

# 基于变分和小波变换的图像放大算法

冯象初<sup>1)</sup> 姜东焕<sup>2)</sup> 徐光宝<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(西安电子科技大学理学院数学系 西安 710071)

<sup>2)</sup>(山东科技大学信息科学与工程学院 山东 青岛 266510)

**摘 要** 为了更好地放大图像,利用小波变换的思想,提出了一种变分和小波变换相结合的图像放大算法.该算法的思想是先构造一个用 Besov 范数估计图像正则性的变分泛函,然后在小波域中最小化变分泛函得到放大图像.小波变换后的高频分量具有丰富的细节边缘信息,因而能够重构出高质量的图像,而且小波的引入使得文中新算法具有运行时间短、速度快的特点.与传统的插值放大图像不同,该算法是用变分的思想进行图像放大.理论分析和实验仿真表明,该算法能达到和样条插值同样的放大效果.

**关键词** 图像放大;变分泛函;小波变换

**中图法分类号** TP391

## Combining Variation and Wavelet Transform for Image Zooming

FENG Xiang-Chu<sup>1)</sup> JIANG Dong-Huan<sup>2)</sup> XU Guang-Bao<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071)

<sup>2)</sup>(College of Information Science and Engineer, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266510)

**Abstract** To improve the image resolution, a new algorithm for image zooming combining variation and wavelet transform is proposed. The zoomed image is found by minimizing the variational functional in the wavelet domain which uses the Besov norm to measure the regularity of the image. Because the high-frequency subband of the wavelet transform keeps most details, the image is reconstructed with high quality. The new algorithm has the advantage of high velocity with the use of wavelet transform. Unlike the traditional image zooming by interpolation, the variation model is incorporated in the new zooming algorithm. Both theoretical analysis and experimental results have verified that the algorithm can achieve the same effect as the interpolation by using spline.

**Keywords** image zoom; variational functional; wavelet transform

## 1 引 言

图像放大是从一幅低分辨率图像获得其高分辨率版本的一种图像处理技术.图像的放大和缩小在数字图像处理中起着很重要的作用,为适应特殊的

应用场合或者得到一个较好的视觉效果,例如要突出某些细节,常常需要一种可以有效改变已有图像大小的方法,使图像放大和缩小后仍有较高的质量.

各种插值技术是实现图像放大的常用方法.现有的图像处理理论及常用的处理软件都是采用插值方法对图像进行放大和缩小,如平移重复插值、双线

性插值和样条插值等. 这些插值方法有很多的优越性, 用于图像插值也取得了较好的效果. 但这些方法都是用一些已知的光滑函数根据一定的光滑性要求逼近源图像. 由于这种固定方式的局限性, 势必会在图像放大倍数较高时形成斑点以及在明暗区域出现偏移现象, 而且放大倍数越大, 这种现象越明显. 为克服该问题, 朱宁等<sup>[1]</sup>提出了图像放大的偏微分方程方法. Guichard 和 Maltouyres<sup>[2-3]</sup>提出了一种基于全变差的图像插值方法. 其基本思想是通过给插值图像的傅里叶系数加某种约束条件使得插值方法是可逆的, 即通过对插值图像下采样可以得到原始图像. 满足这种约束条件的插值方法很多, 他们选用全变差估计图像的正则性并选择正则性最好的插值方法. 2004 年 Chambolle<sup>[4]</sup>给出了基于全变差的图像放大的实现算法, 得到了比较理想的放大效果, 但是该算法运行时间长、速度慢.

本文在 Chambolle 图像放大算法的基础上, 用 Besov 范数代替图像的全变差估计图像的正则性, 得到一个新的变分泛函, 然后通过最小化变分泛函得到放大图像. 因为 Besov 范数可以用小波系数序列的范数等价描述, 所以可以将该泛函的最小化问题转化到小波域中用迭代的方法求解, 并给出了迭代方法的收敛性证明. Chambolle 基于全变差的图像放大算法运行时间长、速度慢, 而文中新算法是在小波域中进行求解, 小波变换后的高频分量具有丰富的细节边缘信息, 因而能够重构出高质量的图像, 而且小波的引入使得该算法具有运行时间短、速度快的特点. 所以新算法能在比较短的时间内获得质量更好的放大图像. 与传统的基于插值的放大算法不同, 新算法是用变分的思想放大图像. 变分模型对放大后的图像强加了几何正则性要求, 这就保证了放大后图像边缘的光滑性.

## 2 基础知识

### 2.1 小波和 Besov 范数

假设  $f$  是定义在区域  $\Omega \doteq [0, 1]^2$  上的一副灰度图像, 用 Besov 范数刻画图像的正则性是比较合适的<sup>[5-6]</sup>. 关于 Besov 空间  $B_q^\beta(L_p(\Omega))$  的具体定义, 参考文献[5]. 本文只需要 Besov 半范数和小波系数范数之间的等价关系. 选用  $L_2(\Omega)$  上的紧支撑周期正交小波(如 Daubechies 正交小波<sup>[7]</sup>)分解图像  $f$ . 令  $\phi$  表示周期化的尺度函数, 那么  $\phi$  为 1. 令  $\Psi \doteq \{\psi^{(i)} \mid i=1, 2, 3\}$  表示由一维正交小波的张量积构成

的两维正交小波基. 定义

$$\psi_{j,k}(x) \doteq 2^k \psi(2^k x - j),$$

那么函数  $f$  的小波表达式为

$$f = \langle f, 1 \rangle + \sum_{j,k,\psi} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

其中,  $\psi \in \Psi, k \geq 0, j \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}^2$ . 此时, 可以用小波系数来表示  $L_2(\Omega)$  范数:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 = |\langle f, 1 \rangle|^2 + \sum_{j,k,\psi} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \quad (1)$$

如果小波  $\psi$  在  $B_p^\beta(L_p(\Omega))$  空间中( $\beta > \alpha$ ), 那么有等价关系:

$$|f|_{B_p^\alpha(L_p(\Omega))} \approx \left( \sum_{j,k,\psi} 2^{\alpha k p} 2^{k(p-2)} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

此处仅考虑  $p=1, \alpha \leq 1$  时的特殊情况, 即  $B_1^\alpha(L_1(\Omega))$  空间. 为了方便起见, 记  $f_\gamma \doteq \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \gamma \in \Gamma$ , 则

$$|f|_{B_1^\alpha(L_1(\Omega))} \approx 2^{k(\alpha-1)} \|(f_\gamma)\|_{\ell_1(\Gamma)} \quad (2)$$

其中,  $\Gamma = \{i, j, k \mid i=1, 2, 3; k \geq 0; j \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}^2\}$ .

### 2.2 Chambolle 图像放大模型

假设讨论的图像是  $N \times N$  的二维矩阵,  $X$  表示空间  $\mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $Z$  是  $X$  的一个子空间,  $g \in Z$  表示一幅粗糙的图像. 例如, 当放大因子为 2 时, 用数学式子表示  $Z$  为:  $Z = \{g \in X \mid g_{2k, 2l} = g_{2k-1, 2l} = g_{2k, 2l-1} = g_{2k-1, 2l-1}, k, l \leq N/2\}$ . Chambolle<sup>[4]</sup>的图像放大模型为

$$\min_{u \in X} \|Au - g\|^2 + 2\lambda \cdot TV(u).$$

其中,  $u$  是放大后的图像,  $A$  是在空间  $Z$  上的正交投影. 显然有  $Ag = g$  及

$$\|Au - g\| = \|A(u - g)\| = \min_{w \in Z^\perp} \|u - g - w\|.$$

从而, Chambolle 图像放大模型变为

$$\min_{u \in X, w \in Z^\perp} \|u - (g + w)\|^2 + 2\lambda \cdot TV(u).$$

Chambolle 给出了求解上述最小值问题的一种迭代算法. 虽然该方法能得到比较好的图像放大效果, 但是它的计算时间长、速度慢, 所以寻求相对运行时间短与实现速度快的算法具有重要的实际和现实意义.

## 3 基于变分和小波变换的图像放大算法及其收敛性证明

### 3.1 基于变分和小波变换的图像放大算法

引理<sup>[8]</sup>. 设  $\{\psi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  是 Hilbert 空间中的一组正交小波基,  $f_\gamma, u_\gamma$  分别是函数  $f$  和  $u$  在这组基下的小波系数, 则泛函

$$F(u_\gamma) = \|u_\gamma - f_\gamma\|_{l_2(\Gamma)}^2 + 2\lambda \|u_\gamma\|_{\ell_1(\Gamma)}$$

的最小解为

$$\tilde{u}_\gamma = S_\lambda(f_\gamma) = \begin{cases} f_\gamma - \lambda, & f_\gamma \geq \lambda \\ 0, & -\lambda \leq f_\gamma \leq \lambda \\ f_\gamma + \lambda, & f_\gamma \leq -\lambda \end{cases}.$$

其中,  $S_\lambda$  为小波软阈值算子.

由于 Besov 空间  $B_1^1(L_1(\Omega))$  是有界变差空间  $BV(\Omega)$  的近似最小值<sup>[9]</sup> 及  $B_1^1(L_1(\Omega))$  空间中不允许图像存在边界, 所以用一个光滑阶为  $\alpha(\alpha \leq 1)$  的 Besov 空间  $B_1^\alpha(L_1(\Omega))$  来刻画图像  $u$  的正则性, 得到一个新的变分泛函, 然后通过最小化变分泛函得到放大图像. 利用 Besov 范数可以用小波系数范数等价描述的性质, 将求解最小值问题转化到小波域中用迭代的方法求解. 小波变换后的高频分量具有丰富的细节边缘信息, 因而能够重构出高质量的图像, 而且小波的引入使得文中新算法具有运行时间短、速度快的特点. 这样就克服了 Chambolle 图像放大模型速度慢、时间长的缺点, 而且得到质量有显著提高的放大图像. 从而, 本文的图像放大模型为

$$\min_{u \in X} \|Au - g\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2\lambda \|u\|_{B_1^\alpha(L_1(\Omega))}.$$

同样地, 该问题等价于最小化下列泛函:

$$F(u, w) = \|u - (g + w)\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2\lambda \|u\|_{B_1^\alpha(L_1(\Omega))},$$

其中,  $u \in X, w \in Z^\perp$ . 根据等价关系(1)和(2), 有

$$\begin{aligned} \|u - (g + w)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\approx \|u_\gamma - (g_\gamma + w_\gamma)\|_{l_2(\Gamma)}^2, \\ \|u\|_{B_1^\alpha(L_1(\Omega))} &\approx 2^{k(a-1)} \|u_\gamma\|_{\ell_1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

其中,  $u_\gamma, g_\gamma, w_\gamma$  分别表示函数的第  $\gamma$  个小波系数, 从而得到下列等价的凸序列泛函:

$$S_g(u_\gamma, w_\gamma) = \|u_\gamma - (g_\gamma + w_\gamma)\|_{l_2(\Gamma)}^2 + 2\lambda 2^{k(a-1)} \|u_\gamma\|_{\ell_1(\Gamma)} \quad (3)$$

关于  $u_\gamma$  和  $w_\gamma$  取最小, 其中  $w_\gamma \in Z_\gamma$ , 令  $Z_\gamma$  表示  $l_2(\Gamma)$  中小波系数低频部分为零的空间. 相当于考虑下面两个最小化问题:

固定  $w_\gamma$ , 求泛函(3)关于  $u_\gamma$  的最小解, 即

$$\min_{u_\gamma \in l_2} \|u_\gamma - (g_\gamma + w_\gamma)\|_{l_2(\Gamma)}^2 + 2\lambda 2^{k(a-1)} \|u_\gamma\|_{\ell_1(\Gamma)},$$

根据引理知,  $\tilde{u}_\gamma = S_{2^{k(a-1)}\lambda}(g_\gamma + w_\gamma)$ .

固定  $u_\gamma$ , 求泛函(3)关于  $w_\gamma$  的最小解, 即

$\min_{w_\gamma \in Z_\gamma} \|u_\gamma - (g_\gamma + w_\gamma)\|_{l_2(\Gamma)}^2$ , 其最小解为  $\tilde{w}_\gamma = T_L(u_\gamma - g_\gamma)$ , 其中  $T_L$  表示函数的小波系数的低频部分阈值为零.

综上可知泛函(3)最小化问题的解可以用迭代的方法得到, 其算法如下.

**算法.**

1. 初始化:  $(w_\gamma)_0 = 0$ ;

2. 迭代:

$$\begin{cases} (u_\gamma)_n = S_{2^{k(a-1)}\lambda}(g_\gamma + (w_\gamma)_n) \\ (w_\gamma)_{n+1} = T_L((u_\gamma)_n - g_\gamma) \end{cases} \quad (4)$$

3. 停止条件:  $u_n = \sum_\gamma (u_\gamma)_n \phi_\gamma$ ,  $u_{n+1} = \sum_\gamma (u_\gamma)_{n+1} \phi_\gamma$ .

假设  $\tau$  是一个事先给定的小的正数, 若满足条件  $\max(|u_{n+1} - u_n|) \leq \tau$  就停止迭代.

### 3.2 迭代方法的收敛性

**定理.** 序列  $S_g((u_\gamma)_n, (w_\gamma)_n)$  收敛到泛函(3)中  $S_g(u_\gamma, w_\gamma)$  的最小值.

**证明.** 为了方便起见, 直接用  $u$  和  $w$  来表示它们的小波系数. 根据迭代算法, 可知

$$S_g(u_{n+1}, w_{n+1}) \leq S_g(u_n, w_{n+1}) \leq S_g(u_n, w_n) \quad (5)$$

所以序列  $S_g(u_n, w_n)$  是递减的, 又  $S_g(u_n, w_n) \geq 0$ , 从而它是一个单调有界序列, 因此该序列收敛. 设其收敛到  $m$ , 即  $m = \min_{u, w} S_g(u, w)$ .

文中用紧支撑正交小波做变换, 函数的小波系数是稀疏的, 即  $u, w, g$  中只有有限个不为零的数, 所以序列  $(u_n, w_n)$  有界, 存在一个收敛的子列  $(u_{n_k}, w_{n_k})$ , 当  $n_k \rightarrow \infty$  时, 有  $(u_{n_k}, w_{n_k}) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{w})$ , 其中  $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in X \times Z^\perp$ .

对任意  $n_k \in \mathbb{Z}, w \in Z_\gamma$ , 有

$$S_g(u_{n_k}, w_{n_k+1}) \leq S_g(u_{n_k}, w) \quad (6)$$

对任意  $n_k \in \mathbb{Z}, u \in l_2$ , 有

$$S_g(u_{n_k}, w_{n_k}) \leq S_g(u, w_{n_k}) \quad (7)$$

设  $\hat{w}$  是  $w_{n_k+1}$  的聚点, 由于  $S_g(u, w)$  是连续的, 根据式(5)有

$$m = S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) = S_g(\tilde{u}, \hat{w}).$$

从而,  $\|\tilde{u} - (g + \hat{w})\|_{l_2} = \|\tilde{u} - (g + \tilde{w})\|_{l_2}$ , 因为  $\tilde{w} \in Z_\gamma$ , 所以由投影的唯一性知,  $\hat{w} = \tilde{w}$ . 因此,  $w_{n_k+1} \rightarrow \tilde{w}$ .

分别对式(6)和式(7)取极限, 有

$$S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) \leq S_g(\tilde{u}, w), \text{ 即 } S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) = \min_{w \in Z_\gamma} S_g(\tilde{u}, w) \quad (8)$$

$$S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) \leq S_g(u, \tilde{w}), \text{ 即 } S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) = \min_{u \in l_2} S_g(u, \tilde{w}) \quad (9)$$

结合式(3)的泛函, 式(8)等价于

$$0 \in \tilde{u} - g - \tilde{w} \quad (10)$$

式(9)等价于

$$0 \in \tilde{u} - g - \tilde{w} + 2^{k(a-1)} \lambda \partial \|\tilde{u}\|_{\ell_1} \quad (11)$$

因为  $S_g(u, w)$  在  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  的次梯度为

$$\partial S_g(\tilde{u}, \tilde{w}) = \left\{ \begin{aligned} &\tilde{u} - g - \tilde{w} \\ &\tilde{u} - g - \tilde{w} + 2^{k(a-1)} \lambda \partial \|\tilde{u}\|_{\ell_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

所以由式(10)~式(12)知：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial S_g(\bar{u}, \bar{w}),$$

即  $S_g(\bar{u}, \bar{v}) = \min_{u,v} S_g(u, w) = m$ , 因此序列  $S_g(u_n, w_n)$  收敛到  $S_g(\bar{u}, \bar{w})$ , 并且  $(u_n, w_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{w})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

4 仿真实验

下面将文中新算法与 Chambolle 放大模型进行比较, 取参数  $\lambda=0.4$ , 取  $\tau=0.5$ . 为便于比较, 先将原图下采样缩小一定的倍数作为实际获取的图像, 然后再放大. 用文中方法放大图像时, 需要根据不同

的图像选取不同的  $\alpha$ , 一般取 0.8 或 1. 为了减少放大后图像的边缘模糊现象及块效应, 文中采用平移不变小波变换, 只做一层小波变换. 选用 db4 小波, 实验结果见图 1 和图 2. 图 1 是采用 Chambolle 放大模型和文中方法对 Lena(256×256)图像进行放大两倍的结果. 可以看出, Chambolle 放大模型得到的图像边缘比较模糊. 采用文中方法得到的图像细节丰富, 如图像中帽子上的褶皱及头发比较清晰. 图 2 是对 Plane(128×128)图像采用 Chambolle 放大模型和文中方法进行放大两倍的结果. 可以看出, Chambolle 模型得到的放大图像的机身及尾翼上的字迹和云层都比较模糊, 而文中方法得到的图像却比较清晰.



图 1 Chambolle 模型和新算法对 Lena 图像放大两倍的结果比较

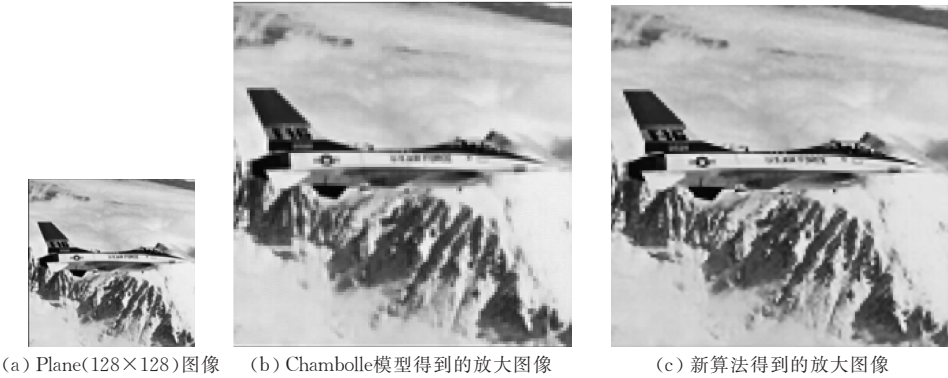


图 2 Chambolle 模型和新算法对 Plane 图像放大两倍的结果比较

为了更好地说明新算法的放大效果, 采用三次样条插值和文中算法对 Lena(256×256)的图像放大两倍, 只选取放大后图像中含细节较多的一部分, 实验结果见图 4. 可以看出, 本文算法同样可以得到与样条插值相同的放大效果.

客观上, 可以采用峰值信噪比 (PSNR) 和均方误差 (RMSE) 来评价图像放大效果的好坏. 峰值信

噪比是一种比较接近人眼的视觉效果评价量. 均方误差用来测量放大图像与标准图像的相近程度. 另外, 考虑到实际的可行性, 把时间 (time) 也作为一个评价指标. 用这三个指标定量分析这两种方法的图像放大效果, 下面对四幅图像进行实验, 其中, Key 图像是一幅钥匙图, text 图像中有很多文字 (见图 3). 实验数据见表 1, 由此可见文中方法不仅速度

快,用时短,而且得到质量更好的放大图像. 对于 Key 和 Text 这两幅二值图像来说,文中方法虽然用时很短,但是峰值信噪比并没有很大的提高. 所以文中方法更适合处理自然图像及细节丰富的图像.

表 1 Chambolle 模型与新算法的放大性能比较

图像	放大 倍数	Chambolle 模型			文中新算法		
		时间/s	PSNR	RMSE	时间/s	PSNR	RMSE
Key 64×64	2	117. 24	18. 263	31. 144	0. 82	18. 602	29. 954
Plane 128×128	2	520. 68	25. 523	13. 503	6. 23	26. 844	11. 596
Lena 128×128	4	3158. 90	24. 615	14. 753	61. 37	25. 213	12. 699
Lena 256×256	2	1962. 80	29. 596	8. 447	39. 46	29. 718	8. 329
Text 128×128	2	517. 73	16. 331	38. 903	4. 61	16. 768	36. 995

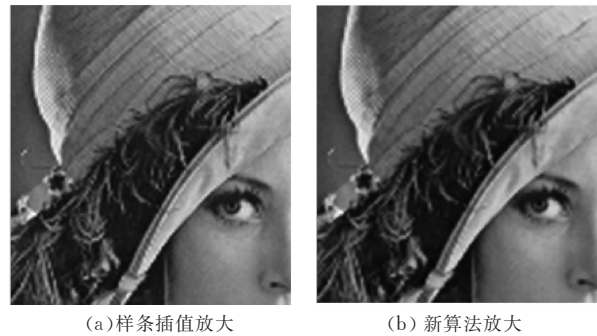


图 3 样条插值方法和新算法的放大结果比较



图 4 实验所用的 Key 图像和 Text 图像

5 结 论

与传统的插值放大图像不同,本文从变分的角度提出一种新的图像放大算法. 该算法用 Besov 范数刻画图像的正则性构造了一个变分泛函,然后通过最小化变分泛函得到放大图像. 根据 Besov 范数与小波系数范数之间的等价关系,可以将该泛函的最小化问题转化到小波域中用迭代的方法求解,并证明了迭代方法的收敛性. Chambolle 基于全变差的图像放大算法运行时间长、速度慢,而变分模型对放大后的图像强加了几何正则性的要求,这就保证了用新算法放大的图像边缘的光滑性;新算法是在小波域中进行求解,小波变换后的高频分量具有丰富的细节边缘信息,因而能够重构出高质量的图像,小波的引入使得该算法具有运行时间短、速度快的特点,能较快地获得质量更好的放大图像. 由实验结

果可知,该算法适合处理自然图像及含丰富细节的图像,并且在视觉上可以达到和样条插值相同的放大效果.

参 考 文 献

[1] Zhu Ning, Wu Jing, Wang Zhongqian. Image zooming based on partial differential equations. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2005, 17(9): 1941-1945(in Chinese) (朱宁,吴静,王忠谦. 图像放大的偏微分方程方法. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(9): 1941-1945)

[2] Guichard F, Malgouyres F. Total variation based interpolation//Proceedings of the European Signal Processing Conference, Island of Rhodes, Greece, 1998(3): 1741-1744

[3] Guichard F, Malgouyres F. Edge direction preserving image zooming: A mathematical and numerical analysis. SIAM Journal of Numerical Analysis, 2001, 39(1): 1-37

[4] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1-2): 89-97

[5] DeVore R A. Nonlinear approximation. Acta Numerica, Cambridge University Press, 1998, 7: 51-150

[6] Chambolle A, DeVore R A, Lee N. Nonlinear wavelet image processing: Variational problem, compression and noise removal through wavelet shrinkage. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7: 319-335

[7] Daubechies I. Wavelet transforms and orthonormal wavelet bases//Different Perspectives on Wavelets (San Antonio, TX, 1993), volume 47 of Proceedings of the Symposium in Applied Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993: 1-33

[8] Lorenz D A. Solving variational problems in image processing via projections—A common view on TV denoising and wavelet shrinkage. University of Bremen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2004, 87(3): 247-256

[9] Cohen A, DeVore R, Petrushev P et al. Nonlinear approximation and the space  $BV(R^2)$ . American Journal of Mathematics, 1999, 121(3): 587-628



**FENG Xiang-Chu**, born in 1962, professor, Ph. D. supervisor. His main research interests include image processing, the theory of PDEs and its application, wavelets and its applications.

**JIANG Dong-Huan**, born in 1981, Ph. D. candidate, lecturer. Her research interests are the application of wavelet and PDEs in image processing.

**XU Guang-Bao**, born in 1980, master, teaching assistant. His research interests include image processing and information security.

Background

Image zooming is one of the most fundamental problems in the field of image processing. It is a kind of technology which interpolates an image to higher resolution. Zooming in and zooming out play an important role in many digital image processing. To adapt to a special situation or to obtain a better visual effect, for example, to stand out some details of an image, it is common to change the size of the image effectively and the zoomed image are still of high quality.

Image interpolation techniques are often used to zoom an image, such as the duplication interpolation, the bilinear interpolation and the spline interpolation. The interpolation methods have shown superior properties for some classes of images. However, most of the interpolation methods have been introduced with no count on edges. Thus they bring up the smoothing effect in resulting images. Furthermore, when the image is zoomed by a large factor, the zoomed image looks blocky.

Recently, some new nonlinear methods have been suggested to overcome the artifacts of linear methods. The new methods are respectively based on wavelet and partial differential equations. Guichard and Maltouyres suggest total variation based interpolation. They define an interpolation meth-

od by imposing the interpolation to be reversible, in the sense that the original image can be deduced from its interpolation by a sub-sampling. This imposes some constraints on the Fourier coefficients of the interpolated image. There exist many possible interpolations that satisfy these constraints. They choose the total variation of the image to be the most regular among all possibilities. In 2004, Chambolle gives the discrete algorithm of the image zooming based on total variation. Therefore, image zoom has become the focus of many researchers all over the world and lots of progress has been made.

In this paper, a new algorithm for image zooming combining variation and wavelet transform is proposed. The authors find the zoomed image by minimizing the variational functional in the wavelet domain which uses the Besov norm to measure the regularity of the image. Because the high-frequency subband of the wavelet transform keeps most details, the image can be reconstructed with high quality. The new algorithm has the advantage of high velocity with the use of wavelet transform. Unlike the traditional image zooming by interpolation, the variation model is incorporated in the new zooming algorithm.