

# 一种用于解决非线性滤波问题的新型粒子滤波算法

王法胜 赵清杰

(北京理工大学计算机科学技术学院北京市智能信息技术重点实验室 北京 100081)

**摘 要** 粒子滤波算法受到许多领域的研究人员的重视,该算法的主要思想是使用一个带有权值的粒子集合来表示系统的后验概率密度.在扩展卡尔曼滤波和 Unscented 卡尔曼滤波算法的基础上,该文提出一种新型粒子滤波算法.首先用 Unscented 卡尔曼滤波器产生系统的状态估计,然后用扩展卡尔曼滤波器重复这一过程并产生系统在  $k$  时刻的最终状态估计.在实验中,针对非线性程度不同的两种系统,分别采用 5 种粒子滤波算法进行实验.结果证明,文中所提出的算法的各方面性能都明显优于其他 4 种粒子滤波算法.

**关键词** 非线性滤波;扩展卡尔曼滤波器;Unscented 卡尔曼滤波器;MKPF

中图法分类号 TP391

## A New Particle Filter for Nonlinear Filtering Problems

WANG Fa-Sheng ZHAO Qing-Jie

(Beijing Key Laboratory of Intelligent Information, School of Computer Science & Technology,  
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract** Particle filters have gained special attention of researchers in various fields. The key idea of this technique is to represent the posterior density by sets of weighed samples. This paper proposes a new particle filter which is based on the extended Kalman filter and the Unscented Kalman filter. It first uses the former to generate an estimate of the state at time  $k$ , and then uses the latter to repeat the process and to gain the final estimate of the state and corresponding covariance at time  $k$ . In the experiments, the authors test five different particle filters on two different nonlinear systems. The experimental results indicate that the proposed particle filter has much better performance than the other four particle filters do.

**Keywords** nonlinear filtering; extended Kalman filter; Unscented Kalman filter; mixed Kalman particle filter

## 1 引 言

众所周知,卡尔曼滤波器<sup>[1-2]</sup>是解决线性高斯问题的最优滤波方法,但是在现实世界中,人们所面临的问题大都是非线性非高斯的,因此非线性滤波问题是极为普遍的,许多领域都涉及到,其中包括统计信号处理、经济学、生物统计学以及工程领域中的

通信<sup>[3]</sup>、雷达跟踪<sup>[4]</sup>、目标跟踪<sup>[5-6]</sup>、汽车定位<sup>[7]</sup>、导航<sup>[7-8]</sup>、机器人定位<sup>[9-12]</sup>等等。

解决非线性滤波问题最为普遍的方法是扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman Filter, EKF)。但是该方法只适用于弱非线性的系统,对于强非线性系统,很容易导致发散。最近,研究人员提出一种新的用于解决非线性滤波问题的滤波器,它是基于这样一种考虑:近似一种高斯分布要比近似任何一种非线性

性方程容易得多. 他们将这种滤波器称为 Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)<sup>[13-15]</sup>. 实验证明 UKF 给出的估计结果比 EKF 更准确, 尤其是它能给出更精确的系统状态方差估计. 然而, UKF 的使用具有一定的限制, 它不适用于一般的非高斯分布的模型.

解决非线性滤波问题的一种更新的方法是粒子滤波器(Particle Filter, PF), 其基本思想是用一组带有权值的粒子集合来表示解决问题时需要的后验概率密度<sup>[16]</sup>, 然后用这一近似的表示来计算系统的状态估计. 在过去几年里, 粒子滤波器在许多领域取得了成功的应用. 自粒子滤波器被第一次提出以来, 经过几年的发展, 现在已经出现多种粒子滤波器, 例如扩展卡尔曼粒子滤波器(EKPF)<sup>[13]</sup>、Unscented 粒子滤波器(UPF)<sup>[13]</sup>、辅助粒子滤波器(auxiliary particle filter)<sup>[17]</sup>、高斯粒子滤波器(Gaussian particle filter)<sup>[18]</sup>、高斯加和粒子滤波器(Gaussian sum particle filter)<sup>[19]</sup>、PARZEN 粒子滤波器<sup>[20]</sup>以及由我国的李良群提出的迭代扩展卡尔曼粒子滤波器(Iterated EKPF)<sup>[21]</sup>等等.

在 EKF 和 UKF 的基础上, 本文提出一种新型粒子滤波算法, 称之为混合卡尔曼粒子滤波器(Mixed Kalman Particle Filter, MKPF). 它将 EKF, UKF 一起作为建议分布. 在时刻  $k$ , 首先用 Unscented 卡尔曼滤波器产生系统的状态估计, 然后用扩展卡尔曼滤波器重复这一过程并产生系统在  $k$  时刻的最终状态估计.

本文第 2 节介绍 PF 的基本原理; 第 3 节介绍 EKF 和 UKF; 第 4 节结合 EKF 和 UKF, 提出新的粒子滤波算法; 第 5 节给出比较实验结果; 第 6 节为结论.

## 2 粒子滤波器

假设动态系统的状态空间模型为

$$x_k = f_k(x_{k-1}, v_{k-1}) \quad (1)$$

$$z_k = h_k(x_k, u_k) \quad (2)$$

$x_k$  表示系统在  $k$  时刻所处的状态,  $z_k$  表示  $k$  时刻的测量向量, 两个函数  $f_k: \mathcal{R}^{n_x} \times \mathcal{R}^{n_v} \rightarrow \mathcal{R}^{n_x}$  和  $h_k: \mathcal{R}^{n_x} \times \mathcal{R}^{n_u} \rightarrow \mathcal{R}^{n_z}$  分别表示系统的状态转移函数和测量函数,  $v_k, u_k$  分别表示系统的过程噪声以及测量噪声.

粒子滤波算法最先由 Gordon 在文献[22]中提出, 它为离散时间的递归滤波问题提供了一种近似的贝叶斯解决方法, 其基本思想是构造一个基于样本的后验概率密度函数. 用  $\{x_{0:k}^i, w_k^i\}_{i=1}^N$  表示系统后

验概率密度函数  $p(x_{0:k} | z_{1:k})$  的粒子集合, 其中  $\{x_{0:k}^i, i=1, 2, \dots, N\}$  是支持样本集, 相应的权值为  $\{w_k^i, i=1, 2, \dots, N\}$ , 且满足  $\sum_{i=1}^N w_k^i = 1$ , 而  $x_{0:k} = \{x_j, j=0, 1, \dots, k\}$  表示到时刻  $k$  系统所有状态的集合, 所以时刻  $k$  的后验密度可以近似表示为

$$p(x_{0:k} | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^i) \quad (3)$$

于是就有了一种表示真实后验密度  $p(x_{0:k} | z_{1:k})$  的离散带权近似表示, 而那些关于数学期望的复杂计算(通常带有复杂的积分运算)就可以简化为和运算了, 如

$$E(g(x_{0:k})) = \int g(x_{0:k}) p(x_{0:k} | z_{1:k}) dx_{0:k} \quad (4)$$

可以近似为

$$E(g(x_{0:k})) = \sum_{i=1}^N w_k^i g(x_{0:k}^i) \quad (5)$$

许多粒子滤波器依赖于重要采样技术, 粒子权值就是根据重要采样技术来选择的<sup>[23-24]</sup>, 因此, 建议分布的设计就显得非常重要. 如果根据重要密度  $q(x_{0:k} | z_{1:k})$  选择粒子, 那么粒子的权值可以定义为

$$w_k^i \propto \frac{p(x_{0:k}^i | z_{1:k})}{q(x_{0:k}^i | z_{1:k})} \quad (6)$$

在时刻  $k-1$ , 如果已经得到  $k-1$  时刻后验密度  $p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$  的近似表示的粒子集合, 下一步就是用一个新的粒子集合来近似表示  $k$  时刻的后验密度  $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ . 为了得到一种递归的表示方法, 可以将选择的重要密度函数因式分解为

$$q(x_{0:k} | z_{1:k}) = q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \quad (7)$$

然后, 通过将获得的新状态  $x_k^i \sim q(x_{0:k} | x_{0:k-1}, z_{1:k})$  加入到已知的粒子集合  $x_{0:k-1}^i \sim q(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})$  中, 得到新的粒子集合  $x_{0:k}^i \sim q(x_{0:k} | z_{1:k})$ . 根据贝叶斯规则, 可以得到权值更新方程如下:

$$\begin{aligned} p(x_{0:k} | z_{1:k}) &= \frac{p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}) p(x_{0:k} | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}) p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \\ &= p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1})}{p(z_k | z_{1:k-1})} \\ &\propto p(z_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(x_{0:k-1} | z_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

将式(7)和(8)代入式(6), 得到权值更新方程如下:

$$\begin{aligned} w_k^i &\propto \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i) p(x_{0:k-1}^i | z_{1:k-1})}{q(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k-1}) q(x_{0:k-1}^i | z_{1:k-1})} \\ &\propto w_{k-1}^i \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k})} \end{aligned} \quad (9)$$

为了得到一种更为简单的形式,假设  $q(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k}) = q(x_k | x_{k-1}, z_k)$  (即假设方程(1)所描述的是一个一阶马尔可夫过程),这就意味着重要密度只取决于  $x_{k-1}$  和  $z_k$ , 因此,修正的权值为

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(z_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i, z_k)} \quad (10)$$

基本粒子滤波算法的一个主要问题是退化问题,即经过几步迭代以后,除了极少数粒子外,其他的粒子权值小到可以忽略不计的程度. 减少退化现象影响的方法一般有两种,一是选择好的重要密度函数,另一种是使用再采样技术<sup>[13,22-24]</sup>. 再采样方法就是去除那些权值较小的粒子,而复制权值较大的粒子. 目前存在多种再采样算法,如残差采样、最小方差采样、多项式采样等. 本文使用残差采样算法.

文献[13]给出了标准粒子滤波器算法.

### 3 扩展卡尔曼滤波器与 Unscented 卡尔曼滤波器

#### 3.1 扩展卡尔曼滤波器

扩展卡尔曼滤波器中系统的状态分布用高斯随机变量(GRV)来表示. 在某一时刻,EKF 方法将系统的非线性方程在当前关于系统状态  $x$  的估计处,展开成一阶泰勒展式. EKF 的具体算法参见文献[1-2].

以 EKF 作为建议分布就得到了扩展卡尔曼粒子滤波器(EKPF). 由于 EKF 用泰勒展式将系统的非线性方程进行线性化,使得系统的非线性性质不能得到很好的描述,该算法只能达到一阶的精度. EKPF 的具体算法参见文献[13].

#### 3.2 Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)

Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)也是一种递归式贝叶斯估计方法,它利用 Unscented 变换(Unscented Transformation, UT)方法,用一组确定的取样点来近似后验概率. 但是 UKF 不必线性化非线性状态方程和观测方程,它直接利用非线性状态方程来估算状态向量的概率密度函数. UKF 规定一组确定的取样点,当状态向量的概率密度函数是高斯的,利用这组取样点能获取高斯密度函数的均值和协方差. 当高斯状态向量经由非线性系统进行传递时,对任何一种非线性系统,利用这组取样点能获得精确到三阶矩的后验均值和协方差.

##### 3.2.1 Unscented 变换

Unscented 变换是计算进行非线性传递的随机向量概率的一种方法<sup>[15]</sup>,它是基于这样一种考虑:

近似一种概率分布比近似一种任意的非线性方程或者非线性变换要容易得多<sup>[14-15]</sup>. 设  $\mathbf{x}$  是  $n_x$  维的随机向量,  $g: \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$  是一非线性函数  $z = g(\mathbf{x})$ , 考虑将  $\mathbf{x}$  通过非线性函数  $g$  传递,假定  $\mathbf{x}$  的均值和协方差分别为  $\bar{x}$  和  $P_x$ . 为了计算关于  $z$  的统计量,我们首先选择  $2n_x + 1$  个带有权值的样本点(也称 SIGMA 点)  $S_i = \{W_i, \chi_i\}$ , 使其能够完全获取随机变量  $\mathbf{x}$  的真实的均值和协方差. SIGMA 点的选择以及权值的确定是根据以下方程,

$$\begin{cases} \chi_0 = \bar{x} \\ \chi_i = \bar{x} + (\sqrt{(n_x + \lambda)P_x})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_x \\ \chi_i = \bar{x} - (\sqrt{(n_x + \lambda)P_x})_{i-n_x}, \quad i = n_x + 1, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} \\ W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n_x \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$  是一个尺度调节因子,  $\alpha$  决定了我们选择的 SIGMA 点在其均值  $\bar{x}$  附近的分布情况,通常将  $\alpha$  设置为一个很小的正值(如 0.001).  $\kappa$  是次级尺度调节因子,通常设置为 0,  $\beta$  是用来结合关于  $\mathbf{x}$  的分布的先验知识(对于高斯分布,  $\beta$  的最佳取值为 2).  $(\sqrt{(n_x + \lambda)P_x})_i$  是矩阵  $(n_x + \lambda)P_x$  平方根的第  $i$  行,  $W_i$  表示第  $i$  个 SIGMA 点的权值,且满足  $\sum W_i = 1$ .  $W_i^{(m)}$  是用来计算均值(mean)的权值,  $W_i^{(c)}$  是用来计算协方差(covariance)的权值,二者除在初始情况下不同外,在  $i = 1, 2, \dots, 2n_x$  时都是一样的.

将每个 SIGMA 点通过非线性函数向前传递,

$$Z_i = g(\chi_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2n_x \quad (13)$$

通过计算可以得到  $z$  的均值和协方差的估计,

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} Z_i \quad (14)$$

$$P_z = \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} \{Z_i - \bar{z}\} \{Z_i - \bar{z}\}^T \quad (15)$$

##### 3.2.2 Unscented 卡尔曼滤波器

UKF 是 UT 的直接扩展,系统的状态分布仍然用一个高斯随机变量来表示,用一个经过选择的 SIGMA 点的集合来具体表示,但是状态随机变量被重新定义为原始状态和噪声变量的扩张向量(augmented)  $\mathbf{x}_k^a = [\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{v}_k^T \quad \mathbf{u}_k^T]^T$ , 上标 T 表示转

秩, 方程 (11) 用来获得相应的 SIGMA 矩阵  $\mathbf{X}_k^a = [(\mathbf{X}_k^x)^T (\mathbf{X}_k^y)^T (\mathbf{X}_k^u)^T]^T$ .

通常, EKF 和 UKF 都使用高斯近似来表示先验以及后验密度. 但是, UKF 同样能够准确地获得在先验和后验密度上的离散度. 关于 UKF 算法的实现, 请参考文献[13-15]. 在粒子滤波器的框架内, 以 UKF 作为建议分布, 就得到了 Unscented 粒子滤波器, 详细的 UPF 算法请参考文献[13].

最近, 李良群<sup>[21]</sup>等人提出了一种迭代扩展卡尔曼粒子滤波器 (IEKPF), 该算法在仿真实验中得到的效果要比标准例子滤波器以及 EKF 和 UPF 的效果要好. 在该算法中, 将测量更新过程进行迭代, 以获取更加“真实”的估计量. 本文提出的 MKPF 的效果比 IEKPF 更好, 下面进行详细介绍.

## 4 混合卡尔曼粒子滤波器

MKPF 采用混合的卡尔曼粒子滤波器作为建议分布, 仿真实验中得到的估计结果优于其它几种滤波算法, 包括 UPF 和 IEKPF.

在时刻  $k$ , 首先用 UKF 更新粒子, 以获得相应的状态估计值  $\bar{x}_{k|k-1}^i$ , 然后, 分别计算系统模型与测量模型的雅可比矩阵, 用 EKF 更新粒子, 此时使用 UKF 已经得到的状态估计值  $\bar{x}_{k|k-1}^i$  作为  $k-1$  时刻的状态估计, 即令  $\bar{x}_{k-1}^i = \bar{x}_{k|k-1}^i$ . 经过计算得到  $k$  时刻最终的状态及其相应的协方差的估计值  $x_k^i$  和  $\hat{P}_k^i$ . 从而可以从建议分布  $N(\bar{x}_k^i, \hat{P}_k^i)$  中抽取粒子.

假设  $k-1$  时刻的状态及相应协方差的估计分别为  $\bar{x}_{k-1}^i$  和  $\hat{P}_{k-1}^i$ , 在下一时刻  $k$ , 先使用 UKF 更新粒子. 该过程中用到的 SIGMA 点的选择根据方程:

$$\mathbf{X}_{k-1}^{i,a} = [\bar{x}_{k-1}^{i,a} \quad \bar{x}_{k-1}^{i,a} \pm \sqrt{(n_a + \lambda) P_{k-1}^{i,a}}] \quad (16)$$

此后将 SIGMA 点分别通过系统模型与测量模型向前传递, 得到状态及协方差的预测值:

$$\mathbf{X}_{k|k-1}^{i,x} = f(\mathbf{X}_{k-1}^{i,x}, \mathbf{X}_{k-1}^{i,v}), \quad \mathbf{Z}_{k|k-1}^i = h(\mathbf{X}_{k|k-1}^{i,x}, \mathbf{X}_{k-1}^{i,u}) \quad (17)$$

$$\bar{x}_{k|k-1}^i = \sum_{j=0}^{2n_a} W_j^{(m)} \mathbf{X}_{j,k|k-1}^{i,x} \quad (18)$$

$$P_{k|k-1}^i = \sum_{j=0}^{2n_a} W_j^{(c)} [\mathbf{X}_{j,k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_{k|k-1}^i] [\mathbf{X}_{j,k|k-1}^{i,x} - \bar{x}_{k|k-1}^i]^T \quad (19)$$

其中  $W_j^{(m)}$  和  $W_j^{(c)}$  是第  $j$  个 SIGMA 点的权值,  $n_a =$

$n_x + n_v + n_u$ . 所以, 预测的测量值的均值可以按以下方程计算得到

$$\bar{z}_{k|k-1}^i = \sum_{j=0}^{2n_a} W_j^{(m)} Z_{j,k|k-1}^i \quad (20)$$

得到新的测量值  $z_k$  之后, 更新预测状态估计量  $\bar{x}_{k|k-1}^i$  如下:

$$\bar{x}_{k|k}^i = \bar{x}_{k|k-1}^i + K_k (z_k - \bar{z}_{k|k-1}^i) \quad (21)$$

其中  $K_k = P_{\bar{x}_{k|k-1}^i} P_{z_k}^{-1}$  为卡尔曼增益, 按下面公式计算得到

$$P_{\bar{x}_{k|k-1}^i} = \sum_{j=0}^{2n_a} W_j^{(c)} [Z_{j,k|k-1}^i - \bar{z}_{k|k-1}^i] [Z_{j,k|k-1}^i - \bar{z}_{k|k-1}^i]^T \quad (22)$$

$$P_{\bar{x}_{k|k}^i} = \sum_{j=0}^{2n_a} W_j^{(c)} [\mathbf{X}_{j,k|k}^i - \bar{x}_{k|k}^i] [Z_{j,k|k}^i - \bar{z}_{k|k}^i]^T \quad (23)$$

这样就获得了状态估计值  $\bar{x}_{k|k}^i$ . 然后用 EKF 执行粒子更新过程. 首先预测状态及协方差:

$$\bar{x}_{k|k-1}^i = f(\bar{x}_{k-1}^i) = f(\bar{x}_{k|k-1}^i) \quad (24)$$

$$P_{k|k-1}^i = \mathbf{F}_k^i \hat{P}_{k-1}^i (\mathbf{F}_k^i)^T + \mathbf{G}_k^i \mathbf{Q}_k (\mathbf{G}_k^i)^T \quad (25)$$

据此求取卡尔曼增益:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^i (\mathbf{H}_k^i)^T [\mathbf{U}_k^i \mathbf{R}_k (\mathbf{U}_k^i)^T + \mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_{k|k-1}^i (\mathbf{H}_k^i)^T]^{-1} \quad (26)$$

修正预测量得到最终所需的估计量, 如下:

$$\hat{P}_{k|k}^i = \mathbf{P}_{k|k-1}^i - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^i \mathbf{P}_{k|k-1}^i \quad (27)$$

$$\bar{x}_{k|k}^i = \bar{x}_{k|k-1}^i + \hat{P}_{k|k}^i (\mathbf{H}_k^i)^T \mathbf{R}_k^{-1} (z_k - h(\bar{x}_{k|k-1}^i)) \quad (28)$$

其中  $\mathbf{Q}$  为系统噪声的协方差矩阵,  $\mathbf{R}$  为测量噪声的协方差矩阵,  $\mathbf{F}_k^i$  和  $\mathbf{G}_k^i$  以及  $\mathbf{H}_k^i$  和  $\mathbf{U}_k^i$  分别为系统模型和测量模型的雅可比矩阵, 最终求得的  $\bar{x}_{k|k}^i$  和

$\hat{P}_{k|k}^i$  就是我们要求的  $k$  时刻的估计量.

综上所述, MKPF 算法可以表示如下.

**算法 1.** MKPF 算法.

1. 初始化:  $k=0$

For  $i=1, 2, \dots, N$ , 从初始先验密度  $p(x_0)$  中抽取粒子  $x_0^i$ , 并设

$$\begin{cases} \bar{x}_0^i = E(x_0^i) \\ P_0^i = E[(x_0^i - \bar{x}_0^i)(x_0^i - \bar{x}_0^i)^T] \\ \bar{x}_0^{i,a} = E[x_0^{i,a}] = [(x_0^i)^T, 0, 0]^T \\ P_0^{i,a} = E[(x_0^{i,a} - \bar{x}_0^{i,a})(x_0^{i,a} - \bar{x}_0^{i,a})^T] \\ \quad = \text{diag}(P_0^i \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{R}) \end{cases} \quad (29)$$

2. FOR  $k=1, 2, \dots$

(1) FOR  $i=1, 2, \dots, N$ :

① 根据 UKF 更新粒子:

- i) 根据方程(16)计算所需的 SIGMA 点.
- ii) 传递 SIGMA 点并计算下一步预测估计值: 方程(17)~(20)
- iii) 获取新的测量值  $z_k$ , 根据方程(21)修正一步预测估计值, 获得修正的状态估计  $\bar{x}_{k\text{UKF}}^i$ .

② 根据 EKF 更新粒子:

- i) 令  $\bar{x}_{k-1}^i = \bar{x}_{k\text{UKF}}^i$ , 据方程(24), (25) 计算状态及相应协方差的一步预测值.
- ii) 分别求取系统模型及观测模型的雅可比矩阵  $F_k^i$  与  $G_k^i$  和  $H_k^i$  与  $U_k^i$ .
- iii) 计算修正的状态及协方差估计值: 方程(27), (28)
- iv) 令  $\bar{x}_k^i = \bar{x}_{k\text{ekf}}^i$ ,  $\hat{P}_k^i = \hat{P}_{k\text{ekf}}^i$ , 最终求得  $k$  时刻所需的估计量.

③ 得到近似服从高斯分布的建议分布, 抽取样本

(粒子)  $\hat{x}_k^i \sim q(x_k^i | x_{0:k-1}^i, z_{1:k}) = N(\bar{x}_k^i, \hat{P}_k^i)$ .

④ 根据方程(10)为每个样本赋以权值  $w_k^i$ .

ENDFOR

(2) FOR  $i=1, 2, \dots, N$

归一化权值:  $w_k^i = w_k^i / \sum_{j=1}^N w_k^j$ .

ENDFOR

(3) 再采样过程:

- a) 消除权值较小的粒子, 复制权值较大的粒子, 获得  $N$  个随机样本  $x_{0:k}^i$ , 近似服从分布  $p(x_{0:k} | z_{1:k})$ .
  - b) 为每个再采样之后的样本粒子赋以相同的权值
- FOR  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $w_k^i = 1/N$ .
- ENDFOR

5 实验结果

这一部分给出本文提出的 MKPF 算法的实验结果, 并与其他几种非线性滤波算法进行比较. 共进行两次实验, 分别采用不同的系统状态空间模型.

实验 1. 假设非线性系统的状态空间模型为

$$x_k = 1 + \sin[0.04\pi(k-1)] + 0.5x_{k-1} + v_{k-1}$$
 (30)

$$z_k = \begin{cases} 0.2x_k^2 + u_k, & k \leq 30 \\ 0.5x_k - 2 + u_k, & k > 30 \end{cases}$$
 (31)

其中  $v_k$  服从伽马分布  $\zeta_a(3, 2)$ , 表示系统噪声, 测量噪声  $u_k$  服从高斯分布  $N(0, 0.0001)$ . 实验中使用的粒子数目为  $N=200$  个, 观测时间为  $T=60$ , 进行 100 次独立实验. UT 参数设置为  $\alpha=1, \beta=0, \kappa=2$ . 算法的输出为粒子集合的均值, 计算公式如下:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_k^j$$
 (32)

一次独立实验的均方误差为

$$MSE = \left( \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\hat{x}_k - x_k)^2 \right)^{1/2}$$
 (33)

图 1 给出了不同粒子滤波器进行一次独立实验所产生的状态估计结果, 可以看出, 在某些时刻标准粒子 PF 与 EKPF 产生的估计偏离真实值较为严重, 但是 UPF、IEKPF 以及 MKPF 所估计的状态能较好地与真实状态吻合, 而 MKPF 算法的效果最为理想. 表 1 给出了经过 100 次独立实验、不同非线性滤波算法的均方误差的均值以及方差, 可以非常明显地看出: MKPF 算法的估计精度优于其他几种粒子滤波算法.

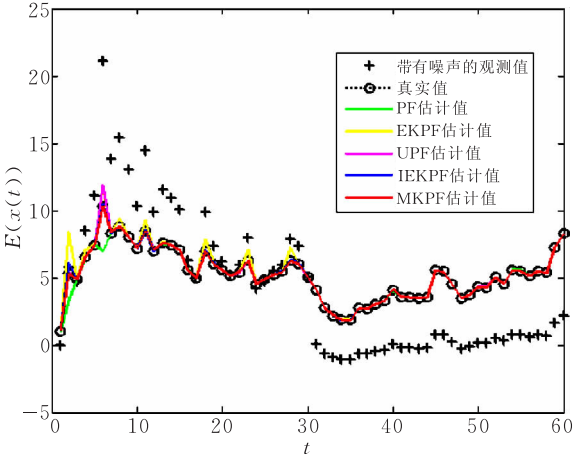


图 1 不同非线性滤波算法产生的状态估计曲线(实验 1)

图 2 给出了 100 次独立实验之后每个时刻产生的均方误差的曲线, 同样表明了 MKPF 算法的精度优于其他几种粒子滤波算法.

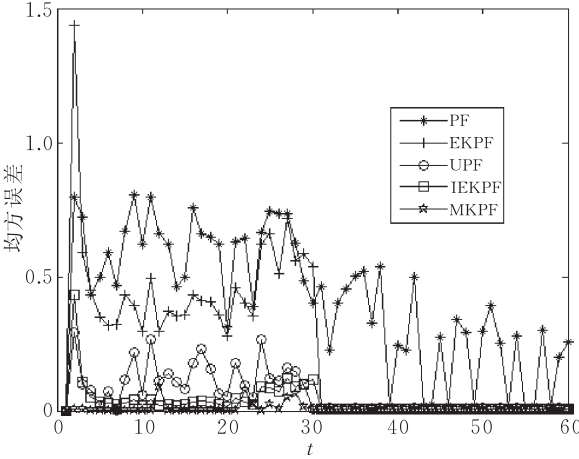


图 2 不同粒子滤波器产生的均方误差曲线(实验 1)

表 1 100 次独立实验后不同非线性滤波算法产生的 均方误差的均值与方差(实验 1)		
算法	MSE	
	均值	方差
EKF	0.36969	0.0161216
UKF	0.26812	0.0107
PF	0.19089	0.041927
EKPF	0.29028	0.015819
UPF	0.049493	0.0045229
IEKPF	0.043965	0.0010825
MKPF	0.015654	0.0004159

实验 2. 假设非线性系统的状态空间模型为

$$x_k=1+\sin[0.04\pi(k-1)]-\frac{\sin(x_k)}{4}+0.5x_{k-1}+v_{k-1} \tag{34}$$
$$z_k=0.2x_k^2+0.5x_k+\frac{\sin(x_k)}{5}-2+u_k \tag{35}$$

可以看出,该系统具有更强的非线性.系统噪声与测量噪声的分布与实验 1 相同,其他参数设置同实验 1.与实验 1 对应,图 3 为独立运行一次产生的

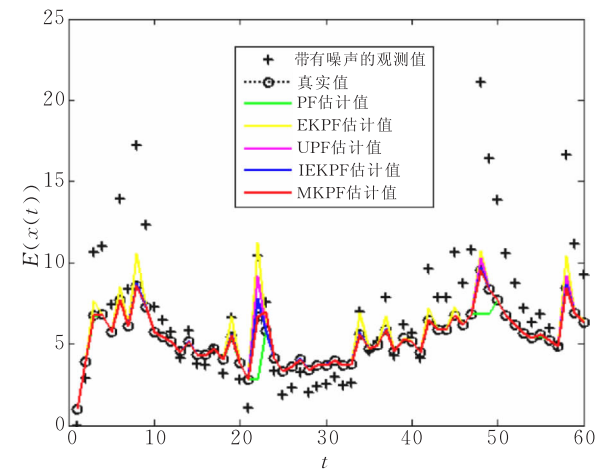


图 3 不同非线性滤波算法产生的状态估计曲线(实验 2)

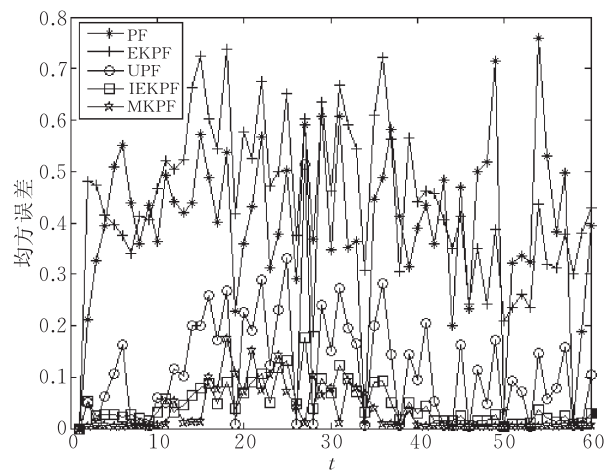


图 4 不同粒子滤波器产生的均方误差曲线(实验 2)

状态估计的均值与真实状态的对比.可以看到,在几种粒子滤波器中,EKPF 对于非线性系统的适应性是最差的.以上几种非线性滤波算法估计性能比较如表 2 所示.经过 100 次独立运行实验后,各粒子滤波器产生的均方误差曲线如图 4,可以看到 MKPF 算法的均方误差曲线除在局部产生波动外,其总体误差小于其他算法,这同样反映在表 2 中.同样可以看出 MKPF 算法得出的估计结果优于其他几类非线性滤波算法.

表 2 100 次独立实验后不同非线性滤波算法产生的 均方误差的均值与方差(实验 2)		
算法	MSE	
	均值	方差
EKF	0.55151	0.024951
UKF	0.42119	0.021457
PF	0.36445	0.069802
EKPF	0.48043	0.02831
UPF	0.11994	0.015088
IEKPF	0.05651	0.0015319
MKPF	0.035626	0.0033575

## 6 结 论

粒子滤波器在解决非线性非高斯滤波问题中取得了非常好的效果.综合以上论述与实验,本文提出的新型粒子滤波器——MKPF,该算法采用 EKF 与 UKF 混合作为建议分布,得到一种更接近真实分布的近似表达方式.实验结果表明,新算法明显优于其他几种粒子滤波算法. MKPF 算法的提出为非线性滤波领域中的问题提供了一种新的解决方法.在下一步工作中,我们将用 MKPF 算法解决目标跟踪问题以及非线性系统的参数估计问题.

## 参 考 文 献

[1] Anderson B D O, Moore J B. Optimal Filtering. Englewood Cliffs, New Jersey:Prentice- Hall, 1979

[2] Welch G, Bishop G. An introduction to the Kalman filter. University of North Carolina at Chapel Hill: Technical Report TR 95-041, 2004

[3] Djuric P M, Kotecha J H et al. Particle filtering. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(5): 19-38

[4] Herman S C, Moulin P. A particle filtering approach to joint radar tracking and automatic target recognition//Proceedings of the IEEE Aerospace Conference. Big Sky, Montana, 2002, 4: 1789-1808

[5] Deng Xiao-Long, Xie Jian-Ying, Guo Wei-Zhong. Bayesian target tracking based on particle filter. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2005, 16(3): 545-549

- [6] Chang Cheng, Ansari Rashid. Kernel particle filter for visual tracking. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(3): 242-245
- [7] Gustafsson F, Gunnarsson F et al. Particle filters for positioning, navigation and tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 425-437
- [8] Kalsson Rickard. Particle filtering for positioning and tracking applications [Ph. D. dissertation]. Department of Electrical Engineering, Linköpings Universitet, 2005
- [9] Fox D, Hightower J, Liao L, Schulz D, Borriello G. Bayesian filtering for location estimation. *IEEE Pervasive Computing*, 2003, 2(3): 24-33
- [10] Rekleitis I M. A particle filter tutorial for mobile robot localization. Montreal, Quebec, Canada: Centre for Intelligent Machines, McGill University: Technical Report TM-CIM-04-02, 2004
- [11] Thrun S, Fox D, Burgard W, Dellaert F. Robust monte carlo localization for mobile robots. *Artificial Intelligence*, 2001, 128(1-2): 99-141
- [12] Kwok C, Fox D, Meila M. Real-time particle filters. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 469-484
- [13] Merwe R, Doucet A, de Freitas Nando, Wan Eric. The unscented particle filter. Department of Engineering, Cambridge University: Technical Report CUED/F-INFENG/TR 380, 2000
- [14] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 401-422
- [15] Wan Eric A, Merwe R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation//*Proceedings of the International Symposium on Adaptive Systems for Signal Processing, Communications and Control*. Alberta, Canada, 2000: 153-158
- [16] Yuan Ze-Jian, Zheng Nan-Ning, Jia Xin-Chun. The Gauss-Hermite particle filter. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(7): 970-973(in Chinese)  
(袁泽剑,郑南宁,贾新春. 高斯-厄米特粒子滤波器. *电子学报*, 2003, 31(7): 970-973)
- [17] Pitt M. K, Shephard N. Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, 1999, 94(2): 590-599
- [18] Kotecha Jayesh H, Djuric Petar M. Gaussian particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2592-2601
- [19] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian sum particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(10): 2602-2611
- [20] Lehn-Schiler T, Erdogmus D, Principe J C. Parzen particle filters//*Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Montreal, Canada, 2004, V: 781-784
- [21] Li Liang-Qun, Ji Hong-Bing, Luo Jun-Hui. The iterated extended Kalman particle filter//*Proceedings of the International Symposium on Communications and Information Technologies*. Beijing, China, 2005: 1172-1175
- [22] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings on Radar and Signal Processing*, 1993, 140(2): 107-113
- [23] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, Clapp T. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174-188
- [24] Doucet A. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering. University of Cambridge: Technical Report CUED/F-INFENG/TR. 310, 1998



**WANG Fa-Sheng**, born in 1983, M. S. candidate. His research interests mainly focus on particle filtering technique and corresponding application in computer vision.

**ZHAO Qing-Jie**, born in 1966, Ph. D., associate professor. Her research interests include intelligent controlling technique, machine vision, nonlinear filtering technique, medical image processing, etc.

## Background

Nonlinear filtering problems generally exist in many fields such as robotics, artificial intelligence, biomedicine, computer vision, statistics, industrial control and signal processing. Studying on nonlinear filtering technique is beneficial to the development of related subjects. The achievements will possibly bring active influence to industrial control, finance, geological exploration, aeronautics and astronautics. Recently particle filtering technique has attracted more and more researchers' attention due to its capacity to handle nonlinear filtering problems, and it has been used successfully in some fields. The group has been concentrating on "high-efficient particle filtering technique and corresponding applications" under the sup-

port of National Natural Science Foundation of China under grant No. 60772063 and the foundational fund of Beijing Institute of Technology under grant No. 200501F4210. In this project, the authors are aiming to find more efficient nonlinear filtering algorithms in order to supply effective tools to solve practical problems. The group has acquired considerable achievements and there are more than seven papers being published. The results presented in this work are associated with new nonlinear particle filtering algorithm adopting different strategies, which can achieve better results than others. Corresponding applications in machine vision and some other fields are being done.