

描述逻辑 FL⁻ 循环术语集的语义及推理

蒋运承^{1),2)} 王 驹¹⁾ 邓培民³⁾ 汤 庸²⁾

¹⁾ (广西师范大学计算机科学与信息工程学院 广西 桂林 541004)

²⁾ (中山大学计算机科学系 广州 510275)

³⁾ (广西师范大学数学科学学院 广西 桂林 541004)

摘 要 循环术语集是描述逻辑长期以来的研究难点,它的最基本的问题即语义及推理问题没有得到合理的解决.文中分析了描述逻辑循环术语集的研究现状和存在的问题,在 Baader 的基础上进一步研究了描述逻辑 FL⁻ 循环术语集的语义及推理问题.给出了 FL⁻ 循环术语集的语法、语义和不动点模型的构造方法.针对 FL⁻ 循环术语集的需要,提出了一种新的有限自动机,使用有限自动机给出了不动点语义和描述语义下 FL⁻ 循环术语集的可满足性和包含推理算法,证明了推理算法的正确性,并给出了推理算法的复杂性定理.

关键词 描述逻辑;循环术语集;不动点语义;描述语义;有限自动机

中图法分类号 TP301

Semantics and Reasoning of Terminological Cycles in Description Logic FL⁻

JIANG Yun-Cheng^{1),2)} WANG Ju¹⁾ DENG Pei-Min³⁾ TANG Yong²⁾

¹⁾ (College of Computer Science and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004)

²⁾ (Department of Computer Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275)

³⁾ (College of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004)

Abstract Terminological cycles have been a difficult spot in the study of description logics for quite a few years. The basic problems, such as their semantics and reasoning mechanisms, have not been reasonably well settled. The current research progresses and the existing problems of terminological cycles in description logics are analyzed in this paper. Based on the work of Baader F, the semantics and reasoning of terminological cycles in description logic FL⁻ are further studied. The syntax, semantics, and construction method of fixpoint models of terminological cycles in FL⁻ are given. Aiming at the requirement of terminological cycles in FL⁻, a kind of new finite automata is presented, and the satisfiability and subsumption reasoning algorithms of terminological cycles in FL⁻ w. r. t. fixpoint semantics and descriptive semantics are presented using finite automata. The correctness of reasoning algorithms is proved, and the complexity property of reasoning algorithms is given.

Keywords description logic; terminological cycles; fixpoint semantics; descriptive semantics; finite automata

收稿日期:2006-11-20;最终修改稿收到日期:2007-12-06. 本课题得到国家自然科学基金(60663001,60673135,60373081,60573010)、广东省自然科学基金重点基金(04105503)和广西青年科学基金(桂科青 0640030)资助. 蒋运承,男,1974 年生,博士,副教授,主要研究方向为描述逻辑、语义 Web 和 Web 智能. E-mail: jiangyc@ics.ict.ac.cn. 王 驹,男,1950 年生,博士,研究员,主要研究领域为描述逻辑、分离逻辑和人工智能. 邓培民,男,1950 年生,教授,主要研究领域为自动机理论及应用. 汤 庸,男,1964 年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为时态数据库、知识工程和 CSCW.

1 引言

循环术语集(也称循环定义)是描述逻辑^[1]长期以来的研究难点,它的最基本的问题即语义及推理问题没有得到合理的解决^[2-3].甚至在已给出的方法中存在错误,例如,不动点语义是循环术语集的理论基础,文献[4]给出了两个有关循环术语集不动点模型存在的命题(即命题 2.8 和命题 2.9),我们已经证明命题 2.9 是错误的.

由于描述逻辑循环术语集的语义及推理问题没有得到合理的解决,因此在目前已实现的描述逻辑推理系统中都给出了强制规定: TBox 不允许出现循环定义.但循环定义可以扩充描述逻辑的表达能力,而且在许多实际应用中循环定义是不可避免的^[5-7].另外,循环定义还能够方便用户建立描述逻辑知识库,并使所表示的知识或公理符合人们的直觉,如果没有循环定义,则只能用非循环定义来描述相应的循环定义,这样会使知识库变得非常复杂,用户也很难理解^[7-8].因此,无论从理论上还是实际应用上讲,研究循环定义都相当有意义.

给定一个带循环定义的 TBox,主要有 3 个问题需要解决:(1)它是否有模型;(2)如何构造一个(或一类)模型;(3)如何给出判断两个被定义概念 A, B 之间包含关系的推理算法.目前,关于问题(1)的最好结果是:如果 TBox 的定义式中不含否定构造算子,则 TBox 有不动点模型.如何将此结果推广到包含否定构造算子的情形,仍然是一个未解决的问题.对于问题(2)和(3),目前只针对一些很小的不带否定构造算子的描述逻辑系统,这方面的主要结果有: Baader^[9]使用描述图给出了 ϵL 循环术语集的可满足性和包含推理算法,其中 ϵL 包含两个构造算子:交和存在量词. Nebel^[7]利用自动机给出了 TL 循环术语集的可满足性和包含推理算法,其中 TL 包含两个构造算子:交和全称量词. Baader^[5]也利用自动机给出了 FL_0 循环术语集的可满足性和包含推理算法,其中 FL_0 包含两个构造算子:交和全称量词. Baader^[5]指出基于自动机的方法可以推广到 FL^- 循环术语集,其中 FL^- 比 FL_0 增加存在约束算子,并简单给出了最大不动点语义下 FL^- 循环术语集的可满足性和包含推理算法,但存在以下 3 点不足:(1)没有给出 FL^- 循环术语集的不动点语义以及不动点模型的构造方法;(2)没有给出最小不动点语义和描述语义下 FL^- 循环术语集的可满足性

和包含推理算法;(3)用最大不动点语义下 FL_0 循环术语集的可满足性和包含推理算法简单给出了最大不动点语义下 FL^- 循环术语集的可满足性和包含推理算法,没有给出具体的过程.

2 FL^- 循环术语集

2.1 语 法

FL^- 包含构造算子交、全称量词和存在约束量词^[10],即 FL^- 的概念如下定义:

$C, D \rightarrow A | C \sqcap D | \forall R.C | \exists R$, 其中 A 表示原子概念, C, D 表示概念, R 表示关系名.

下面用 N_C 表示 FL^- 的所有概念名的集合, N_R 表示 FL^- 的所有关系名的集合.

FL^- 的 TBox 是有限个形如 $A \equiv D$ 的概念定义的集合,其中 A 是一个概念名, D 是一个概念描述.在 TBox 中不允许概念的重复定义.如果概念名出现在概念定义的左边,则称为被定义概念,概念定义式右边出现的形如 $\exists R$ 的概念称为存在约束概念,概念定义式右边出现的概念名称为原始概念.

给定关系 $R \in N_R$, $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ 称为 R 的传递闭包,其中 $R^{n+1} = R \circ R^n$, \circ 表示关系的合成运算.

如果 TBox 中存在一个被定义概念,该概念直接或者间接地出现在它的概念定义中,则称 TBox 是循环的.形式上说,假设 A 是被定义概念, B 是概念, A 的概念定义是 $A \equiv C$, 其中 C 是一个概念描述,如果 B 在 C 中出现,则称 A 直接使用 B .将关系直接使用的传递闭包称为使用.如果 TBox 中存在一个被定义概念 A , A 使用 A ,则称 TBox 是循环的.

2.2 语 义

FL^- 的语义将概念解释为一定论域的子集,关系是该论域上的二元关系.形式上,一个解释 $I = (\Delta^I, \cdot^I)$ 由解释论域 Δ^I 和解释函数 \cdot^I 所构成,其中解释函数把每个原子概念 $A \in N_C$ 映射到 Δ^I 的子集,而把每个关系 $R \in N_R$ 映射到 $\Delta^I \times \Delta^I$ 的子集.即 FL^- 的语义解释如下:

(i) $A^I \subseteq \Delta^I$;

(ii) $R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$;

(iii) $(C \sqcap D)^I = C^I \cap D^I$;

(iv) $(\forall R.C)^I = \{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in R^I \Rightarrow y \in C^I\}$;

(v) $(\exists R)^I = \{x \in \Delta^I \mid \exists y \in \Delta^I, (x, y) \in R^I\}$.

解释 $I = (\Delta^I, \cdot^I)$ 满足概念定义 $A \equiv D$, 当且仅

当 $A^I = D^I$. 如果解释 I 满足 $\text{TBox } T$ 中的所有概念定义, 即对任意的概念定义 $A \equiv D \in T$, $A^I = D^I$, 则称 I 是 $\text{TBox } T$ 的一个模型.

上述定义的语义就是 Nebel 提出的描述语义^[7]. Nebel 已证明: 在没有循环定义的描述逻辑中, 给定所有原始概念、存在约束概念和关系的解释后能得到唯一一个模型, 但在循环定义中可能存在多个模型^[7]. 依据描述语义的定义, 它接受所有的模型. Nebel 已证明描述语义不能客观地刻画循环定义的语义, 为此引入了不动点语义^[7].

给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, T 中所有出现的关系名记为 N_{role} , 所有出现的原始概念记为 N_{prim} , 所有出现的存在约束概念记为 N_{erc} , 所有出现的被定义概念记为 N_{def} , 并且令 $N_{\text{role}} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, $N_{\text{prim}} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, $N_{\text{erc}} = \{\exists R_1, \exists R_2, \dots, \exists R_h\}$, $N_{\text{def}} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, 则 T 的一个原始解释 $J = (\Delta^J, \cdot^J)$, 其中对任意 $R_i \in N_{\text{role}}$, $P_i \in N_{\text{prim}}$, $\exists R_i \in N_{\text{erc}}$, $R_i^J \subseteq \Delta^J \times \Delta^J$, $P_i^J \subseteq \Delta^J$, $(\exists R_i)^J \subseteq \Delta^J$. 也就是说, 原始解释不对 N_{def} 中的被定义概念 A_i 进行语义解释. $\text{TBox } T$ 的一个解释 $I = (\Delta^I, \cdot^I)$ 是原始解释 $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 的扩充, 当且仅当 $\Delta^I = \Delta^J$, $P_1^I = P_1^J$, $P_2^I = P_2^J$, \dots , $P_n^I = P_n^J$, $(\exists R_1)^I = (\exists R_1)^J$, $(\exists R_2)^I = (\exists R_2)^J$, \dots , $(\exists R_h)^I = (\exists R_h)^J$ 以及 $R_1^I = R_1^J$, $R_2^I = R_2^J$, \dots , $R_m^I = R_m^J$. 此时也称 I 是基于 J 的解释. 给定原始解释 J , 基于 J 的解释 I 由元组 $(A_1^I, A_2^I, \dots, A_k^I)$ 唯一确定, 其中 $A_i \in N_{\text{def}}$. 给定原始解释 J , 定义集合 $\text{Int}(J) = \{I \mid I \text{ 是基于 } J \text{ 的解释}\}$.

与描述逻辑 ALCN 循环定义^[4]类似, 可以如下为 $\text{Int}(J)$ 上的解释定义偏序关系 \preceq_J : 如果 $I_1, I_2 \in \text{Int}(J)$, 则 $I_1 \preceq_J I_2$, 当且仅当 $A_i^{I_1} \subseteq A_i^{I_2}$, $1 \leq i \leq k$.

FL^- 是 ALCN 的子系统, 由 Baader 的结果^[4]可知: $\langle \text{Int}(J), \preceq_J \rangle$ 是一个完备格. 由 Tarski 不动点定理^[11-12]可知: 如果存在单调函数 $O: \text{Int}(J) \rightarrow \text{Int}(J)$, 使得当 $I_1 \preceq_J I_2$ 时有 $O(I_1) \preceq_J O(I_2)$, 则 O 存在不动点, 即存在解释 $I \in \text{Int}(J)$, 使得 $O(I) = I$, 并且 O 存在最小不动点和最大不动点.

给定 FL^- 的 $\text{TBox } T = \{A_1 \equiv D_1, \dots, A_k \equiv D_k\}$ 以及原始解释 J , 可以如下为 $\text{Int}(J)$ 定义单调函数 $O_{T,J}: \text{Int}(J) \rightarrow \text{Int}(J)$, $O_{T,J}(I_1) = I_2$, 当且仅当 $A_i^{I_2} = D_i^{I_1}$, $1 \leq i \leq k$. 从而函数 $O_{T,J}$ 存在最小和最大不动点. 又由 Baader 的结果^[4]可知, 如果 I 是基于原始解释 J 的解释, 则 I 是函数 $O_{T,J}$ 的不动点, 当且仅当 I 是 $\text{TBox } T$ 的模型.

定义 1. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, T 的模型 I 称为最大不动点模型(最小不动点模型), 当且仅当存在一个原始解释 J , $I \in \text{Int}(J)$, 并且 I 是函数 $O_{T,J}$ 的最大不动点(最小不动点). 由于 $\text{TBox } T$ 的模型可能有多个, 最大不动点语义(最小不动点语义)仅仅接受最大不动点模型(最小不动点模型)作为 T 的模型. 下面将最大不动点模型(最小不动点模型)分别称为 gfp-模型(lfp-模型).

定义 2. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, A, B 是 T 中的概念, 则

- (i) 最大不动点语义下, B 包含 A (记为 $A \subseteq_{\text{gfp}, T} B$), 当且仅当对 T 的任意 gfp-模型 I , 有 $A^I \subseteq B^I$.
- (ii) 最小不动点语义下, B 包含 A (记为 $A \subseteq_{\text{lfp}, T} B$), 当且仅当对 T 的任意 lfp-模型 I , 有 $A^I \subseteq B^I$.
- (iii) 描述语义下, B 包含 A (记为 $A \subseteq_T B$), 当且仅当对 T 的任意模型 I , 有 $A^I \subseteq B^I$.

由不动点理论^[11-12]可知, 如果函数不仅单调, 而且向下连续或向上连续, 则最大或最小不动点可以通过 ω -迭代来获得. 否则, 仍然可以通过迭代来获得最大或最小不动点, 只是迭代过程需要比 ω 更大的序数, 其中 ω 表示第一个无限序数, 即非负整数的序类型^[13].

定理 1. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, J 是一个原始解释, 则函数 $O_{T,J}$ 是向下连续的, 但不一定是向上连续的.

证明过程略.

定义 3. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, J 是一个原始解释, I_{top} 和 I_{bot} 分别是基于 J 的最大解释和最小解释, 即 $A_i^{I_{\text{top}}} = \Delta^J$, $A_i^{I_{\text{bot}}} = \emptyset$, $1 \leq i \leq k$, 则对任意序数 α :

- (i) 如果 $\alpha = 0$, 则 $I^{\uparrow\alpha} = I_{\text{bot}}$, $I^{\downarrow\alpha} = I_{\text{top}}$;
- (ii) $I^{\uparrow\alpha+1} = O_{T,J}(I^{\uparrow\alpha})$, $I^{\downarrow\alpha+1} = O_{T,J}(I^{\downarrow\alpha})$;
- (iii) 如果 α 是极限序数, 则 $I^{\uparrow\alpha} = \text{lub}(\{I^{\uparrow\beta} \mid \beta < \alpha\})$, $I^{\downarrow\alpha} = \text{glb}(\{I^{\downarrow\beta} \mid \beta < \alpha\})$.

由定理 1 可知, 函数 $O_{T,J}$ 是向下连续的, 因而由 Tarski 不动点定理^[11-12]可知: $I^{\downarrow\omega}$ 是函数 $O_{T,J}$ 的最大不动点. 又因为函数 $O_{T,J}$ 不是向上连续的, 因而 $I^{\uparrow\omega}$ 不是函数 $O_{T,J}$ 的最小不动点. 但一定存在一个序数 α , $I^{\uparrow\alpha}$ 是函数 $O_{T,J}$ 的最小不动点.

定义 4. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, J 是一个原始解释, I_0 是基于 J 的解释, T 的模型 I 称为 I_0 -模型, 当且仅当 I 是基于 J 的模型, 并且 $I \preceq_J I_0$. 如果 T 存在最大的 I_0 -模型 I , 则 I 称为 I_0 -最大不动点模型(I_0 -gfp-模型).

定理 2. 给定 FL^- 的 $\text{TBox } T$, J 是一个原始

解释, I_0 是基于 J 的解释, 如果 $O_{T,J}(I_0) \lesssim_J I_0$, 则 T 存在一个基于 J 的 I_0 -gfp-模型.

证明. 对任意基于 J 的模型 $I \in \text{Int}(J)$, $I \lesssim_J I_0$, 因为函数 $O_{T,J}$ 是单调的, 所以 $O_{T,J}(I) \lesssim_J O_{T,J}(I_0)$. 又因为 $O_{T,J}(I_0) \lesssim_J I_0$, 因此 $O_{T,J}(I) \lesssim_J I_0$. 从而 $O_{T,J}$ 是 $\{I \mid I \lesssim_J I_0\}$ 到 $\{I \mid I \lesssim_J I_0\}$ 的函数, 即 $O_{T,J} : \{I \mid I \lesssim_J I_0\} \rightarrow \{I \mid I \lesssim_J I_0\}$. 又因为函数 $O_{T,J}$ 是单调的, 所以函数 $O_{T,J} : \{I \mid I \lesssim_J I_0\} \rightarrow \{I \mid I \lesssim_J I_0\}$ 存在一个最大不动点 I_g , $O_{T,J}(I_g) = I_g$, $I_g \lesssim_J I_0$. 从而由定义 1 可知 I_g 是 T 的最大不动点模型. 由 I_0 -模型的定义可知, I_g 是 T 的 I_0 -模型. 又因为 I_g 是 T 的最大不动点模型, 所以 I_g 是 T 的 I_0 -gfp-模型. 证毕.

定理 3. 给定 FL^- 的 TBox T , J 是一个原始解释, I_0 是基于 J 的解释, $O_{T,J}(I_0) \lesssim_J I_0$, 对任意序数 α , 令

(i) 如果 $\alpha=0$, 则 $I_0^{\downarrow\alpha} = I_0$;

(ii) $I_0^{\downarrow\alpha+1} = O_{T,J}(I_0^{\downarrow\alpha})$;

(iii) 如果 α 是极限序数, 则 $I_0^{\downarrow\alpha} = \text{glb}(\{I_0^{\downarrow\beta} \mid \beta < \alpha\})$,

则存在一个序数 α , $I_0^{\downarrow\alpha}$ 是 T 的 I_0 -gfp-模型.

证明. 如果 I_0 是 T 的模型, 则 I_0 一定是 T 的 I_0 -gfp-模型. 又因为 $I_0 = I_0^{\downarrow 0}$, 所以存在序数 $\alpha=0$, $I_0^{\downarrow\alpha}$ 是 T 的 I_0 -gfp-模型.

如果 I_0 不是 T 的模型, 由于函数 $O_{T,J}$ 是单调的, $O_{T,J}(I_0) \lesssim_J I_0$, 所以有 $I_0 \gtrsim_J O_{T,J}(I_0) \gtrsim_J O_{T,J}(O_{T,J}(I_0)) \gtrsim_J \dots$, 从而有 $I_0 = I_0^{\downarrow 0} \gtrsim_J I_0^{\downarrow 1} \gtrsim_J I_0^{\downarrow 2} \gtrsim_J \dots$. 又因为函数 $O_{T,J}$ 是向下连续的, 所以 $O_{T,J}(\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})) = \text{glb}(\{O_{T,J}(I_0^{\downarrow n}) \mid n \geq 0\}) = \text{glb}(\{I_0^{\downarrow n+1} \mid n \geq 0\}) = \text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$, 从而 $\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$ 是函数 $O_{T,J}$ 的不动点. 下面再证明 $\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$ 是函数 $O_{T,J}$ 的最大不动点.

因为 $I_0 = I_0^{\downarrow 0} \gtrsim_J I_0^{\downarrow 1} \gtrsim_J I_0^{\downarrow 2} \gtrsim_J \dots$, 所以 $I_0 \gtrsim_J \text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$. 对函数 $O_{T,J}$ 的任意不动点 f , 且 $I_0 \gtrsim_J f$, 由于函数 $O_{T,J}$ 是单调的, f 是函数 $O_{T,J}$ 的不动点, 所以有 $O_{T,J}(I_0) \gtrsim_J O_{T,J}(f) = f$. 依次可以得到 $O_{T,J}(O_{T,J}(I_0)) \gtrsim_J O_{T,J}(O_{T,J}(f)) = f$, $O_{T,J}(O_{T,J}(O_{T,J}(I_0))) \gtrsim_J O_{T,J}(O_{T,J}(O_{T,J}(f))) = f, \dots$. 即对任意 $n \geq 0$, 有 $I_0^{\downarrow n} \gtrsim_J f$, 从而有 $\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\}) \gtrsim_J f$. 所以 $\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$ 是函数 $O_{T,J}$ 的最大不动点.

又因为 $I_0 \gtrsim_J \text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$, 所以 $\text{glb}(\{I_0^{\downarrow n} \mid n \geq 0\})$ 是 T 的 I_0 -gfp-模型. 从而存在一个序数 α , $I_0^{\downarrow\alpha}$ 是 T 的 I_0 -gfp-模型. 证毕.

2.3 TBox 的正规化

定义 5. 给定 FL^- 的 TBox T , T 是正规化的,

当且仅当对任意的概念定义 $A \equiv D \in T$, $A \in N_{\text{def}}$, D 具有下列形式:

$D_1 \sqcap D_2 \sqcap \dots \sqcap D_n$, 其中 $D_i = \forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B$, $R_j \in N_{\text{role}}$, $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 即 B 是概念名或形如 $\exists R$ 的存在约束概念, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

下面将 $\forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B$ 记为 $\forall W. B$, 其中 $W = R_1 R_2 \dots R_m$. 如果 $m=0$, 则记为 $\forall \epsilon. B$.

给定解释 I , $W = R_1 R_2 \dots R_m$, 则 W^I 表示 $R_1^I, R_2^I, \dots, R_m^I$ 的合成, 即 $W^I = R_1^I \circ R_2^I \circ \dots \circ R_m^I \epsilon^I$ 表示恒等关系, 即 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}$.

由于 $\forall R. (B \sqcap C) = \forall R. B \sqcap \forall R. C$, 因此直接利用该式子可得如下 TBox T 的正规化方法:

(1) 利用公式 $\forall R. (B \sqcap C) = \forall R. B \sqcap \forall R. C$ 对 T 中的所有概念定义式进行展开, 即对任意的概念定义 $A \equiv D \in T$, $A \in N_{\text{def}}$, D 具有下列形式:

$D_1 \sqcap D_2 \sqcap \dots \sqcap D_n$, 其中 $D_i = B$ 或 $D_i = \forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B$, $R_j \in N_{\text{role}}$, $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

把得到的 TBox 记为 T_1 .

(2) 对任意的概念定义 $A \equiv D_1 \sqcap D_2 \sqcap \dots \sqcap D_n \in T_1$, 如果 $D_i = B$, 其中 $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 则将 D_i 改写成 $\forall \epsilon. D_i$. 如果 $D_i = \forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B$, $R_j \in N_{\text{role}}$, $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 则将 D_i 改写成 $\forall R_1 R_2 \dots R_m. B$.

定理 4. 给定 FL^- 的 TBox T , T 能转化为一个等价的正规化的 TBox T' .

证明. 由于第(1)步是通过公式 $\forall R. (B \sqcap C) = \forall R. B \sqcap \forall R. C$ 对 TBox T 中的概念定义式进行等价替换, 得到的 TBox T_1 与 TBox T 等价. 下面证明第(2)步能将 TBox T_1 转化为一个等价的正规化的 TBox T' .

如果 $D_i = B$, 其中 $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 对 TBox T_1 的任意模型 I , $(\forall \epsilon. D_i)^I = \{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in \epsilon^I \Rightarrow y \in D_i^I\}$, 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}$, 所以有 $x=y$, 从而 $\{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in \epsilon^I \Rightarrow y \in D_i^I\} = \{y \in \Delta^I \mid y \in D_i^I\}$, 因此 $(\forall \epsilon. D_i)^I = D_i^I$.

如果 $D_i = \forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B$, $R_j \in N_{\text{role}}$, $B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 对 TBox T_1 的任意模型 I , $D_i^I = (\forall R_1. \forall R_2. \dots \forall R_m. B)^I = \{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in R_1^I \Rightarrow (y \in \forall R_2. \dots \forall R_m. B)^I\} = \{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in R_1^I \Rightarrow (y \in \forall R_3. \dots \forall R_m. B)^I\} = \dots = \{x \in \Delta^I \mid \forall y \in \Delta^I, (x, y) \in R_1^I \circ R_2^I \circ \dots \circ R_m^I \Rightarrow y \in B^I\} = (\forall R_1 R_2 \dots R_m. B)^I$, 因此有 $(\forall R_1 R_2 \dots R_m. B)^I = D_i^I$.

证毕.

2.4 TBox 与自动机

首先给出自动机的概念^[5]. 给定有限字母表 Σ ,

Σ 上所有字符串(有限或无限)的集合记为 Σ^* , 空字符串记为 ϵ . Σ 上长度为 n 的字符串 $W = \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ 可以看成是从有限序数 $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 到字母表 Σ 上的映射 $W: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \Sigma, W(i) = \sigma_i, 0 \leq i \leq n-1$. 而一个无限字符串 W 是一个从序数 ω 到字母表 Σ 上的映射. Σ 上所有无限字符串的集合记为 Σ^ω .

一个带字符串转换的半自动机是一个三元组 $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, E)$, 其中 Σ 是有限字母表, Q 是状态的有限集合, E 是转换的有限集合, 即 $E \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$. 如果半自动机 \mathcal{A} 上的所有转换都用长度为 1 的字符串标注, 则称 \mathcal{A} 为带字母转换的半自动机.

给定半自动机 $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, E)$, $p, q \in Q$ 是 \mathcal{A} 的状态, 从 p 到 q 的一条有限路径是序列 $p_0, U_1, p_1, U_2, p_2, \dots, U_n, p_n$, 其中 $p = p_0, q = p_n, (p_{i-1}, U_i, p_i) \in E$ 是 \mathcal{A} 的转换, $1 \leq i \leq n$, 该路径用字符串 $U_1 U_2 \cdots U_n$ 标注. 从 p 开始的一条无限路径是序列 $p_0, U_1, p_1, U_2, p_2, \dots$, 其中 $p = p_0, (p_{i-1}, U_i, p_i) \in E$ 是 \mathcal{A} 的转换, $i \geq 1$, 该路径用字符串 $U_1 U_2 \cdots$ 标注.

定义 6. 给定 FL⁻ 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, 其中字母表 $\Sigma_T = N_{\text{role}}$, 状态集 $Q_T = N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 转换集 E_T 定义如下:

对 T 的任意定义式 $A \equiv \forall W_1. A_1 \sqcap \forall W_2. A_2 \sqcap \cdots \sqcap \forall W_k. A_k$, 其中 $A_i \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}, 1 \leq i \leq k$, 即 A_i 是概念名或形如 $\exists R$ 的存在约束概念, 则存在 k 个转换: $(A, W_1, A_1), (A, W_2, A_2), \dots, (A, W_k, A_k)$.

与 FL₀^[5] 相比, 由于 FL⁻ 多增加了一个存在约束量词构造算子, 因而与文献[5]给出的半自动机(即文献[5]中的定义 17)相比, 定义 6 给出的半自动机的状态可以是描述逻辑存在约束概念. 也就是说, 定义 6 是文献[5]中定义 17 的推广.

定义 7. 给定 FL⁻ 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, 对任意 $p, q \in Q_T, L_{\mathcal{A}_T}(p, q)$ 表示从 p 到 q 的所有路径标注的有限字符串的集合. 在 \mathcal{A}_T 清楚的情况下, 将 $L_{\mathcal{A}_T}(p, q)$ 记为 $L(p, q)$.

由自动机理论^[14] 可知, $L(p, q)$ 是正规语言. $L(p, q)$ 是 FL⁻ 循环术语集推理的工具, 不动点语义和描述语义下 FL⁻ 循环术语集推理都需要利用 $L(p, q)$.

3 FL⁻ 循环术语集的推理

3.1 最大不动点语义下的推理

定理 5. 给定 FL⁻ 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解

释, I 是基于 J 的 T 的一个最大不动点模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 对任意 $d \in \Delta^J$, 则 $d \in A^I$, 当且仅当满足下列两个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, W \in L(A, P), e \in \Delta^J$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in P^I$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(A, \exists R), e \in \Delta^J$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$.

证明. 先证明 \Leftarrow , 如果 A 是原始概念, 则 $L(A, A) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P \neq A, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, L(A, \exists R) = \emptyset$. 所以由条件(1)可得, 如果 $(d, e) \in \epsilon^I$, 则 $e \in A^I$. 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^J\}$, 所以 $d = e$, 从而有 $d \in A^I$.

如果 A 是存在约束概念 $\exists R$, 则 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R' \neq A, L(A, \exists R') = \emptyset$. 所以由条件(2)可得, 如果 $(d, e) \in \epsilon^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$. 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^J\}$, 所以 $d = e$, 从而有 $d \in (\exists R)^I, d \in A^I$.

如果 A 是被定义的概念, 因为 I 是 T 的最大不动点模型, 由定理 1 和定义 3 可知, $I = \bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_{\text{top}})$. 不妨假设 A^I 是 I 的第 i 个元素, 即 $A^I = (\bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_{\text{top}}))_i$.

假设 $d \notin A^I$, 则存在 $k \geq 0, d \notin (O_{T,J}^k(I_{\text{top}}))_i$.

如果 $k = 0$, 则由定义 3 可知 $d \notin (I_{\text{top}})_i$, 而 $(I_{\text{top}})_i = \Delta^J$, 因此 $d \notin \Delta^J$. 又因为 Δ^J 是解释论域, 对任意个体 d , 都有 $d \in \Delta^J$. 矛盾.

如果 $k > 0$, 则 $d \notin (O_{T,J}(O_{T,J}^{k-1}(I_{\text{top}})))_i$. 不妨假设 A 的定义式是 $A \equiv \forall W_1. A_1 \sqcap \forall W_2. A_2 \sqcap \cdots \sqcap \forall W_k. A_k$, 其中 $A_i \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}, 1 \leq i \leq k$, 所以由 $d \notin (O_{T,J}(O_{T,J}^{k-1}(I_{\text{top}})))_i$ 可知, 存在 $1 \leq h \leq k$, 存在 $e \in \Delta^J, (d, e) \in W_h^I$, 并且满足: ① 如果 A_h 是原始概念, $e \notin A_h^I = A_h^I$; ② 如果 A_h 是存在约束概念 $\exists R, e \notin A_h^I = A_h^I = (\exists R)^I$; ③ 如果 A_h 是被定义概念, $e \notin (O_{T,J}^{k-1}(I_{\text{top}}))_j$, 其中 j 是 A_h 在 I 中的索引标号.

第①和②种情况显然成立.

对于第③种情况, 如果 A_h 是被定义概念, 根据归纳假设, 由 $e \notin (O_{T,J}^{k-1}(I_{\text{top}}))_j$ 可知存在原始概念 P (或存在约束概念 $\exists R$), $V \in L(A_h, P)$ (或 $V \in L(A_h, \exists R)$) 以及个体 $f \in \Delta^J$, 使得 $(e, f) \in V^I, f \notin P^I$ (或 $f \notin (\exists R)^I$). 又因为 $W_h \in L(A, A_h)$, 所以 $W_h V \in L(A, P)$ (或 $W_h V \in L(A, \exists R)$). 又因为 $(d, e) \in W_h^I, (e, f) \in V^I$, 所以 $(d, f) \in (W_h V)^I$. 因此有 $f \in P^I$ (或 $f \in (\exists R)^I$), 与 $f \notin P^I$ (或 $f \notin (\exists R)^I$) 矛盾.

再证明 \Rightarrow , 假设存在原始概念 P (或存在约束概

念 $\exists R$), $W \in L(A, P)$ (或 $W \in L(A, \exists R)$), $e \in \Delta^I$, 使得 $(d, e) \in W^I$, $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$). 因为 $W \in L(A, P)$ (或 $W \in L(A, \exists R)$), 所以 W 是从 A 到 P (或 $\exists R$) 的路径, 不妨假设该路径是 $A, U_0, C_1, \dots, C_{n-1}, U_n, P$ (或 $\exists R$), 即 $W = U_0 U_1 \dots U_n$. 又因为 $(d, e) \in W^I$, 所以存在个体 d_1, d_2, \dots, d_{n-1} , 使得 $(d, d_1) \in U_0^I, \dots, (d_{n-1}, e) \in U_n^I$.

如果 $n=0$, 则 $W=U_0$, 从而 A 的定义式如下: $A \equiv \dots \cap \forall W. P \cap \dots$ (或 $A \equiv \dots \cap \forall W. \exists R \cap \dots$). 又因为 $(d, e) \in W^I$, $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$), 所以 $d \notin A^I$, 与 $d \in A^I$ 矛盾.

如果 $n>0$, 根据归纳假设, 由 $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$) 可知, 存在 $h>0$, $d_1 \notin (O_{T,J}^h(I_{\text{top}}))_j$, 其中 j 是 C_1 在 I 中的索引标号, 即 C_1^I 是 I 的第 j 个元素. 又因为 $(d, d_1) \in U_0^I$, 所以有 $d \notin (O_{T,J}^{h+1}(I_{\text{top}}))_i$. 因为 $A^I = (\bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_{\text{top}}))_i$, 所以 $d \notin A^I$, 与 $d \in A^I$ 矛盾. 证毕.

定理 5 由 Baader^[5] 给出, 但 Baader 没有给出证明过程. 由定理 5 可以直接给出最大不动点语义下可满足性推理算法.

定理 6. 给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的一个最大不动点模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 则在最大不动点语义下 A 是可满足的, 当且仅当存在 $d \in \Delta^I$, 满足下列两个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}$, $W \in L(A, P)$, $e \in \Delta^I$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in P^I$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}$, $W \in L(A, \exists R)$, $e \in \Delta^I$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$.

定理 7^[5]. 给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的一个最大不动点模型, A, B 是 T 的任意概念, 即 $A, B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 则 $A \sqsubseteq_{\text{gfp}, T} B$, 当且仅当满足下列两个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}$, $L(B, P) \subseteq L(A, P)$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}$, $L(B, \exists R) \subseteq L(A, \exists R)$.

定理 8. 最大不动点语义下 FL^- 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理是 PSPACE-完全的.

证明. 要证明定理成立, 只需证明下列两个条件成立:

(1) FL^- 循环术语集的可满足性推理和包含关

系推理属于 PSPACE-难的.

(2) PSPACE 中的每一个语言 L 多项式时间可归约到 FL^- 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理.

Baader^[5] 已经证明最大不动点语义下 FL_0 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理是 PSPACE-完全的. 而 FL_0 是 FL^- 的子系统, 因此 FL^- 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理是 PSPACE-难的.

给定 FL^- 的 TBox T , 对任意关系 $R \in N_{\text{role}}$, 引入一个新的原始概念 P_R , 并用 P_R 替换 T 中的存在约束概念 $\exists R$, 得到的 TBox 记为 T' , 并且 T' 不包含存在约束概念, T' 与 T 的大小相等, 这种替换能在多项式时间内完成. 对任意最大不动点模型 I , 由 $(\exists R)^I = (P_R)^I$ 可知, FL^- 相对于 T 的可满足性推理和包含关系推理等价于 FL_0 相对于 T' 的可满足性推理和包含关系推理. 而 FL_0 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理是 PSPACE-完全的. 证毕.

3.2 最小不动点语义下的推理

给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的一个最小不动点模型, $A, B \in N_{\text{def}}$, 由定理 1 和定义 3 可知, 存在序数 α , $I = I^{\alpha}$, 不妨假设 α 是极限序数, 从而 $I = \bigcup_{\lambda < \alpha} O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}})$. 假设 A 和 B 在 I 中的索引标号是 i 和 j .

定理 9. 给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $A, B \in N_{\text{def}}$, 并且 A 和 B 在最小不动点模型 I 中的索引标号是 i 和 j , $(A, W, B) \in E_T$, $d \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_i$, $(d, e) \in W^I$, 则存在序数 $\gamma < \lambda$, 使得 $e \in (O_{T,J}^{\gamma}(I_{\text{bot}}))_j$.

定理 10. (1) 如果 $d \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_i$, $(d, e) \in W^I$, $W \in L(A, P)$, 则 $e \in P^I$.

(2) 如果 $d \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_i$, $(d, e) \in W^I$, $W \in L(A, \exists R)$, 则 $e \in (\exists R)^I$.

由于 FL^- 的最小不动点模型构造方法与 FL_0 相同, 因而可以采用文献[5]中引理 47 和引理 48 的证明方法, 对序数 λ 采用超穷归纳法可以证明定理 9 和定理 10.

定理 11. 给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的最小不动点模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 对任意 $d_0 \in \Delta^I$, 则 $d_0 \in A^I$, 当且仅当满足下列 3 个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}$, $W \in L(A, P)$,

$e \in \Delta^I$, 如果 $(d_0, e) \in W^I$, 则 $e \in P^I$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(A, \exists R), e \in \Delta^I$, 如果 $(d_0, e) \in W^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$.

(3) 对 \mathcal{A}_T 中的任意无限路径 $A, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 以及任意个体 d_1, d_2, d_3, \dots , 存在 $n \geq 1$, 使得 $(d_{n-1}, d_n) \notin W_n^I$.

证明. 先证明 \Rightarrow , 如果 A 是原始概念, 则 $L(A, A) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P \neq A, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, L(A, \exists R) = \emptyset$, 所以 $L(A, P) = \{\epsilon\}, W = \epsilon$. 如果 $(d_0, e) \in W^I$, 则 $(d_0, e) \in \epsilon^I$, 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}, d_0 \in A^I$, 所以 $e \in A^I$.

如果 A 是存在约束概念 $\exists R$, 则 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R' \neq A, L(A, \exists R') = \emptyset$, 所以 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}, W = \epsilon$. 如果 $(d_0, e) \in W^I$, 则 $(d_0, e) \in \epsilon^I$, 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}, d_0 \in A^I$, 所以 $e \in A^I$.

如果 A 是被定义概念, 因为 $d_0 \in A^I, A^I = (\bigcup_{\lambda < \alpha} O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_i$, 所以 $d_0 \in (\bigcup_{\lambda < \alpha} O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_i$, 从而存在序数 λ , 使得 $d_0 \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_i$. 由定理 10 可知条件(1)和条件(2)满足. 下面证明条件(3).

假设存在无限路径 $A, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 以及个体 d_1, d_2, d_3, \dots , 对任意 $n \geq 1$, 有 $(d_{n-1}, d_n) \in W_n^I$. 因为 $d_0 \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_i$, 由定理 9 可知存在序数 $\lambda_1 < \lambda$, 使得 $d_1 \in (O_{T,J}^{\lambda_1}(I_{\text{bot}}))_{j_1}$, 其中 j_1 表示 C_1 在 I 中的索引标号. 又由 $d_1 \in (O_{T,J}^{\lambda_1}(I_{\text{bot}}))_{j_1}$ 和定理 9 可知存在序数 $\lambda_2 < \lambda_1$, 使得 $d_2 \in (O_{T,J}^{\lambda_2}(I_{\text{bot}}))_{j_2}$, 其中 j_2 表示 C_2 在 I 中的索引标号. 依次类推: 存在一个无限严格递减序数序列 $\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots$, 使得对任意 $n \geq 1$, 有 $d_n \in (O_{T,J}^{\lambda_n}(I_{\text{bot}}))_{j_n}$, 其中 j_n 表示 C_n 在 I 中的索引标号. 又因为概念 A, C_1, C_2, C_3, \dots 是有限的, 从而不可能存在无限严格递减序数序列 $\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots$, 所以出现矛盾.

再证明 \Leftarrow , 如果 A 是原始概念, 则 $L(A, A) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P \neq A, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, L(A, \exists R) = \emptyset$. 由(1)可得, 如果 $(d_0, e) \in \epsilon^I$, 则 $e \in A^I$. 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}$, 所以 $d_0 = e$, 从而有 $d_0 \in A^I$.

如果 A 是存在约束概念 $\exists R$, 则 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R' \neq A, L(A, \exists R') = \emptyset$. 所以由条件(2)可得, 如果 $(d_0, e) \in \epsilon^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$. 又因为 $\epsilon^I = \{(d, d) \mid d \in \Delta^I\}$, 所以 $d_0 = e$, 从而有 $d_0 \in (\exists R)^I$,

即 $d_0 \in A^I$.

如果 A 是被定义概念, 首先定义元组 (W, d, B) 上的序关系 $>$, 其中 B 是被定义概念, W 是从 A 到 B 的路径标注, d 是个体, 并且 $(d_0, d) \in W^I$: 假设 P 是所有元组 (W, d, B) 的集合, $(V, d, B), (W, e, C) \in P, (V, d, B) > (W, e, C)$, 当且仅当 $W = VU$, 其中 U 是从 B 到 C 的非空路径的标注, 并且 $(d, e) \in U^I$.

容易证明序关系 $>$ 是严格偏序关系, 并且对任意 $(V, d, B), (W, e, C) \in P, (V, d, B) > (W, e, C)$, 有 $(V, d, B) \neq (W, e, C)$. 由条件(3)可知集合 P 上不存在无限严格递减序列, 因而 P 存在最小元素.

证明命题. 对任意 $(W, d, B) \in P$, 存在序数 $\lambda < \alpha$, 使得 $d \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_j$, 其中 j 表示 B 在 I 中的索引标号.

如果 (W, d, B) 是 P 的最小元素, 不妨假设 B 的定义式是 $B \equiv \dots \sqcap \forall U. C \sqcap \dots \sqcap \forall V. P \sqcap \dots \sqcap \forall Z. (\exists R) \sqcap \dots$, C 是被定义概念, P 是原始概念, $\exists R$ 是存在约束概念, 因为 (W, d, B) 是 P 的最小元素, 所以不存在个体 e , 使得 $(d, e) \in U^I$. 从而有 $(d, e) \in V^I$ 或 $(d, e) \in Z^I$. 如果 $(d, e) \in V^I$, 因为 $W \in L(A, B), V \in L(B, P)$, 从而 $WV \in L(A, P)$. 又因为 $(d_0, d) \in W^I, (d, e) \in V^I$, 所以 $(d_0, e) \in (WV)^I$. 由条件(1)可知 $e \in P^I$, 从而 $d \in (O_{T,J}(I_{\text{bot}}))_j$, 即存在序数 $\lambda = 1$, 使得 $d \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_j$. 如果 $(d, e) \in Z^I$, 因为 $W \in L(A, B), Z \in L(B, \exists R)$, 从而 $WV \in L(A, \exists R)$. 又因为 $(d_0, d) \in W^I, (d, e) \in Z^I$, 所以 $(d_0, e) \in (WZ)^I$. 由条件(2)可知 $e \in (\exists R)^I$, 从而 $d \in (O_{T,J}(I_{\text{bot}}))_j$, 即存在序数 $\lambda = 1$, 使得 $d \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_j$.

如果 (W, d, B) 不是 P 的最小元素, 不妨假设 B 的定义式是 $B \equiv \forall U_1. C_1 \sqcap \dots \sqcap \forall U_n. C_n \sqcap \dots \sqcap \forall V. P \sqcap \dots \sqcap \forall Z. (\exists R) \sqcap \dots$, C_1, C_2, \dots, C_n 是被定义概念, P 是原始概念, $\exists R$ 是存在约束概念, 所以对任意个体 e , 有 $(d, e) \in U_i^I$ 或 $(d, e) \in V^I$ 或 $(d, e) \in Z^I$, 其中 $1 \leq i \leq n$. 如果 $(d, e) \in V^I$ 或 $(d, e) \in Z^I$, 已经证明存在序数 $\lambda = 1$, 使得 $d \in (O_{T,J}^\lambda(I_{\text{bot}}))_j$. 如果 $(d, e) \in U_i^I$, 因为 $W \in L(A, B), U_i \in L(B, C_i)$, 所以 $WU_i \in L(A, C_i)$. 又因为 $(d_0, d) \in W^I, (d, e) \in U_i^I$, 所以 $(d_0, e) \in (WU_i)^I$. 因此 $(WU_i, e, C_i) \in P$, 并且 $(W, d, B) > (WU_i, e, C_i)$. 由归纳假设, 存在序数 $\lambda_i < \alpha$, 使得 $e \in (O_{T,J}^{\lambda_i}(I_{\text{bot}}))_k$, 其中 k 表示 C 在 I 中的索引标号. 令 $\gamma = \sup\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n, (d, e) \in U_i^I\}$, 则 $\gamma \leq \alpha$. 由 B 的定义式可知, $d \in (O_{T,J}^{\gamma+1}(I_{\text{bot}}))_j$, 从而 $d \in (O_{T,J}^{\gamma+1}(I_{\text{bot}}))_j$.

又因为 $O_{T,J}^{\alpha}(I_{\text{bot}})$ 是 $O_{T,J}$ 的不动点, 所以 $d \in O_{T,J}^{\alpha}(I_{\text{bot}})$. 因为 α 是极限序数, 所以存在序数 $\lambda < \alpha$, 使得 $d \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_j$.

因此, 对任意 $(W, d, B) \in P$, 存在序数 $\lambda < \alpha$, 使得 $d \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_j$. 令 $W = \epsilon, d = d_0, B = A$, 则 $(\epsilon, d_0, A) \in P$, 从而存在序数 $\lambda < \alpha, d_0 \in (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_i$. 又因为 $A^i = (O_{T,J}^{\lambda}(I_{\text{bot}}))_i$, 所以 $d_0 \in A^i$. 证毕.

给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, B 是 T 的任意概念, \mathcal{A}_T 的 ϵ -循环路径是具有如下形式的路径: $B, \epsilon, \dots, \epsilon, B$.

定理 12. 给定 FL^- 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的一个最小不动点模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 在最小不动点语义下 A 是不可满足的, 当且仅当从 A 到 B 存在一条带标注 ϵ 的路径, 并且 B 是一条 ϵ -循环路径的起始状态, 其中 B 是 T 的任意概念.

证明. 先证明 \Leftarrow , 假设存在一条路径 $A, \epsilon, \dots, \epsilon, B$ 和一条非空路径 $B, \epsilon, \dots, \epsilon, B$, 从而存在一条从 A 到 B 的无限路径 $A, \epsilon, \dots, \epsilon, B, \epsilon, \dots, \epsilon, B$, 其中路径上的所有标注都是 ϵ . 根据 ϵ 的语义解释可知: 对任意 $d \in \Delta^J, (d, d) \in \epsilon^i$. 由定理 11 可知, $d \notin A^i$, 从而 A 是不可满足的.

再证明 \Rightarrow , 给定原始解释 $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 如下: $\Delta^J = \{d_0\}$; 对任意原始概念 $P, P^J = \{d_0\}$; 对任意关系 $R, R^J = \emptyset$. 从而对任意存在约束概念 $\exists R, (\exists R)^J = \emptyset$. I 是基于 J 的最小不动点模型, 由 J 的定义可知, A 和 d_0 满足定理 11 的条件(1)和条件(2). 又因为 A 是不可满足的, 所以 $A^i = \emptyset$, 即 $d_0 \notin A^i$. 因此 A 和 d_0 一定不满足定理 11 的条件(3), 即存在一条无限路径 $A, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 以及个体 d_1, d_2, d_3, \dots , 对任意 $n \geq 1$, 使得 $(d_{n-1}, d_n) \in W_n^i$. 由 J 的定义可知, 对任意 $n \geq 1, W_i = \epsilon, d_n = d_0$. 因此, 存在一条从 A 开始的带标注 ϵ 的无限路径. 又因为 T 的概念是有限的, 即 \mathcal{A}_T 中的状态是有限的, 所以在该无限路径上一定存在概念 B, B 是一条 ϵ -循环路径.

证毕.

由以上可以看出, 定理 11 和定理 12 分别是文献[5]中命题 22 和推论 23 的推广, 即将最小不动点语义下 FL_0 循环术语集的可满足性推理算法推广到 FL^- 循环术语集的可满足性推理.

由定理 12 可以直接给出最小不动点语义下可满足性推理算法.

定理 13. 给定 FL^- 的 TBox T, T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是基于 J 的 T 的一个最小不动点模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 在最小不动点语义下 A 是可满足的, 当且仅当对任意从 A 到 B 带标注 ϵ 的路径, B 不是一条 ϵ -循环路径的起始状态, 其中 B 是 T 的任意概念名.

由定理 13 可知, 最小不动点语义下 FL^- 循环术语集的可满足性推理可以转化为 ϵ -循环路径的判断, 从而有下列定理.

定理 14. 最小不动点语义下 FL^- 循环术语集的可满足性推理是多项式时间复杂的.

3.3 描述语义下的推理

定理 15. 给定 FL^- 的 TBox T, T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I_0 是基于 J 的解释, 即 $I_0 \in \text{Int}(J)$, 并且 $O_{T,J}(I_0) \preceq J I_0$, I 是 T 的基于 J 的 I_0 -gfp-模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 对任意 $d \in \Delta^J$, 则 $d \in A^i$, 当且仅当满足下列 3 个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, W \in L(A, P), e \in \Delta^J$, 如果 $(d, e) \in W^i$, 则 $e \in P^i$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(A, \exists R), e \in \Delta^J$, 如果 $(d, e) \in W^i$, 则 $e \in (\exists R)^i$.

(3) 对任意被定义概念 $B, W \in L(A, B), e \in \Delta^J$, 如果 $(d, e) \in W^i$, 则 $e \in (I_0)_j$, 其中 j 是 B 在 I_0 (或 I) 中的索引标号.

证明. 先证明 \Leftarrow , 如果 A 是原始概念, 则 $L(A, A) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P \neq A, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, L(A, \exists R) = \emptyset$, 所以 $L(A, P) = \{\epsilon\}, W = \epsilon$. 如果 $(d, e) \in W^i$, 则 $(d, e) \in \epsilon^i$, 又因为 $\epsilon^i = \{(d, d) \mid d \in \Delta^J\}, d \in A^i$, 所以 $e \in A^i$.

如果 A 是存在约束概念 $\exists R$, 则 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}$, 并且对任意原始概念 $P, L(A, P) = \emptyset$, 对任意存在约束概念 $\exists R' \neq A, L(A, \exists R') = \emptyset$, 所以 $L(A, \exists R) = \{\epsilon\}, W = \epsilon$. 如果 $(d, e) \in W^i$, 则 $(d, e) \in \epsilon^i$, 又因为 $\epsilon^i = \{(d, d) \mid d \in \Delta^J\}, d \in A^i$, 所以 $e \in A^i$.

如果 A 是被定义概念, 因为 I 是 T 的基于 J 的 I_0 -gfp-模型, 由定理 3 可知, $I = \bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_0)$. 不妨假设 A^i 是 I 的第 i 个元素, 即 $A^i = (\bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_0))_i$.

假设 $d \notin A^i$, 则存在 $k \geq 0, d \notin (O_{T,J}^k(I_0))_i$.

如果 $k = 0$, 则 $d \notin (O_{T,J}(I_0))_i$. 又因为 $O_{T,J}(I_0) \preceq J I_0$, 所以 $d \notin (I_0)_i$. 又因为 $\epsilon \in L(A, A), (d, d) \in \epsilon^i$, 从而由条件(3)可知 $d \in (I_0)_i$, 与 $d \notin (I_0)_i$ 矛盾.

如果 $k > 0$, 则 $d \notin (O_{T,J}(O_{T,J}^{k-1}(I_0)))_i$. 不妨假设 A 的定义式是 $A \equiv \forall W_1. A_1 \sqcap \forall W_2. A_2 \sqcap \cdots \sqcap \forall W_k. A_k$, 其中 $A_i \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, $1 \leq i \leq k$, 所以由 $d \notin (O_{T,J}(O_{T,J}^{k-1}(I_0)))_i$ 可知, 存在 $1 \leq h \leq k$, $e \in \Delta^I$, $(d, e) \in W_h^I$, 并且满足: ① 如果 A_h 是原始概念, $e \notin A_h^I = A_h^I$; ② 如果 A_h 是存在约束概念 $\exists R$, $e \notin A_h^I = A_h^I = (\exists R)^I$; ③ 如果 A_h 是被定义概念, $e \notin (O_{T,J}^{k-1}(I_0))_j$, 其中 j 是 A_h 在 I 中的索引标号, 即 A_h^I 是 I 的第 j 个元素.

第①和②种情况显然成立.

对于第③种情况, 如果 A_h 是被定义概念, 根据归纳假设, 由 $e \notin (O_{T,J}^{k-1}(I_0))_j$ 可知存在原始概念 P (或存在约束概念 $\exists R$), $V \in L(A_h, P)$ (或 $V \in L(A_h, \exists R)$) 以及个体 $f \in \Delta^I$, 使得 $(e, f) \in V^I$, $f \notin P^I$ (或 $f \notin (\exists R)^I$). 又因为 $W_h \in L(A, A_h)$, 所以 $W_h V \in L(A, P)$ (或 $W_h V \in L(A, \exists R)$). 又因为 $(d, e) \in W_h^I$, $(e, f) \in V^I$, 所以 $(d, f) \in (W_h V)^I$. 因此有 $f \in P^I$ (或 $f \in (\exists R)^I$), 与 $f \notin P^I$ (或 $f \notin (\exists R)^I$) 矛盾.

再证明 \Rightarrow , 假设存在原始概念 P (或存在约束概念 $\exists R$), $W \in L(A, P)$ (或 $W \in L(A, \exists R)$), $e \in \Delta^I$, 使得 $(d, e) \in W^I$, $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$). 因为 $W \in L(A, P)$ (或 $W \in L(A, \exists R)$), 所以 W 是从 A 到 P (或 $\exists R$) 的路径, 不妨假设该路径是 $A, U_0, C_1, \dots, C_{n-1}, U_n, P$ (或 $\exists R$), 即 $W = U_0 U_1 \cdots U_n$. 又因为 $(d, e) \in W^I$, 所以存在个体 d_1, d_2, \dots, d_{n-1} , 使得 $(d, d_1) \in U_0^I, \dots, (d_{n-1}, e) \in U_n^I$.

如果 $n = 0$, 则 $W = U_0$, 从而 A 的定义式如下: $A \equiv \cdots \sqcap \forall W. P \sqcap \cdots$ (或 $A \equiv \cdots \sqcap \forall W. \exists R \sqcap \cdots$). 又因为 $(d, e) \in W^I$, $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$), 所以 $d \notin A^I$, 与 $d \in A^I$ 矛盾.

如果 $n > 0$, 根据归纳假设, 由 $e \notin P^I$ (或 $e \notin (\exists R)^I$) 可知, 存在 $h > 0$, $d_1 \notin (O_{T,J}^h(I_0))_j$, 其中 j 是 C_1 在 I 中的索引标号, 即 C_1^I 是 I 的第 j 个元素. 又因为 $(d, d_1) \in U_0^I$, 所以有 $d \notin (O_{T,J}^{h+1}(I_0))_i$. 因为 $A^I = (\bigcap_{k \geq 0} O_{T,J}^k(I_0))_i$, 所以 $d \notin A^I$, 与 $d \in A^I$ 矛盾.

证毕.

由定理 15 可以直接给出描述语义下可满足性推理算法.

定理 16. 给定 FL⁻ 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, $J = (\Delta^J, \cdot^J)$ 是一个原始解释, I 是 T 的模型, A 是 T 的任意概念, 即 $A \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, A 是可满足的, 当且仅当存在 $d \in \Delta^I$, 并且满足下列 3 个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, W \in L(A, P)$, $e \in \Delta^I$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in P^I$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(A, \exists R)$, $e \in \Delta^I$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in (\exists R)^I$.

(3) 对任意被定义概念 $B, W \in L(A, B)$, $e \in \Delta^I$, 如果 $(d, e) \in W^I$, 则 $e \in (I_0)_j$, 其中 j 是 B 在 I_0 (或 I) 中的索引标号.

定理 17. 给定 FL⁻ 的 TBox T , T 对应的半自动机 $\mathcal{A}_T = (\Sigma_T, Q_T, E_T)$, A, B 是 T 的任意概念, 即 $A, B \in N_{\text{def}} \cup N_{\text{prim}} \cup N_{\text{erc}}$, 则 $A \sqsubseteq_T B$, 当且仅当满足下列 3 个条件:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, L(B, P) \subseteq L(A, P)$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, L(B, \exists R) \subseteq L(A, \exists R)$.

(3) 对任意被定义概念 $C \in N_{\text{def}}$, 形如 $B, U_0, C, U_1, C, U_2, C, \dots$ 的无限路径, 存在 $k \geq 0$, 使得 $U_0 U_1 \cdots U_k \in L(A, C)$.

证明. 先证明 \Leftarrow , 给定任意原始解释 $J = (\Delta^J, \cdot^J)$, 函数 $O_{T,J}$ 的任意不动点 I_0, I 是基于 J 和 I_0 的模型, 从而 $I = I_0$, 并且是 T 的 I_0 -gfp-模型 (或 I -gfp-模型). 要证明 $A \sqsubseteq_T B$, 只需证明下列命题即可: 对任意个体 $d \in \Delta^I$, 如果 $d \notin B^I$, 则 $d \notin A^I$.

因为 $d \notin B^I$, I 是 T 的 I -gfp-模型, 所以由定理 15 可知有下列 3 种情况:

(1) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, W \in L(B, P)$, $e \in \Delta^I$, $(d, e) \in W^I$, $e \notin P^I$. 因为 $L(B, P) \subseteq L(A, P)$, 所以 $W \in L(A, P)$, 从而由定理 15 可知 $d \notin A^I$.

(2) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(B, \exists R)$, $e \in \Delta^I$, $(d, e) \in W^I$, $e \in (\exists R)^I$. 因为 $L(B, \exists R) \subseteq L(A, \exists R)$, 所以 $W \in L(A, \exists R)$, 从而由定理 15 可知 $d \notin A^I$.

(3) 对任意被定义概念 $C_1, W_1 \in L(B, C_1)$, $e_1 \in \Delta^I$, 如果 $(d, e_1) \in W_1^I$, 则 $e_1 \notin (I_0)_{j_1}$, 其中 j_1 是 C_1 在 I_0 (或 I) 中的索引标号. 因为 $I = I_0$, 所以 $e_1 \notin C_1^I$. 又由定理 15 可知, 对任意被定义概念 $C_2, W_2 \in L(C_1, C_2)$, $e_2 \in \Delta^I$, 如果 $(e_1, e_2) \in W_2^I$, 则 $e_2 \notin (I_0)_{j_2} = C_2^I$, 其中 j_2 是 C_2 在 I_0 (或 I) 中的索引标号. 依次类推可得, 存在序列 $C_1, W_1, e_1, \dots, C_k, W_k, e_k$, 使得对任意 $1 \leq i \leq k$, $e_i \notin C_i^I$, $(e_{i-1}, e_i) \in W_i^I$, $W_i \in L(C_{i-1}, C_i)$, 其中 $e_0 = d, C_0 = B$.

因为 $e_k \notin C_k^I$, 由定理 15 可知又有下列 3 种情况:

(i) 对任意原始概念 $P \in N_{\text{prim}}, W \in L(C_k, P)$, $e \in \Delta^I$, $(e_k, e) \in W^I$, $e \notin P^I$. 因为 $W \in L(C_{i-1}, C_i)$,

$W \in L(C_k, P)$, 所以 $W_1 W_2 \cdots W_k W \in L(B, P)$. 又因为 $L(B, P) \subseteq L(A, P)$, 所以 $W_1 W_2 \cdots W_k W \in L(A, P)$. 因为 $(e_{i-1}, e_i) \in W_i^I, (e_k, e) \in W^I$, 所以 $(d, e) \in (W_1 W_2 \cdots W_k W)^I$. 因为 $e \notin P^I$, 从而由定理 15 可知 $d \notin A^I$.

(ii) 对任意存在约束概念 $\exists R \in N_{\text{erc}}, W \in L(C_k, \exists R), e \in \Delta^J, (e_k, e) \in W^I, e \notin (\exists R)^I$. 因为 $W_i \in L(C_{i-1}, C_i), W \in L(C_k, \exists R)$, 所以 $W_1 \cdots W_k W \in L(B, \exists R)$. 又因为 $L(B, \exists R) \subseteq L(A, \exists R)$, 所以 $W_1 W_2 \cdots W_k W \in L(A, \exists R)$. 因为 $(e_{i-1}, e_i) \in W_i^I, (e_k, e) \in W^I$, 所以 $(d, e) \in (W_1 \cdots W_k W)^I$. 因为 $e \notin (\exists R)^I$, 从而由定理 15 可知 $d \notin A^I$.

(iii) 对任意被定义概念 $C_{k+1}, W_{k+1} \in L(C_k, C_{k+1}), e_{k+1} \in \Delta^J$, 如果 $(e_k, e_{k+1}) \in W_{k+1}^I$, 则 $e_{k+1} \notin (I_0)_{j_{k+1}}$, 其中 j_{k+1} 是 C_{k+1} 在 I_0 (或 I) 中的索引标号. 因为 $I = I_0$, 所以 $e_{k+1} \notin C_{k+1}^I$. 又由定理 15 可知, 对任意被定义概念 $C_{k+2}, W_{k+2} \in L(C_{k+1}, C_{k+2}), e_{k+2} \in \Delta^J$, 如果 $(e_{k+1}, e_{k+2}) \in W_{k+2}^I$, 则 $e_{k+2} \notin (I_0)_{j_{k+2}} = C_{k+2}^I$, 其中 j_{k+2} 是 C_{k+2} 在 I_0 (或 I) 中的索引标号. 依次类推可得, 存在序列 $C_{k+1}, W_{k+1}, e_{k+1}, \dots, C_n, W_n, e_n$, 使得对任意 $k+1 \leq i \leq n, e_i \notin C_i^I, (e_{i-1}, e_i) \in W_i^I, W_i \in L(C_{i-1}, C_i)$.

从而得到一条无限路径 $B, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 以及对应的个体 e_1, e_2, e_3, \dots , 满足性质: 对任意 $i \geq 0, e_i \notin C_i^I, (e_{i-1}, e_i) \in W_i^I, W_i \in L(C_{i-1}, C_i)$. 又因为 T 中的概念 (或 A_T 中的状态) 是有限的, 所以一定存在概念 C, C 在路径 $B, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 中出现无限次, 从而路径 $B, W_1, C_1, W_2, C_2, W_3, C_3, \dots$ 具有如下形式: $B, U_0, C, U_1, C, U_2, C, \dots$, 因此存在 $k \geq 0$, 使得 $U_0 U_1 \cdots U_k \in L(A, C)$, 并且存在 e_m , 使得 $(d, e_m) \in (U_0 U_1 \cdots U_k)^I, e_m \notin C^I$, 从而由定理 15 可知 $d \notin A^I$.

再证明 \Rightarrow , 因为 $A \sqsubseteq_T B$, 所以有 $A \sqsubseteq_{\text{gfp}, T} B$, 从而由定理 7 可知条件(1)和条件(2)满足. 条件(3)用反证法证明. 针对 FL_0 , Baader 给出了一个反例^[5]. 由于 FL_0 是 FL^- 的子系统, 从而条件(3)成立.

证毕.

由以上可以看出, 定理 15 和定理 17 分别是文献^[5]中命题 28 和定理 29 的推广, 即将描述语义下 FL_0 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理算法推广到 FL^- 循环术语集的可满足性推理和包含关系推理.

定理 18. 描述语义下 FL^- 循环术语集的可满足性推理是 PSPACE-完全的, 而包含关系推理是

PSPACE-难的.

因为 I 是 T 的模型, I 一定是 T 的 $I\text{-gfp}$ -模型, 从而利用定理 8 的方法可以证明该定理.

4 结束语

分析了描述逻辑循环术语集的研究现状和存在的问题, 在 Baader 的基础上进一步研究了描述逻辑 FL^- 循环术语集的语义及推理问题. 给出了 FL^- 循环术语集的语法、语义和不动点模型的构造方法. 针对 FL^- 循环术语集的需要, 提出了一种新的有限自动机, 并使用有限自动机给出了不动点语义和描述语义下 FL^- 循环术语集的可满足性和包含推理算法. 进一步的工作是主要扩充 FL^- 循环术语集 (添加并构造算子).

参 考 文 献

- [1] Shi Zhong-Zhi, Jiang Yun-Cheng, Zhang Hai-Jun, Dong Ming-Kai. Agent service matchmaking based on description logic. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(5): 625-635 (in Chinese)
(史忠植, 蒋运承, 张海俊, 董明楷. 基于描述逻辑的主体服务匹配. 计算机学报, 2004, 27(5): 625-635)
- [2] Giacomo G D, Lenzerini M. A uniform framework for concept definitions in description logics. Journal of Artificial Intelligence Research, 1997, 6(1): 87-110
- [3] Buchheit M, Donini F M, Nutt W, Schaerf A. A refined architecture for terminological systems: terminology = schema + views. Artificial Intelligence, 1998, 99(2): 209-260
- [4] Baader F, Nutt W. Basic description logics//Baader F, Calvanese D, McGuinness D, Nardi D, Patel-Schneider P eds. Proceedings of the Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 47-100
- [5] Baader F. Using automata theory for characterizing the semantics of terminological cycles. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 1996, 18(2-4): 175-219
- [6] Kusters R. Characterizing the semantics of terminological cycles in ALN using finite automata//Cohn A G, Schubert L, Shapiro S C eds. Proceedings of the 6th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1998: 499-511
- [7] Nebel B. Terminological cycles: Semantics and computational properties//Sowa J F ed. Proceedings of the Principles of Semantic Networks. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1991: 331-362

- [8] Nebel B. Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems. LNAI 422. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [9] Baader F. Terminological cycles in a description logic with existential restrictions//Gottlob G, Walsh T eds. Proceedings of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2003). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2003: 325-330
- [10] Levesque H L, Brachman R J. Expressiveness and tractability in knowledge representation and reasoning. Computational Intelligence, 1987, 3(2): 78-93
- [11] Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its appli-

cations. Pacific Journal of Mathematics, 1955, 5(2): 285-309

- [12] Lloyd J W. Foundations of Logic Programming. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1987
- [13] Zhang Jin-Wen. Introduction to Axiomatic Set Theory. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese)
(张锦文. 公理集合论导引. 北京: 科学出版社, 1999)
- [14] Hopcroft J E, Motwani R, Ullman J D. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. 2nd Edition. Boston: Addison-Wesley Press, 2001



JIANG Yun-Cheng, born in 1974, Ph. D., associate professor. His main research interests include description logics, semantic Web and Web intelligence.

WANG Ju, born in 1950, Ph. D., professor. His main research interests include description logics, separation logic and artificial intelligence.

DENG Pei-Min, born in 1950, professor. His main research interests include automata theory and its applications.

TANG Yong, born in 1964, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include temporal database, knowledge engineering and CSCW.

Background

Description logics are a logical reconstruction of the frame-based knowledge representation languages, with the aim of providing a simple well-established declarative semantics to capture the meaning of structured representation of knowledge. Terminological cycles (or cyclic definitions) have been a difficult spot in the study of description logics for quite a few years. The basic problems, such as their semantics and reasoning mechanisms, have not been reasonably well settled. However, terminological cycles may greatly extend the expressive capability of the language. In some applications, terminological cycles are indispensable. Also, by using terminological cycles, one can establish a description logic knowledge base more conveniently because it would give the people an intuitive understanding of the axioms, sentences of the knowledge base. If we do not accept terminological cycles in the knowledge base, when a cyclic concept occurs in the application, it would make the system specification overly complex and hard to understand by a user. For

these reasons, it is significant to study the semantics and the algorithmic nature of terminological cycles. Based on the work of Baader F, the semantics and reasoning of terminological cycles in description logic FL^- are further studied in this paper. The syntax, semantics, and construction method of fixpoint models of terminological cycles in FL^- are given. Aiming at the requirement of terminological cycles in FL^- , a kind of new finite automata is presented, and the satisfiability and subsumption reasoning algorithms of terminological cycles in FL^- w. r. t. fixpoint semantics and descriptive semantics are presented using finite automata. Theoretical foundation for the application of terminological cycles in description logics is provided. The work is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant Nos. 60663001, 60673135, 60373081, and 60573010, the Natural Science Key Foundation of Guangdong Province of China under grant No. 04105503, and the Youth Science Foundation of Guangxi Province of China under grant No. 0640030.