计算方法. 可见 Zadeh 研究粒的动机试图将模糊逻辑的研究转换成模糊逻辑公式意义的研究.

Lin 于 1998 年在他发表的论文及其随后的一系列关于粒计算的文章中^[8-15], 是以邻域观点、通过二元关系定义了粒. 设 $S = (U, A, V, f)$ 是信息系统, $B: V \rightarrow U$ 是二元关系, 其中 U 是所讨论对象的全集, A 是属性集, V 是属性值集, f 是信息函数. 用一般二元关系 B 定义粒是如下形式:

$$g_p = \{u \in U: u B p, p \in V\}.$$

显然 p 的邻域 g_p 是清晰还是模糊的, 完全取决于二元关系 B 的特性. 如果 B 是等价关系, 则邻域 g_p 是边缘清晰的粒, 否则边缘是模糊的粒^[8,10,12,14]. Lin 近期撰写的论文^[16], 提出了粒计算的基本数学结构, 包括概念结构、几何结构、拓扑结构和代数结构, 这将为粒计算的进一步研究奠定了理论基础和处理问题的新的方法学, 为粒计算的发展提供了新思路^[16].

2.2 以逻辑观点研究信息粒的划分以及粒的分解和合并

Hobbs 在他发表的论文中^[3], 讨论了粒的分解和合并以及如何得到不同大小的粒, 因此他提出了产生不可区分关系和一般相容关系模型, 这就是:

$$(1) (\forall x, y)(x \sim y) \equiv (\forall p \in R)(p(x) \equiv p(y));$$

$$(2) (\forall x, y)(x \sim y) \equiv |f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$

$$(3) (x \sim y) \text{ iff 对于一个 } p \in R, \text{ 如果 } p(x) \text{ 和 } p(y) \text{ 都是可以确定的, 则 } p(x) \equiv p(y).$$

其中 R 是所讨论的逻辑公式中出现的全体谓词的集合, f 是出现在所讨论的逻辑公式中的函数项, ε 是任给定的小的正实数.

在上述模型中, (1) 意味着将引导一种具有传递性的不可区分关系“ \sim ”, 因此可用这个不可区分关系对信息或知识进行粒化. 不过这是一个二阶问题, 由于二阶逻辑至今仍是困难问题, 所以 Hobbs 的粒计算模型无法被引用. 模型中 (2) 和 (3) 将用偏序谓词引导出具有非传递性的相容关系“ \sim ”, 由此可得到较粗的粒度层上的粒, 但这种粒的边缘不一定是清晰的. 由此可见, Hobbs 的这个模型是从逻辑的观点研究不同层次上的粒及其相关性质, 这将对 AI

中的问题求解产生影响, 引导我们在不同层上找到各个子问题的解. 可见 Hobbs 研究粒计算的动机是试图用粒计算方法学作为解决 AI 中问题求解的理论工具^[3]. 从这篇文献可以看出 Hobbs 没有讨论粒的运算规则, 所以研究粒的分解和合并仍然不甚方便.

2.3 以代数格研究信息粒并通过映射研究不同层上粒之间的关系

我国较早的粒研究学者张钊和张铃于 1990 年出版的专著一书^[6]中就引用了粒度概念. 随后发表的论文^[7], 是从代数格的角度研究如何产生不同粗细的粒度空间, 并讨论不同粒度空间上的粒之间的函数关系. 从给定的原始问题空间 (X, F, f) , 可找到它的对应的商空间 $([X], [F], [f])$. 观察当前粒度空间是否可解, 以决定是否进入更细、更深一层粒度空间研究粒计算, 随后将不同粗细的粒世界上的粒(子问题)的解组合成原始问题或整体粒的解. 近期提出一种商粒度空间上的多粒度表示法, 即由一组商空间组成的半序格描述不同粒度空间上的关系. 并以此用于图像检索技术, 大量的实验结果表明多粒度表示用于图像处理是有很好的效果^[17].

Hobbs 和张氏兄弟分别以不同观点和方法产生不同粗细的粒度层, 其意义都是在于人们能从极不相同的粒世界观察和分析同一个问题, 并能对此求解, 最后归一到整体问题的解, 这也是 AI 中问题求解的宗旨.

Yao 对粒计算进行了许多研究. 在他诸多论文中^[18-24], 似乎都是以区间集、代数格来研究粒计算. 设 $IS = (U, A)$ 是信息系统, 如果至少存在一个公式 $F \in L$, 其中 L 是 IS 上的决策逻辑, 使得 $m(F) = \{u \in U: u \models_{IS} F\}$, 表示满足 F 的 U 上的元素集合, 则这个集合 $m(F)$ 被称作可定义的基本粒; 而把可定义的基本粒称作划分, 记成 p , 即由 p 将全集 U 划分得到的每个等价类都是可定义的粒, 则称这个划分 p 是可定义的. 所有可定义的划分的集合形成一个划分族 $\Pi_p(U)$, 它被称作是一个格或半序格. 在这个格或半序格上, 可以讨论分类问题的一般解和特殊解, 也就是设 $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_p$ 是一致分类问题的两个解, 如果 $\pi_1 \leq \pi_2$ 则称 π_1 比 π_2 更特殊; 换句话说, π_2 比 π_1 更一般. 近来他又提出粒计算的三个方面的研究, 即粒的结构研究、粒计算在人工智能问题求解和在哲学中的应用研究^[24].

2.4 以包含度、Mereology 概念研究粒计算

Skowron 以包含度概念研究粒近似空间上的 Rough 下近似和上近似, 并发表了一系列的信息粒

和粒计算的论文^[25-29]. 设 $X, Y \subseteq U$ 是 U 上的两个子集, X 至少以 r 程度包含于 Y , 记成 $X \subseteq_r Y$, 形式上,

$$V_r(X, Y) = \begin{cases} \text{Card}(X \cap Y) / \text{Card}(X), & X \neq \emptyset \\ 1, & \text{其他} \end{cases}$$

于是粒近似空间是 3-元组: $\text{GAS} = (GS, G, T_r)$, 其中 $GS = (E, O, G, V)$, $E = \{g_1, g_1, \dots, g_n\}$ 是基本粒的集合; $O = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$ 是粒运算符的集合; $G = \{G_1, G_2, \dots, G_h\}$ 是 E 上的基本粒经 O 上的运算符组合而得到的组合粒的集合; $V: G \times G \rightarrow [0, 1]$ 是 Rough 包含函数, 它被解释为一个粒被包含于另一个粒的程度的量度. 设 $G = \{GS_1, GS_2, \dots, GS_t\}$ 是信息粒系统族; $T_r \subseteq G \times G$ 是 G 上的二元传递关系. 由此, 可在粒近似空间 GAS 上建立粒关于 T_r 的下和上近似集的定义:

$\text{APP}_{\text{LOW}}(AS, X, q) = \{x \in U: V(I(x), X) \geq q \wedge q \leq 1\}$
和

$\text{APP}_{\text{UPP}}(AS, X, p) = \{x \in U: V(I(x), X) > p \wedge p \geq 0\}$.

其中, $p < q$. Skowron 研究各种近似空间上的 Rough 下和上近似集的意义在于探讨 Rough 集理论在各种环境下将被构造出不同的结构, 也就是建立 Rough 集理论在各个专业领域中的应用前景.

Polkowski 以 Mereology 概念定义了 Rough Mereological 粒^[30-33]. Mereology 实质上也是一种包含度概念. 这个词出现于经典集合论时期, 当时认为一个集合全部元素被包含在另一个集合中才称包含, 否则称不包含. 因此, Lesniewski 于 1916 年提出用这个词来研究关于集合之间部分元素被包含的问题. 设 μ 是全集 U 上的 Rough 包含函数, 其定义与上述 Skowron 定义的包含函数类似. $r \in [0, 1]$ 是包含度, Cl_s 是类算子符, 它被用来作用于划分的类上. 设 $x \in U$, Rough Mereological 粒被定义如下:

$$g_r(x) = Cl_s(\Psi_r),$$

其中, $\Psi_r(y)$ 是一个类, 有 $\Psi_r(y)$ 等价于 $y \mu_r x$, 表示 y 以 r 程度包含于 x , 这里的 x, y 应广义理解它可以是类、集合、向量和粒等. 所以, 这里由 Mereology 包含度函数 μ 诱导的粒可以形式地定义如下:

$$g_r(x) = \{y \in U: y \mu_r x \wedge 0 \leq r < 1\},$$

称此为关于 x 的 r -粒, 表示以 x 为中心, r 为半径的邻域 $Nr(x)$, $y \in Nr(x)$.

设 $\text{GAS} = (U, A)$ 是粒近似空间, U 是粒的全域, A 是粒集上派生的属性集. $r, s \in (0, 1)$ 是近似度, 粒的集合 $H \subseteq U$. μ 关于粒 g 的 r -下近似被定义如下:

$$Cl_{\text{LOW}}(\mu, H, r) = Cl_s(\Psi(\mu, g, r, H)(h)),$$

其中, $\Psi(\mu, g, r, H)(h)$ 是可定义的当且仅当 $\mu(h,$

$g, r) \wedge h \in H$ 为真, 意味着 $h \in H$ 且 h 至少以 r (给定的阈值) 程度包含于 g , 满足如此条件的 U 上的粒的集合为 μ 关于粒 g 的 r -下近似. 类似地可以给出 μ 关于粒 g 的 s -上近似的定义, 它被写成:

$$Cl_{\text{UPP}}(\mu, H, s) = Cl_s(\Psi(\mu, g, s, H)(h)),$$

其中 $\Psi(\mu, g, s, H)(h)$ 是可定义的, 当且仅当 $\mu(h, g, s) \wedge h \in H$ 为真. 意味着 $h \in H$ 且 h 以 s ($s > 0$) 程度 (至少 1 个元素) 包含于 g , 满足如此条件的 U 上粒的集合为 μ 关于粒 g 的 s -上近似.

2.5 基于古数学中“黄金分割”的粒计算^[34-36]

每件事物都可以数字化, 也就是所有事物在最后分析中都可用数字表示出来, 是一种事量关系. 这是古希腊数学家和哲学家彼得哥拉斯 (Pythagoras) 提出的论断. 根据这个思想, 古代数学家出乎意料地发现一个神秘的数字, 这就是 0.618. 继续研究的结果, 他们找到了计算这个数字的公式:

$$(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618.$$

虽然这是 2500 年以前的理论, 但它在今天仍然有着重要意义. 例如, 利用 0.618 可定义一种不可区分关系, 因为这个数字是 $[0, 1]$ 区间上的最优选点, 因此以 0.618 定义不可区分关系并将这种不可区分关系用作划分的方法, 也应当是较好的划分之一.

设 $[a, b]$ 是一个区间, 它被 0.618 分成 n 个相等的小区间. 每个小区间 $[a + j \times 0.618, a + (j+1) \times 0.618]$, $j = 1, 2, \dots, n$, 被看成一个划分的等价类, 称它是一个基本粒. 于是在这个区间 $[a, b]$ 上可定义一个不可区分关系 IR 如下:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \text{ IR } x_2 \text{ iff}$$

$$x_1, x_2 \in [a + j \times 0.618, a + (j+1) \times 0.618].$$

所以, IR 在每个小区间上是传递的, 因此这些小区间可看成在 $[a, b]$ 上按 IR 的划分. 由此整个区间 $[a, b]$ 被 0.618 分成若干不大于 0.618 的、互不相交的小区间, 直到 $a + n \times 0.618 > b$, 其中 n 是小区间的总数.

我们可用 0.618 定义的不可区分关系 IR 来构造 Rough 集理论中的下和上近似集. 设 $AS = (U, IR)$ 是近似空间, 根据彼得哥拉斯公理, U 上的每个对象都可被数字化. 因此, 不失一般性, 设 $a = \min(x \in U)$ 和 $b = \max(x \in U)$, 于是得到对应于 U 上的数值区间 $[a_U, b_U]$. 如果 $x \in U$ 不是数字, 我们可定义一个映射 f , 将非数字的对象映射成数字对象. 现设 $\forall X \subseteq U$, 则 X 必然对应一个数字子区间 $[a_X, b_X] \subseteq [a_U, b_U]$. 所以, 不可区分关系 IR 关于 $[a_X, b_X]$ 的下和上近似被定义如下:

$IR_*([a_x, b_x]) = \{ x \in [a_U, b_U] : [x]_{IR} \subseteq [a_x, b_x] \}$
和
 $IR^*([a_x, b_x]) = \{ x \in [a_U, b_U] : [x]_{IR} \cap [a_x, b_x] \neq \emptyset \}$,
其中, $[x]_{IR}$ 是 x 关于不可区分关系 IR 的基本粒.

2.6 Rough 集中的上、下近似理论为粒计算研究提供了一种方法学^[37-39]

Pawlak 经等价关系定义了 Rough 集, 称 Pawlak Rough 集或标准 Rough 集. 随后许多 Rough 集的扩充或广义 Rough 集, 实质上都是属于粒计算的研究范畴. 因为无论是标准 Rough 集还是广义 Rough 集研究, 似乎绝大部分都是建立在划分或粒化的基础上的一种研究, 所以说 Rough 集是粒计算的一种特例. 但 Rough 集的提出为计算机科学家和逻辑学家研究 G. Frege 的边界线区域上的元素数目计算问题给出了很好的思路. 为此, 提出了利用在其定义域上不可定义的逻辑公式本身来产生不可区分关系, 并用此不可区分关系来定义 Rough 下和上近似集.

我们用一个 Rough 逻辑公式 F 先生成任意二元关系, 随后构造出 U 上的关于这个二元关系的邻域, 并以此定义 Rough 集理论中的下和上近似集. 设 F 是一个给定信息系统上定义的 Rough 逻辑公式, 它在其定义区域中有些元素是可满足, 但它们不能归为永真, 也不能归为恒假, 这就是我们需要找不可定义集上的边界线. 如何计算这类元素的数目? 根据 Pawlak 定义的 Rough 下和上近似的思路, 利用这个公式 F 本身来定义一个二元关系 IRF , 并用它来计算出这种边界线上的元素数量. 这里定义这个二元关系 IRF 如下:

(1) $\forall x, y \in U, x IRF_P y \text{ iff } P(x) = P(y)$,
其中, $P \in R(F \text{ 中全体谓词的集合})$. 如此定义的 IRF_P 是 U 上关于这个谓词 P 的二元关系. F 中所有 P 都被如此定义出 IRF_P , 则下面用 IRF_P 定义关于该逻辑公式 F 的二元关系 IRF . 它被定义如下:

(2) $IRF = \bigcap_{P \in R} IRF_P$.
用如此定义的二元关系 IRF 定义 $x \in U$ 关于 IRF 的邻域 $IRF(x)$, 即

(3) $IRF(x) = \{ y \in U : y IRF x \}$.
并用该邻域 $IRF(x)$ 去定义 Rough 集理论中的下和上近似集:

$IRF_*(D) = \{ x \in U : (\forall y)(y \in IRF(x) \rightarrow y \in D) \}$
和
 $IRF^*(D) = \{ x \in U : (\exists y)(y \in IRF(x) \wedge y \in D) \}$,
其中, $D \subseteq U$ 是 U 上 Rough 逻辑公式 F 的定义域

集, $IRF(x)$ 是 x 关于二元关系 IRF 的邻域. 所以, Rough 逻辑公式 F 在 D 的边界线 $BN_{IRF}(D)$ 上的元素数量被计算如下:

$$BN_{IRF}(D) = IRF^*(D) - IRF_*(D).$$

从上述定义不可区分关系, 并经这种被定义的不可区分关系构造 Rough 上、下近似集, 可以看出 Rough 集理论是粒计算的重要研究课题之一, 是粒计算的重要组成部分, 就某种意义而言, 是粒计算成功应用的典范. 它也提供了粒计算研究的新思路, 为粒计算研究提供了一种上、下近似理论的方法学.

粒计算在数据安全、程序化简和程序验证等方面的应用, 读者可参见文献[10, 37, 39].

2.7 微积分学中的粒计算^[40-42]

在微积分学中, 定义无穷实数序列: $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ 为一个粒, 并记成 (a_n) . 如果这个无穷实数序列存在实数极限 a , 则意味着这个粒 (a_n) 是以 a 为中心, 无穷多个趋于 a 的实数与 a 一起组成一个粒, 简记成 $[a]$. 如果无穷实数序列存在实数 0 为极限, 则称序列 (a_n) 为无穷小, 写成粒 $[0]$. 在 Lin 的文章中^[16], 提出用“粒”代替“点”(数). 于是, 我们在某种意义下便可得到无穷小的数 $[0]$.

如果我们把微积分学中的实数域 R 扩大到定义实数序列为粒的粒域 R^* , 于是在 R^* 上可讨论无穷序列为粒的粒计算问题.

2.7.1 R^* 上序列粒的加法和乘法运算

- (1) $(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n)$.
- (2) $(a_n) \otimes (b_n) = (a_n \cdot b_n)$.

其中“+”和“ \cdot ”分别是数域 R 中的通常加法和乘法运算符. 如

$(a_n + b_n) = a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$, 所以 $(a_n + b_n)$ 是一新的无穷实数序列粒.

$(a_n \cdot b_n) = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n, \dots$, 所以 $(a_n \cdot b_n)$ 也是一新的无穷实数序列粒.

“+”和“ \cdot ”是可交换的, 于是, (R^*, \oplus, \otimes) 可构成一个可交换的粒环. 其加法的零元为粒 $[0]$, 乘法的幺元为粒 $[1]$.

2.7.2 R^* 上不可区分关系符“IND”

$$(a_n) IND (b_n) \text{ iff } |\{n \in N : a_n \neq b_n\}| < m,$$

其中 m 是有限自然数, $|\cdot|$ 表示集合“ \cdot ”的基数. 意味着除了序列前有限个对应项不相等外, 其余无穷个对应项都是不可区分的, 于是称 IND 为 R^* 上的不可区分关系.

2.7.3 R^* 上的商空间

R^* 上经不可区分关系“ IND ”可划分成等价类,

得到非标准域 R^* 上的商空间: $R^*/\text{IND} = \{[a_n]: (a_n) \in R^*\}$ 是 R^* 上粒的等价类空间. 在 R^*/IND 上引进加法 \oplus 和乘法 \otimes 运算:

(1) $[a_n] \oplus [b_n] = [a_n + b_n]$, 仍是 R^*/IND 上新的无穷实数序列作成的粒.

(2) $[a_n] \otimes [b_n] = [a_n \cdot b_n]$, 仍是 R^*/IND 上新的无穷实数序列作成的粒.

可见 $(R^*/\text{IND}, \oplus, \otimes)$ 也可构成一个可交换粒环. 其加法的零元仍为粒 $[0]$, 乘法的幺元仍为粒 $[1]$.

2.7.4 R^* 和 R^*/IND 上的序关系 \leq

(1) R^* 上的序关系 \leq 被定义为: $(a_n) \leq (b_n)$ iff $\{n: a_n \rightarrow \leq b_n\}$ 是有限集. 而其余无穷个对应项都是 $a_n \leq b_n$;

(2) R^*/IND 上的序关系 \leq 被定义为: $[a_n] \leq [b_n]$ iff $(a_n) \leq (b_n)$.

2.7.5 微积分学中粒计算的应用

(1) 应用于力学中求解微分方程和变分问题的近似解, 因此, 这种解就不再是一个点, 而是一个包含这个点及其周围无穷多个接近这个点的数构成的粒作为其解^[42].

(2) 应用于微积分学中的无穷序列极限、连续函数中的 $\epsilon-\delta$, 在研究非标准分析方法的 20 世纪 70 年代, 有人试图用非标准分析方法取代微积分学中的 $\epsilon-\delta$ 方法. 就粒计算的观点, 这实质上是试图以粒计算的方法来处理微积分学中的 $\epsilon-\delta$ 方法^[40-41].

(3) 应用于描述概念格、本体论中的概念及其之间的关系并处理相关的一些问题.

上述粒计算的几种研究策略, 实质上可归为 3 类: (1) 从代数的角度研究粒计算. 也就是基于二元关系不同, 信息或知识被粒化, 得到不同大小和不同结构的粒. 一般说来用等价关系或不可区分关系粒化, 得到的粒是互不相交的, 这种粒处理起来是独立的, 因此它是容易的. 而非等价关系粒化, 得到的信息粒或知识粒, 其边缘是模糊的, 即粒与粒之间有交元素, 互相影响, 因此这种粒处理起来是复杂的. 因为一个元素可能出现在多个粒中, 也可能多个元素只出现在两个粒中. 这是粒计算研究最困难、也是最关键的问题之一. 用代数的观点作为研究粒计算的手段, 其优点在于可根据粒化的需要自由地定义被用于粒化的二元关系. (2) 从逻辑的角度研究粒计算. 也即用谓词及其关于逻辑联结词的组合公式去粒化信息或知识, 并用逻辑推理手段去处理这种粒化得到的粒. 这种逻辑的手段, 其优点在于谓词是严格的, 被粒化的信息或知识没有二义性. 但谓词

是一种逻辑语言的基本单位, 必然受到这种语言的语法和语义约束, 所以, 要定义或建立这种谓词必然要服从相应语言的语法和语义的限制. (3) 从拓扑学的角度研究粒计算. 也就是以邻域系统、非标准分析方法去处理信息和知识, 把每个邻域看成一个粒, 作为粒计算处理的基本单位. 其优点在于它能处理连续性研究对象, 如微积分学中的连续实数序列、微分方程和变分不等式的近似解以及力学中受力均衡的横跨梁等问题. 但在粒化这些问题之前必然要施加许多约束的初始条件^[42].

3 基于 Rough 逻辑语义的粒计算研究

当前粒计算的理论研究基本上是粒计算的拓扑模型、几何模型、代数模型和逻辑模型等多种观点. 拓扑模型和几何模型大致是以拓扑学、邻域系统作为研究的理论工具^[16]; 代数研究主要是以二元关系和偏序格作为理论基础研究粒计算^[2, 4, 6-15, 18-24]; 逻辑研究主要是从哲学、认知科学的思维方法研究粒计算^[17, 24], Kripke 试图通过模态逻辑的语义分析研究模态逻辑^[43], Luis 试图从模态逻辑的语义分析研究模态逻辑的状态空间和归结推理^[44]. 张氏兄弟以认知科学的思维方法提出了基于商空间理论的多粒度表示法并应用于图像处理, 取得了较好的应用价值^[17]. 本文基于给定信息系统上定义的 Rough 逻辑的语义为平台研究粒计算及其推理. 下面着重介绍这种被定义在给定信息系统上的 Rough 逻辑公式意义的粒及其推理^[32, 34-37, 39].

3.1 基于 Rough 逻辑公式意义的粒及其推理

定义在给定信息系统上的 Rough 逻辑公式的意义:

$$m(F) = \{x \in U: x \approx_{\text{IS}} F\}$$

被看作依赖于 Rough 逻辑公式 F 的粒, 其中 F 是被定义在给定信息系统 $IS = (U, A)$ 上的 Rough 逻辑公式^[45-56], 缩写成 $F \in RL_{\text{IS}}$. 实质上, 是语义函数 m 将 F 映射到 U 上的子集. 形如 $m(F)$ 粒的集合构成了粒空间, 我们试图在这样的空间上研究粒计算.

3.1.1 Rough 逻辑公式诱导的粒的度量

形如 $m(F)$ 的粒的度量被定义为它与全集 U 的比值, 它是使得被定义在给定信息系统 $IS = (U, A)$ 上的 Rough 逻辑公式 F 在 IS 上取真的程度. 形式上, 它被计算如下:

$$T_{\text{IS}}(m(F)) = \text{Card}(m(F)) / \text{Card}(U) = \lambda,$$

其中 $T_{\text{IS}}(\cdot)$ 表示 T_{IS} 对粒“ \cdot ”在 IS 上赋予一个量

度,是指派生这个粒的 Rough 逻辑公式取真的程度值. 等价于 m 将 F 解释为逻辑上的真、假程度 $\lambda \in [0, 1]$, 为一个实数. 粒 $m(F)$ 的这种量度值, 即 F 的真、假程度值类型是 Pawlak 于 1987 年引入的 Rough 真值概念: “假设一个 Rough 逻辑公式 F 在给定的信息系统上 Roughly 真当且仅当它的意义集的上近似等于全集”的推广^[45]. 由此, $m(F)$ 的量度被定义如下:

(1) 如果 $\infty(m(F), U) = 0$, 则 $m(F)$ 被认为在 IS 上将 F 解释为假;

(2) 如果 $\infty(m(F), U) = 1$, 则 $m(F)$ 被认为在 IS 上将 F 解释为真;

(3) 如果 $\infty(m(F), U) = \lambda$, 则 $m(F)$ 被认为在 IS 上将 F 解释至少以 λ 程度为真, 其中 $\lambda \in [0, 1]$.

3.1.2 带联结词的 Rough 逻辑公式诱导的粒运算

设 $m(F_1)$ 和 $m(F_2)$ 分别是 Rough 逻辑公式 F_1 和 F_2 诱导的粒, 他们关于通常的逻辑联结词 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 和 \leftrightarrow 的运算分别定义如下^[38]:

$$(1) m(\neg F) = U - m(F);$$

$$(2) m(F_1 \vee F_2) = m(F_1) \cup m(F_2);$$

$$(3) m(F_1 \wedge F_2) = m(F_1) \cap m(F_2);$$

$$(4) m(F_1 \rightarrow F_2) = m(\neg F_1) \cup m(F_2);$$

$$(5) m(F_1 \leftrightarrow F_2) = (m(\neg F_1) \cup m(F_2)) \cap (m(\neg F_2) \cup m(F_1)).$$

3.1.3 Rough 逻辑公式诱导的粒运算

形如 $m(F)$ 的粒运算, 除了通常的集合运算外, 还有两个特别运算, 即至少以 λ 程度包含运算 ∞_λ 和至少以 λ 程度相似运算 ∞_λ .

λ 程度包含运算符 ∞_λ 被定义如下:

$$\infty_\lambda(m(F_1), m(F_2)) = \begin{cases} \text{Card}(m(F_1) \cap m(F_2)) / \text{Card}(m(F_1)) = \lambda, & m(F_1) \neq \emptyset \\ 1, & m(F_1) = \emptyset \end{cases}.$$

λ 程度相似运算符 ∞_λ 被定义如下:

$$|T_{IS}(m(F_1)) - T_{IS}(m(F_2))| <$$

$$1 - \lambda \wedge m(F_1) \infty_\lambda m(F_2) \wedge m(F_2) \infty_\lambda m(F_1),$$

其中 F_1 和 F_2 是给定的信息系统 IS 上的 Rough 逻辑公式, $\text{Card}(\cdot)$ 表示 \cdot 中的元素个数, T_{IS} 是 1-ary 运算符, 即对粒 $m(F)$ 赋予一种量度, 即 F 的真、假程度值.

3.1.4 Rough 逻辑公式 F 诱导的粒的性质

(1) 同一性

$$(\forall F) \in RL_{IS}, \infty_\lambda(m(F), m(F)).$$

(2) 对称性

$$(\forall F_1, F_2) \in RL_{IS}, \infty_\lambda(m(F_1), m(F_2)) \rightarrow \infty_\lambda(m(F_2), m(F_1)).$$

(3) 恒真性

$$(\forall F) \in RL_{IS}, \infty_\lambda(m(F \vee \neg F), U).$$

(4) 吸收性

$$(\forall F_1, F_2) \in RL_{IS},$$

$$\infty_\lambda(m(F_1) \cap (m(F_1) \cup m(F_2)), m(F_1))$$

和

$$\infty_\lambda(m(F_1) \cup (m(F_1) \cap m(F_2)), m(F_1)).$$

(5) 替换性

$$(\forall \alpha, \beta) \in RL_{IS},$$

$$\infty_\lambda(m(\alpha), m(\beta)) \rightarrow \infty_\lambda(m(P(\alpha)), m(P(\beta))),$$

其中, α, β 可以是给定信息系统 IS 上定义的个体常量、变量、函数项或合式公式. $\lambda \in [0, 1]$.

(6) 等值性

设 F_1 和 F_2 是定义在给定信息系统 $IS = (U, A)$ 上的 Rough 逻辑公式,

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \text{ iff } \infty_\lambda(m(F_1), m(F_2)) \text{ iff}$$

$$\infty_\lambda(m(F_1), m(F_2)) \wedge \infty_\lambda(m(F_2), m(F_1)).$$

(7) 补集性

设 F_1 和 F_2 是定义在给定信息系统 $IS = (U, A)$ 上的 Rough 逻辑公式,

$$\infty_\lambda(m(F_1), m(F_2)) \rightarrow$$

$$\infty_\lambda(U - m(F_1), U - m(F_2)).$$

(8) 隐含性

设 F_1 和 F_2 是定义在给定信息系统 $IS = (U, A)$ 上的 Rough 逻辑公式,

$$(F_1 \rightarrow F_2) \rightarrow \infty(m(F_1), m(F_2)).$$

(9) 特殊性

对被定义在给定信息系统上的 Rough 逻辑原子公式派生的粒, 有着依赖于信息表的特殊性质:

(i) $m(a_v) \cap m(a_u) = \emptyset$, 其中 $a \in A$ 是属性集 A 上的属性, $u, v \in V_a$ 是属性值集上的属性值, 且 $u \neq v$, \emptyset 是空集.

(ii) $\bigcup_{v \in V} m(a_v) = U$, 其中 $a \in A$ 是属性集 A 上的任意属性, U 是全集.

(iii) $\neg m(a_u) = \bigcup_{v \in V} m(a_v)$, 对每个 $a \in A, u \neq v$.

3.1.5 Rough 逻辑公式诱导的粒范式^[57-60]

(1) 析取范式

设 F 是信息系统上的 Rough 逻辑公式, 粒 $m(F)$ 的析取范式:

$$m(F) = (m(F_{11}) \cap \cdots \cap m(F_{1k})) \cup \cdots \cup (m(F_{n1}) \cap \cdots \cap m(F_{nr})).$$

(2) 合取范式

设 F 是信息系统上的 Rough 逻辑公式, 粒

$m(F)$ 的合取范式:

$$m(F) = (m(F_{11}) \cup \dots \cup m(F_{1r})) \cap \dots \cap (m(F_{n1}) \cup \dots \cup m(F_{ns})),$$

其中, F_{ij} 是命题变量或其否定, 或不带量词的谓词或其否定.

(3) Rough 逻辑公式诱导的粒 Skolem 子句式

在一阶逻辑中所有的量词都移到前面, 而且引用 Skolem 方法可将所有存在量词消去, 等价地变换成只含全称量词的前束范式. 消去所有全称量词, 前束范式等价地变换成 Skolem 子句式. 设 F 是给定信息系统上的 Rough 逻辑公式, 根据 Skolem 方法, 它可等价地变换成下面 Skolem 标准型

$$F = C_1 \wedge \dots \wedge C_m,$$

其中每个 C_i 是原子或其否定的析取. 根据上述粒运算定义, 则有

$$m(F) = m(C_1) \cap \dots \cap m(C_n).$$

每个 $m(C_i) = m(L_{i1}) \cup \dots \cup m(L_{ik}), i = 1, 2, \dots, n$, 其中 L_{ij} 是命题变量或其否定, 或不带量词的谓词或其否定, 被称作文字. 如 $m(C_i)$ 被称作粒子句, $m(L_{ij})$ 被称作粒文字, $m(F)$ 被称作 Skolem 粒子句式.

3.1.6 基于 Rough 逻辑公式诱导的粒归结原理^[61-62]

设 C 是 Rough 逻辑中的子句, 则 $m(C)$ 是粒子句; 若 L 是 Rough 逻辑中的文字, 则 $m(L)$ 是粒文字. 设 $m(L_1)$ 和 $m(L_2)$ 是两个粒文字, 如果 $\infty(m(L_1), U) = 1$ 和 $\infty(m(L_2), U) = 0$ 或反之 $\infty(m(L_1), U) = 0$ 和 $\infty(m(L_2), U) = 1$, 则称 $m(L_1)$ 和 $m(L_2)$ 是互补粒文字对^[59-65]. 设 $m(C_1): m(C'_1) \cup m(a_v)$ 和 $m(C_2): m(C'_2) \cup m(b_u)$ 是两个参予归结的粒子句, $m(a_v)$ 与 $m(b_u)$ 是互补粒文字对, 其中 a_v 和 b_u 是给定信息系统上定义的 Rough 逻辑原子或其否定, 则 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 的粒归结式 $GL(m(C_1), m(C_2))$ 被定义如下:

$$\frac{m(C_1): m(C'_1) \cup m(a_v) \quad m(C_2): m(C'_2) \cup m(b_u)}{m(C): m(C'_1) \cup m(C'_2)},$$

$m(a_v)$ 和 $m(b_u)$ 二者归结得到空集 \emptyset 被消去了, 剩下新粒子句 $m(C)$ 为归结式: $GL(m(C_1), m(C_2)): m(C'_1) \cup m(C'_2)$.

3.1.7 Rough 逻辑公式诱导的粒 λ -归结策略

设 $m(L_1)$ 和 $m(L_2)$ 是粒文字, 其中 $m(L_1)$ 至少以 λ 程度相似于 U , $m(L_2)$ 至多以 $1 - \lambda$ 程度相似于 U . 如果 $\lambda \geq 0.5$, 并且 $T_{IS}(m(L_1)) > \lambda$ 和 $T_{IS}(m(L_2)) < 1 - \lambda$; 或 $m(L_1)$ 至多以 λ 程度相似于 U , $m(L_2)$ 至少以 $1 - \lambda$ 程度相似于 U ; 如果 $\lambda < 0.5$, 并且 $T_{IS}(m(L_1)) < \lambda$ 和 $T_{IS}(m(L_2)) \geq 1 - \lambda$, 其中 L_1 和 L_2

是 IS 上的任一描述, 如 $L_1 = a_v, L_2 = a_u$, 那么 $m(L_1)$ 和 $m(L_2)$ 被称作 λ -互补粒文字对^[62].

设 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 是无公共变量的粒子句式, $m(C_1)$ 中的 $m(L_1)$ 和 $m(C_2)$ 中的 $m(L_2)$ 是 λ -互补粒文字对, 那么 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 的 λ -归结式被定义如下:

$$GL_\lambda(m(C_1), m(C_2)) = (m(C_1) \setminus m(L_1)) \cup (m(C_2) \setminus m(L_2)) = m(C'_1) \cup (C'_2),$$

其中 $m(C'_1) = m(C_1) \setminus m(L_1), m(C'_2) = m(C_2) \setminus m(L_2)$, “ \setminus ” 是集合差运算符.

例 1. 设 $IS = (U, A)$ 是一信息系统, 如表 1 所示.

表 1 信息表 1

U	A				
	a	b	c	d	e
1	5	4	0	1	1
2	3	4	0	2	1
3	3	4	0	2	2
4	0	2	0	1	2
5	3	2	1	2	2
6	5	2	1	1	0

我们可以在 IS 上构造一个基于 Rough 逻辑公式意义的粒表达式. 我们从该信息系统中提取一个 Rough 逻辑公式 $F \in RL_{IS}$:

$$F(a_5, b_2, b_4, c_0, \neg e_0) = (a_5 \vee b_4) \wedge b_2 \wedge (c_0 \vee \neg e_0) \tag{1}$$

式(1)可写成如下的粒式:

$$m(F(a_5, b_2, b_4, c_0, \neg e_0)) = (m(a_5) \cup m(b_4)) \cap m(b_2) \cap (m(c_0) \cup m(\neg e_0)) \tag{2}$$

这是一个粒子句式, 其中每个交项都是一个粒子句. 由上式定义, 这个粒式(2)的基粒子句可从上述信息表计算如下^[65]:

$$m(F(a_5, b_2, b_4, c_0, \neg e_0)) = (a_5^{\{1,6\}} \cup b_4^{\{1,2,3\}}) \cap b_2^{\{4,5,6\}} \cap (c_0^{\{1,2,3,4\}} \cup \neg e_0^{\{1,2,3,4,5\}}) \tag{3}$$

其中每个项都是基粒子句. 当 λ 被定义为 0.6, 显然, $a_5^{\{1,6\}}$ 和 $c_0^{\{1,2,3,4\}}$ 是一个 λ -互补基粒文字对. 所以, 这个 λ -归结式 $GL_\lambda(m(C_1), m(C_2))$ 被计算如下:

$$GL_\lambda(m(C_1), m(C_2)) = (a_5^{\{1,6\}} \cup b_4^{\{1,2,3\}} \setminus a_5^{\{1,6\}}) \cup (c_0^{\{1,2,3,4\}} \cup \neg e_0^{\{1,2,3,4,5\}} \setminus c_0^{\{1,2,3,4\}}) \tag{4}$$

因此, 这个式(3)被写成

$$GL_\lambda(m(C_1), m(C_2)) = (b_4^{\{1,2,3\}} \cup \neg e_0^{\{1,2,3,4,5\}}) \cap b_2^{\{4,5,6\}} \tag{5}$$

事实上, 当 $\lambda = 0.6, a_5^{\{1,6\}}$ 和 $\neg e_0^{\{1,2,3,4,5\}}$ 也是一个 λ -互

补基粒文字对. 因此, 这个 λ -归结式

$$GL_{\lambda}(m(C_1), m(C_2)) = (b_4^{\{1,2,3\}} \cup c_0^{\{1,2,3,4\}}) \cap b_2^{\{4,5,6\}}$$
 (6)

3.1.8 Rough 逻辑公式诱导的粒锁归结策略

设 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 是两个基粒子句^[59-62], 并且在它们中每个粒文字都用正整数在其左下角作标记, 如 $m(C): m(C') \cup_n m(L)$, 称此 $m(C)$ 为锁粒子句, $_n m(L)$ 为锁粒文字, n 为正整数, 被称之为粒文字 $m(L)$ 带的锁. 如果, $m(L_1)$ 和 $_k m(L_2)$ 是分别出现在 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 中的最小锁, 且它们是互补粒文字对, 则分别从 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 中消去 $_r m(L_1)$ 和 $_k m(L_2)$ 得到剩余锁粒子句

$m(C) = (m(C_1) \setminus _r m(L_1)) \cup (m(C_2) \setminus _k m(L_2))$, 其中“ \setminus ”是集合差运算符. 又如果 $m(C)$ 中包含有同一个文字多个不同锁的锁粒文字, 则只保留最小锁的锁粒文字, 而消去其它, 称此 $m(C)$ 为带锁粒归结式.

例 2. 考虑取自下面表中并标记锁的两个粒子句:

- (1) $m(C_1) = _1 m(a_5) \cup _2 m(b_4) \cup _3 m(d_1)$;
- (2) $m(C_2) = _4 m(c_3) \cup _5 m(b_4)$.

从表 2 得到带锁基粒子句:

- (3) $m(C_1) = _1 a_5^{\{1,2,3,4,5,6\}} \cup _2 b_4^{\{1,2,3\}} \cup _3 d_1^{\{1,4,6\}}$;
- (4) $m(C_2) = _4 c_3^{\{ \}} \cup _5 b_4^{\{1,2,3\}}$.

(3) 中锁粒文字 $_1 a_5^{\{1,2,3,4,5,6\}}$ 是最小锁粒文字, 它与(4)中最小锁粒文字 $_4 c_3^{\{ \}}$ 是互补锁粒文字对. 所以, $_1 a_5^{\{1,2,3,4,5,6\}}$ 和 $_4 c_3^{\{ \}}$ 分别从(3)和(4)中消除了, 得

(5) $_2 b_4^{\{1,2,3\}} \cup _3 d_1^{\{1,4,6\}} \cup _5 b_4^{\{1,2,3\}}$.

在(5)中粒文字 $_2 b_4^{\{1,2,3\}}$ 分别带 2 和 5 不同锁, 所以保留最小锁粒文字 $_2 b_4^{\{1,2,3\}}$, 而消去 $_5 b_4^{\{1,2,3\}}$, 得

$$m(C) = _2 b_4^{\{1,2,3\}} \cup _3 d_1^{\{1,4,6\}},$$

此乃是 $m(C_1)$ 和 $m(C_2)$ 的粒锁归结式.

表 2 信息表 2

U	A				
	a	b	c	d	e
1	5	4	0	1	1
2	5	4	0	2	1
3	5	4	0	2	2
4	5	2	0	1	2
5	5	2	0	2	2
6	5	2	0	1	0

3.1.9 Rough 逻辑公式诱导的粒归结的完全性 (Soundness)

可以证明 Rough 逻辑公式诱导的粒, 其归结原理是完全的, 也就是从粒子句集 $\Delta = \{m(C_1),$

$m(C_2), \dots, m(C_n)\}$ 归结或 λ -归结推理出 $m(C)$, 其中 $m(C_i), i=1, 2, \dots, n$, 都是给定信息系统 IS 上基于 Rough 逻辑语义的粒子句. 所以, 粒归结的完全性原理, 形式上被写成

$$(m(C_1) \cap m(C_2) \cap \dots \cap m(C_n)) \infty_{\lambda} m(C),$$

这个粒包含式在 IS 上是成立的. 也就是说, $m(C)$ 是从 Δ 粒归结演绎得到的逻辑结论. 详细证明请参见文献[63-64].

3.1.10 Rough 逻辑公式诱导的粒演绎推理

本文给出 Rough 逻辑公式诱导的粒归结推理, 实际上也是一种假设前提下的粒演绎推理^[65-66], 因此用演绎方法可以证明以下的粒相似关系式

$$m(LH\varphi) \infty_{\lambda} m(H\varphi),$$

其中 $L\varphi, H\varphi, LL\varphi, HH\varphi, LH\varphi, HL\varphi$ 等都是给定信息系统 IS 上带算子的 Rough 逻辑公式, 其中 H 和 L 分别是 Rough 逻辑公式的上和下近似算子^[54,59].

该公式取自文献[54]. 其中 ∞_{λ} 是粒之间的 λ -相似关系符或称相似运算符号^[63], 相当于通常的逻辑联结词中的等值词 \leftrightarrow ^[54] 或 Rough 逻辑中的 Rough 相等符 $=_R$ ^[5,38]. 下面是演绎证明该公式的过程. 我们只需要分别证明下面两个相似性公式即可^[38,59]:

$$B_*(m(LH\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(H\varphi))$$

和

$$B^*(m(LH\varphi)) \infty_{\lambda} B^*(m(H\varphi)),$$

其中, $B_*(\cdot)$ 和 $B^*(\cdot)$ 分别表示不可区分关系 B 关于集合“ \cdot ”的下、上近似. 第一个粒的下近似相似式证明如下:

① $B_*(m(L\sim\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(\sim\varphi))$, 算子 L 的定义和 Rough 集的性质^[38,54];

② $B_*(m(\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(H\varphi))$, 算子 H 的定义和 Rough 集的性质^[38,54];

③ $B_*(m(L\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(HL\varphi))$, 在②中用 $L\varphi$ 代换 φ ^[57-58];

④ $B_*(m(HL\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(L\varphi))$, 算子 L 和 H 的定义及 Rough 集性质^[5,38,54];

⑤ $B_*(m(HL\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(L\varphi))$, ③, ④ 和 ∞_{λ} 定义;

⑥ $B_*(m(HLH\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(LH\varphi))$, 在⑤中用 $H\varphi$ 代替 φ 及 Rough 集性质^[38,57-58];

⑦ $B_*(m(LH\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(HH\varphi))$, 算子 L 和 H 的定义及 Rough 集的性质^[5,38,54];

⑧ $B_*(m(HH\varphi)) \infty_{\lambda} B_*(m(H\varphi))$, 算子 H 的定义及 Rough 集的性质^[5,38,54];

⑨ $B_*(m(LH\varphi)) \infty_\lambda B_*(m(H\varphi))$, ⑦和⑧中的三段论^[57-58].

类似地,可以证明第二个粒的上近似相似式,所以本公式的证明就算完成了.用类似方法可证明文献^[54]中的其它类似定理.

粒的演绎推理也可用于专家系统中产生式规则推理及其它近似推理^[34-36,39].

3.2 基于 Rough 逻辑公式意义的粒在人工智能问题求解中的应用

人工智能中的问题求解是指将整体分解为局部直至最基本、能直接计算解的小问题,随后将各子问题的解综合成原问题的一个解^[3,36,39].我们希望这种分解和综合是建立在粒计算的方法学上并且给予形式化.任何一个实际问题通常都可用一个逻辑公式表示.不妨假设一个待求解的实际问题被表示成一个给定信息系统上的 Rough 逻辑公式 F ,使用 Skolem 变换规则,它将得到一个等价的 Skolem 标准型 CNF^[57-63]

$$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \tag{7}$$

其中 $C_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \cdots \vee L_{ik}$ 是文字的析取式, L_{ij} 是一个原子或其否定.于是得到下面的基于 Rough 逻辑公式意义的粒

$$m(F) = m(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \tag{8}$$

引用粒运算定义,可得

$$m(F) = m(C_1) \cap m(C_2) \cap \cdots \cap m(C_n) \tag{9}$$

例 3. 设 $IS = (U, A)$, 它是我们于 2003 年为一家医院开发的一个中医诊疗系统中的模型,其中 U 是患者的集合, A 是患者的症状(属性)集.该系统具有检测患者的血液粘滞浓度的功能.现采集一患者的临床数据,记成 $P = \{\text{Wang}, \text{Male}, 65, 3.5\}$,其中 Wang 是姓名, Male 是性别, 65 是年龄, 3.5 是患者临床经测试仪测得的血液粘滞浓度(不失一般性,这里只选用了一项指标.事实上,我们开发的系统包含有 18 项指标).我们用 Rough 逻辑公式

$$F = \text{Name}_{\text{Wang}} \wedge \text{Sex}_{\text{Male}} \wedge \text{Age}_{65} \wedge \text{TV}_{3.5}$$

表示待求解的问题.现写成相应于公式 F 意义的粒表达式

$$m(F) = m(\text{Name}_{\text{Wang}}) \cap m(\text{Sex}_{\text{Male}}) \cap m(\text{Age}_{65}) \cap m(\text{TV}_{3.5}).$$

该公式被拆成粒子句: $G_1 = m(\text{Name}_{\text{Wang}})$, $G_2 = m(\text{Sex}_{\text{Male}})$, $G_3 = m(\text{Age}_{65})$, $G_4 = m(\text{TV}_{3.5})$, 这就将整体分解成局部.现对子问题 G_2 进行求解,即对 $m(\text{Sex}_{\text{Male}})$ 作语义解释,也就是健康男性的血液粘滞浓度是区间值 $[4.42, 4.79]$.根据医学专家的经验

推理,需要计算健康人血液粘滞浓度区间值 $[4.42, 4.79]$ 上的平均值和标准差,并以此推算出对应于指标项的值、亚型级别和血液粘浓度的级别.我们开发的这个血液粘滞浓度检测系统包括 18 个指标项目值、9 种亚型级别和 4 种血液粘滞浓度级别.为简单起见,这里我们只测试并引用了一个指标项目值 $TV=3.5$.在该系统被开发之前,医学专家的诊疗方法是抽样 40 个健康人并测出其临床的血液粘滞浓度,然后算出平均值和标准差.但我们的粒计算方法是 用 0.618 粒化这个健康人区间值 $[4.42, 4.79]$,并分别用公式计算其平均值 AV 和标准差 SD .计算得到平均值 $AV=4.7$,标准差 $SD=0.28$. AV 和 SD 可被用来计算对应于血液粘滞浓度临床检测值 $TV=3.5$ 的指标项 IV 的值.根据系统给出的公式,在该例中计算的结果 $IV=-3.74$.又根据该患者的年龄和姓名,即子问题 G_1 和 G_3 查询该患者的病历库的病史,由该患者病史的记录,决定对 IV 加、减一个校正值,最后计算出该患者的血液粘滞浓度的级别 $Level=-5$,被诊断为血液低粘滞综合征,也就是整体问题的一个解.这个系统已在这家医院中医诊疗科应用多年.更详细过程可参见文献^[35,39,63].

4 基于 Rough 逻辑语义的粒计算研究的意义

前面已提到粒计算是一种方法学,它被广泛地用于处理信息、知识以及其它许多粒化求解的问题.本文提出的基于 Rough 逻辑公式意义的粒可被用于演绎推理、归结推理以及其它近似推理.这将为经典逻辑的应用提供新思路、开辟新的应用途径;也为 40 年前著名逻辑学家王浩教授提出的近似证明 (Approximate Proof) 的实现迈出了新的一步;基于 Rough 逻辑语义的粒计算提供了逻辑和集合两种类型的运算,而且这两类运算在推理过程中可以交替引用,这将为逻辑推理和粒计算研究带来了许多方便.基于逻辑公式诱导的粒可依据逻辑公式等价变换,而得到相应于粒的分解和合并原理,而这种原理应当是保不变性,所以它将为 AI 中的问题求解提供新的方法学.

进一步的工作将是研究各种粒归结推理策略,归结反演及其定理近似证明;研究与 Rough 逻辑公式性质相平行的其粒的性质和相关定理;开发基于 Rough 逻辑语义的粒计算在实践中的应用,这种应用很有希望成为粒计算最有前景的研究课题之一;

研究基于 Fuzzy 逻辑或其它非标准逻辑公式意义的粒及其推理;研究基于经典逻辑公式意义的粒及其推理等。

致 谢 本文在撰稿过程中得到 Lin T Y 教授和 Yao Y Y 教授的热忱支持和技术上的帮助,在此表示真诚的感谢!

参 考 文 献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity//Gupta M, Ragade R, Yager R eds. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. North-Holland, Amsterdam, 1979: 3-18
- [2] Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, 1982, 11: 341-356
- [3] Hobbs J R. Granularity//*Proceedings of the IJCAI*. Los Angeles: Morgan Kaufmann, 1985: 432-435
- [4] Zadeh L A. Some reflections on soft computing, granular computing and their roles in the conception, design and utilization of information/intelligent systems//*Soft Computing*. Berlin: Springer-Verlag, 1998: 23-25
- [5] Liu Qing. *Rough Sets and Rough Reasoning*. 3rd Edition. Beijing: Science Press, 2005(in Chinese)
(刘 清. *Rough 集及 Rough 推理*. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2005)
- [6] Zhang Bo, Zhang Ling. *Theory and Applications for Problem Solving*. Beijing: Tsinghua University Press, 1990(in Chinese)
(张钹, 张铃. *问题求解理论及应用*. 北京: 清华大学出版社, 1990)
- [7] Zhang L, Zhang B. The quotient space theory of problem solving//*Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2639, Berlin: Springer-Verlag, 2003: 11-15
- [8] Lin T Y. Granular computing on binary relations II: Rough set representations and belief functions//Skowron A, Polkowski L eds. *Rough Sets in Knowledge Discovery*, Berlin: Physica-Verlag, 1998: 121-140
- [9] Lin T Y. Data mining: Granular computing approach//*Methodologies for Knowledge Discovery and Data Mining*. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 1574. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 24-33
- [10] Lin T Y. Granular computing on binary relations-analysis of conflict and Chinese wall security policy//Alpigrini, Peters, Skowron, Zhong eds. *Rough Sets and Current Trends in Computing*. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2475. Berlin, 2002: 296-299
- [11] Lin T Y, Louie E. Modeling the real world for data mining: Granular computing approach//*Proceeding of the Joint 9th IFSA World Congress and the 20th NAFIPS International Conference*. Vancouver, Canada, 2001: 3044-3049
- [12] Lin T Y. Neighborhood systems and relational database//*Proceedings of the CSC'88*. New York, 1988: 725-732
- [13] Lin T Y. From Rough sets and neighborhood systems to information granulation and computing in words//*Proceedings of the European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*. Heidelberg, Germany, 1997: 1602-1606
- [14] Lin T Y. Granular computing on binary relations I: Data mining and neighborhood systems//Skowron A, Polkowski L eds. *Rough Sets in Knowledge Discovery*. Berlin: Physica-Verlag, 1998: 107-121
- [15] Lin T Y. Granular computing on partitions, coverings and neighborhood systems//*Proceedings of the International Forum on Theory of GrC from Rough Set Perspective*, Nanchang, China, 2006: 1-7
- [16] Lin T Y. *Mathematical Models and Research Direction of Granular Computing*, *Granular Computing: Past, Future and Prospect*. Beijing: Science Press, 2007, 8: 127-140(in Chinese)
(林早阳. *粒计算的数学模型与研究方向*, *粒计算: 过去、现在和展望*. 北京: 科学出版社, 2007, 8: 127-140)
- [17] Zhang Bo. Quotient space theory based multi-granular computing//*Proceedings of CRSSC-CWI-CGrC' 2007*. Taiyuan, 2007: 1-1(in Chinese)
(张钹. *基于商空间理论的多粒度计算*//第 7 届中国 Rough 集与软计算、第 1 届中国 Web 智能、第 1 届中国粒计算联合会议论文集. 太原, 2007: 1-1)
- [18] Yao Y Y, Zhong N. Granular computing using information tables//*Data Mining, Rough Sets and Granular Computing*. Berlin: Physica-Verlag, 2002: 102-124
- [19] Yao Y Y. Information granulation and Rough set approximation. *International Journal of Intelligence Systems*, 2001, 16 (1): 87-104
- [20] Yao J T, Yao Y Y. Induction of classification rules by granular computing// *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2475. Berlin: Springer-Verlag, 2002: 331-338
- [21] Yao Y Y. On Generalizing Rough set theory//*Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2639. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 44-51
- [22] Yao Y Y, Yao J T. Granular computing as a basis for consistent classification problems//*Proceedings of the PAKDD' 02 Workshop on Foundations of Data Mining*. Taiwan, 2002, 5: 101-106
- [23] Yao Y Y, Liu Q. A generalized decision logic in interval-set-valued information table//*Lecture Notes in Artificial Intelligence* 1711, Berlin: Springer-Verlag, 1999: 285-294
- [24] Yao Y Y. Three perspectives of granular computing//*Proceedings of the International Forum on Theory of GrC from Rough Set Perspective*, *Journal of Nanchang Institute of Technology*, 25(2), Nanchang, China, 2006: 16-21
- [25] Skowron A, Stepaniuk J. Information granules and Rough neurcomputing//Sankar K Pal, Polkowski L, Skowron A eds. *Rough Neurocomputing: Techniques for Computing with Words*, *Cognitive Technologies*. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 43-84

- [26] Skowron A, Swiniarski R. Information granulation and pattern recognition// Sankar K Pal, Polkowski L, Skowron A eds. *Rough Neurocomputing: Techniques for Computing with Words*, Cognitive Technologies. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 43-636
- [27] Skowron A. Toward intelligent systems; Calculi of information granules. *Bulletin of International Rough Set Society*, 2001, 5(1-2): 9-30
- [28] Skowron A, Stepaniuk J, Peters, James F. Extracting patterns using information granules. *Bulletin of International Rough Set Society*, 2001, 5(1-2): 135-142
- [29] Nguyen H S, Skowron A, Stepaniuk J. Granular computing, A Rough set approach. *Computational Intelligence: An International Journal*, 2001, 17(3): 514-544
- [30] Polkowski L, Skowron A. Constructing Rough metrological granules of classifying rules and classify algorithms//*Studies in Fuzziness and Soft Computing* 89. Berlin: Physica-Verlag, 2002: 57-70
- [31] Polkowski L. Towards Rough set foundations, metrological approach//*Lecture in Artificial Intelligence* 3066. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 8-25
- [32] Polkowski L. A Calculus on granules from Rough inclusions in information systems//*Proceedings of the International Forum on Theory of GrC from Rough Set Perspective*, Journal of Nanchang Institute of Technology, 25(2), Nanchang, China, 2006: 22-27
- [33] Polkowski L, Skowron A. Rough metrology: A new paradigm for approximate reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1996, 15(4): 333-365
- [34] Liu Q. Granules and reasoning based on granular computing//*Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2718. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 516-526
- [35] Liu Q, Jiang F, Deng D Y. Design and implement for the diagnosis software of blood viscosity syndrome based on morphology on GrC//*Lecture Notes in AI* 2639. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 413-420
- [36] Liu Qing. Granules and its research of decomposing & amalgamating//*Progress of Artificial Intelligence in China* 2003-*Proceeding of the 2003 National Conference on Artificial Intelligence(CAAI-10)*(2/2), 2003: 1411-1416(in Chinese)
(刘清. 粒及其分解和合并的研究//*中国人工智能进展-中国人工智能学会第10届全国学术年会*, 2003: 1411-1416)
- [37] Liu Qing, Sun Hui. Studying direction of granular computing from Rough set perspective of development. *Journal of Nanchang Institute of Technology*, 2006, 25(5): 1-10(in Chinese)
(刘清, 孙辉, 从 Rough 集的发展前景看粒计算的研究趋势. *南昌工程学院学报*, 2006, 25(5): 1-10)
- [38] Pawlak Z. *Rough Set: Teoretical Apects of Rasoning about Data*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [39] Liu Qing, Liu Qun. Granules and applications of granular computing in logical reseaning. *Journal of Computer Research and Development*, 2004, 41(4): 546-551(in Chinese)
(刘清, 刘群. 粒及粒计算在逻辑推理中的应用. *计算机研究与发展*, 2004, 41(4): 546-551)
- [40] Robinson A. *Nonstandard Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1965
- [41] Zhao Guo-Qing, Li Shu-Bo, Shan Xing-Yuan. *Nonstandard Calculus*. Harbin: Heilongjiang Science and Technology Press, 1983(in Chinese)
(赵国清, 李书波, 单兴缘. *非标准微积分*. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983)
- [42] Sun Hui, Liu Qing. The research of Rough sets in normed linear space//*Proceedings of the RSCTC2006*, by Springer. LNAI. Japan, 2006: 91-98
- [43] Kripke S. Semantic analysis of modal logic//*Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grandlagen der Mathematik*, Berlin, Germany, 1963: 67-96.
- [44] Luis Farinas del-cerro. Resolution modal logic//*Proceedings of the 8th International Conference on Atomata Deduction*. LNCS 170, Berlin: Springer-verlag, 1985: 153-171
- [45] Pawlak Z. Rough logic, bulletin of the polish academy of sciences. *Technical Sciences*, 1987, 35(5-6): 253-259
- [46] Nakamura A. A Rough logic based on incomplete information and its applications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1996, 15(4): 367-378
- [47] Chakraborty M K, Banerjee M. Rough logic with Rough quantifiers. *Warsaw University of Technology, ICS Research Report* 49/93, 1993
- [48] Liu Q. The resolution for rough prepositional logic with lower(L) and upper(H) approximate operators//*LNAI* 1711. Berlin: Springer, 1999, 11: 352-356
- [49] Liu Q. The OI-resolution of operator Rough logic//*LNAI* 1424. Berlin: Springer, 1998, 6: 432-435
- [50] Liu Qing, Liu Shao-Hui, Zheng Fei. Rough logic and its applications in data mining. *Journal of Software*, 2001, 12(3): 415-419(in Chinese)
(刘清, 刘少辉, 郑非. Rough 逻辑及其在数据挖掘中的应用. *软件学报*, 2001, 12(3): 415-419)
- [51] Orlowska E. A logic of indiscernibility relation//*Lecture Notes in Computer Science* 208. Berlin: Physica-Verlag, 1985: 177-186
- [52] Skowron A. Rough concept logic//Skowron A ed. *Computation Theory*. *Lecture Notes in Computer Science* 208. Berlin, 1985: 288-289
- [53] Lin T Y, Liu Q, Yao Y Y. A logic system for approximate reasoning via Rough sets and topology//*Lecture Notes in Artificial Intelligence* 869. Berlin: Springer-Verlag, 1994: 65-74
- [54] Lin T Y, Liu Q. First order Rough logic I: Approximate reasoning via Rough sets. *Fundamenta Informaticae*, 1996, 27(2-3): 137-153
- [55] Liu Qing, Wang Jiyl. Semantic analysis of Rough logical formulas based on granular computing//*Proceedings of the IEEE GrC2006*, Atlanta, USA, 2006: 393-396

[56] Lin T Y, Liu Q, Zuo X L. Models for first order Rough logic; Applications to data mining//Proceedings of the Asian Fuzzy Systems Symposium. Taiwan, 1996; 152-156

[57] Hamilton A G. Logic for Mathematicians. Cambridge: Cambridge University Press, 1980

[58] Wang Xian-Jun. Introduction for Mathematical Logic. Beijing: Peking University Press, 1982(in Chinese)
(王宪钧. 数理逻辑引论. 北京: 北京大学出版社, 1982)

[59] Liu Qing, Huang Zhao-Hua. G-logic and resolution reseaning. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(7): 865-873 (in Chinese)
(刘清, 黄兆华. G-逻辑及其归结推理. 计算机学报, 2004, 27(7): 865-874)

[60] Liu Q, Sun H. Theoretical study of granular computing//Proceedings of the RSKT2006, LNAI 4062, by Springer, China, 2006; 93-102

[61] Chang C L, Lee R C T. Symbolic Logic and Machine Theorem Proving. New York: Academic Press, 1973.

[62] Liu Xu-Hua. Fuzzy Logic and Fuzzy Reseaning. Jilin: Jilin University Press, 1989(in Chinese)

(刘叙华. 模糊逻辑及模糊推理. 吉林: 吉林大学出版社, 1989)

[63] Liu Q, Sun Hui, Wang Ying. Granulations based on semantics of Rough logical formulas and its reasoning//Proceedings of the RSFDGrC2007. LNAI 4482. Toronto, Canada, 2007; 419-426

[64] Liu Qing, Qiu Tao-Rong, Chen Xiao-Qing. Granulations Derived from Rough Logical Formulas and Its Reasoning, Granular Computing: Past, Future and Prospect. Beijing: Science Press, 2007, 8: 127-140(in Chinese)
(刘清, 邱桃荣, 陈晓清. Rough 逻辑公式派生的粒及其推理, 粒计算: 过去、现在和展望. 北京: 科学出版社, 2007, 8: 127-140)

[65] Liu Qing, Liu Qun, Approximate reasoning based on granular computing in granular logic//Proceedings of the IC-MLS2002, Taiwan, China, 2002; 1258-1262

[66] Liu Q. Granular language and its reasoning//Proceedings of the SPIE — The International Society for Optical Engineering. Orlando, Florida, USA, 2003; 279-287



LIU Qing, born in 1938, professor. His current research interests include artificial intelligence, Rough logic, granular computing, approximate reasoning.

SUN Hui, born in 1959, professor. His current research interests include Rough sets, granular computing, information processes, engineering mechanics.

WANG Hong-Fa, born in 1957, professor. His current research interests include rough sets, genetic algorithm.

Background

This project of studying is supported by the National Natural Science Foundation of China (60173054,50539020), Natural Science Foundation (2007GZS1056) in Jiangxi province. Titles of the projects are "Research of Resolution Principles and Strategies of Rough Logic" (60173054) and "The Research of Computing in Normal Linear Space and Solving Approximate Solution" (2007GZS1056) respectively. In the projects, the authors mainly study Rough logic and granular computing based on the semantics of Rough logic, and its approximate reasoning. The research group had published near 80 papers on the research direction. Once first author got the Best Contribution Award by International Rough Set Society

in 2003. Granular computing is proposed in recent years, and its development is quicker. China is one of the countries of studying granular computing in the world early. Currently, the researchers on granular computing in China are more than other countries. The granulations based on the semantics of Rough logic are also studied except for presentation the research present state of granular computing in this paper. Resolution reasoning of the granulations based on semantics of Rough logic will offer a new idea for studying classical logic and other nonstandard logic. So, this research is the approximate reasoning parts of current research project.