

模糊有穷自动机与单体二阶 Lukasiewicz 逻辑

李永明

(陕西师范大学计算机科学学院 西安 710062)

摘 要 该文引入了单体二阶 Lukasiewicz 逻辑,进而给出了模糊有穷自动机识别语言的逻辑描述,证明了多值逻辑意义下的 Büchi 与 Elgot 基本定理.通过引入星-自由模糊语言与非周期模糊语言,刻画了可以用一阶 Lukasiewicz 逻辑定义的模糊语言.

关键词 模糊逻辑;有穷自动机;单体二阶 Lukasiewicz 逻辑;模糊语言;模糊计算

中图法分类号 TP301

Fuzzy Finite Automata and Monadic Second-Order Lukasiewicz Logic

LI Yong-Ming

(College of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract The authors introduce monadic second-order (MSO-) Lukasiewicz logic and prove that the behaviors of fuzzy finite automata are precisely the fuzzy languages definable with sentences of the MSO Lukasiewicz logic. This generalizes Büchi's and Elgot's fundamental theorems to fuzzy logic setting. The authors also consider first-order Lukasiewicz logic and show that star-free fuzzy languages and aperiodic fuzzy languages introduced here coincide with the first-order definable ones.

Keywords fuzzy logic; finite automata; monadic second-order Lukasiewicz logic; fuzzy language; fuzzy computation

1 引 言

形式语言在理论计算机科学研究中占有重要的地位,对形式语言的刻画与分类一直是其中的一个重要的研究方向.在这个方面,一个重要的研究成果就是 Chomsky 对形式语言的分类体系.业已证明 Chomsky 体系的每一类语言都可以用不同的方法进行描述.对于最基本的正则语言类,它可以用有穷自动机来识别,也可以用正则表达式表示,可以用正则文法来生成,也可以用有穷半群来刻画等^[1-2]. Büchi 与 Elgot 等进一步建立了正则语言与单体二阶逻辑可定义的语言之间的一致性,并利用一阶逻辑

可定义的语言对正则语言进行了分类^[3-5].最近, Droste 与 Gastin 对此进行了进一步推广,在经典逻辑框架下,他们研究了形式幂级数意义下的正则语言的逻辑描述^[6].

经典的形式语言是一种精确定义的语言,它对于描述机器语言起到了重要的作用.但在处理自然语言尤其是人类使用的语言时,形式语言对于人类使用语言的模糊性的描述能力明显不够.为此, Zadeh 等人提出了模糊语言的概念,随后又对模糊语言进行了刻画与分类^[7].其中模糊正则语言可以用模糊有穷自动机、模糊正则表达式、模糊文法等刻画^[8-14].但有关模糊正则语言在模糊逻辑意义下的逻辑描述还未有系统的研究结果.模糊逻辑意义

下的有穷自动机及其对应单体二阶逻辑描述以及分类仍是一个待解决的问题. 本论文将在这方面做一些研究. 我们在常用的剩余类逻辑——Lukasiewicz 模糊逻辑下定义模糊有穷自动机(参见文献[15])以及对应的单体二阶逻辑的语构与语义, 建立了模糊逻辑意义下的 Büchi 与 Elgot 基本定理. 进一步, 我们给出可用一阶 Lukasiewicz 逻辑定义的模糊语言, 对模糊正则语言给出了一种分类方法.

2 模糊有穷自动机识别语言的有关逻辑性质

Lukasiewicz 逻辑是以真值论域为 $([0, 1], \vee, \wedge, \neg, \rightarrow, 0, 1)$ 的模糊逻辑(从语义角度), 其中 $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ 定义为 $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\neg a = 1 - a$, $a \rightarrow b = \min\{1 - a + b, 1\}$. 本节主要研究 Lukasiewicz 逻辑意义下的有穷自动机, 我们称为模糊有穷自动机.

定义 1. 模糊自动机是五元组 $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, 其中 Q 为有限状态集, Σ 为有限字母表, I, F 为 Q 的模糊子集, 代表初始状态与终状态, 而 $\delta: Q \times \Sigma \times Q \rightarrow [0, 1]$ 为模糊转移关系.

如下命题:

“ q 为初始状态”记为“ $q \in I$ ”.

“ q 为终状态”记为“ $q \in F$ ”.

“输入 a 使状态 q 转移到 p ”记为“ $(q, a, p) \in \delta$ ”.

这些命题的真值分别为 $I(q)$, $F(q)$, $\delta(q, a, p)$. 我们用 Σ^* 表示字母表 Σ 上的有限串全体构成的集合, ε 表示空串. 与模糊自动机 A 对应的 Σ^* 上的模糊可识别谓词 $f_A \in F(\Sigma^*)$ 定义为: 对输入串 $w \in \Sigma^*$, 令 $w = a_1 \cdots a_n$, 则

$$f_A(w) = (\exists q_0 \in Q) \cdots (\exists q_n \in Q) (q_0 \in I \wedge q_n \in F \wedge (q_0, a_1, q_1) \in \delta \wedge \cdots \wedge (q_{n-1}, a_n, q_n) \in \delta),$$

即命题 $f_A(w)$ 的真值定义为

$$[[f_A(w)]] = \vee \{ I(q_0) \wedge \delta(q_0, a_1, q_1) \wedge \cdots \wedge \delta(q_{n-1}, a_n, q_n) \wedge F(q_n) : q_1, \dots, q_n \in Q \}.$$

f_A 称为模糊自动机 A 识别或接受的 Σ 上的模糊语言, 也称为 Σ 上的模糊正则语言.

以下记 Σ 上的模糊正则语言全体为 $FR(\Sigma)$, 则 $FR(\Sigma)$ 关于模糊并、交、补、连接、Kleene 闭包等封闭^[9,13]. 而且针对 Lukasiewicz 逻辑, 我们还有如下结论.

命题 1(文献[9,16]). 对模糊语言 f , 以下论断等价.

(1) $f \in FR(\Sigma)$.

(2) 存在 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$, 其中 1_{L_i} 表示 L_i 的特征函数.

(3) 存在 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 及两两不交的正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$.

命题 2. 设 $f, g \in FR(\Sigma)$, 则 $f \rightarrow g \in FR(\Sigma)$, 其中 $f \rightarrow g(w) = f(w) \rightarrow g(w)$.

证明. 由命题 1, 存在 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$; 并且存在 $d_1, \dots, d_n \in (0, 1]$ 以及正则语言 M_1, \dots, M_n 使得 $g = \bigvee_{j=1}^n (d_j \wedge 1_{M_j})$. 这时易证 $f \rightarrow g = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n (k_i \rightarrow d_j) \wedge 1_{L_i \cap M_j}$, 由于正则语言的交仍是正则语言, 且 $k_i \rightarrow d_j \in (0, 1]$. 因此, 由命题 1 可得: $f \rightarrow g \in FR(\Sigma)$.

证毕.

命题 3. 设 $f, g \in FR(\Sigma)$, 则 $f \oplus g, f \odot g \in FR(\Sigma)$, 其中, $f \oplus g(w) = (f(w) + g(w)) \wedge 1$, $f \odot g(w) = (f(w) + g(w) - 1) \vee 0$.

证明. 由于 $f, g \in FR(\Sigma)$, 所以 $\neg f, g \in FR(\Sigma)$, 其中, $\neg f$ 表示 f 的补, 定义为 $\neg f(w) = 1 - f(w)$. 注意到 $f \oplus g = \neg f \rightarrow g$, 由命题 2 知, $f \oplus g \in FR(\Sigma)$. 另外, $f \odot g = \neg(\neg f \oplus \neg g)$, 所以 $f \odot g \in FR(\Sigma)$.

证毕.

命题 4(文献[13]). 设 $h: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ 为同态, (1) 若 $f \in FR(\Sigma_2)$, 则 $h^{-1}(f) = f \circ h \in FR(\Sigma_1)$; (2) 若 h 满足, 对 $\sigma \in \Sigma$, $h(\sigma) \neq \varepsilon$, 且 $g \in FR(\Sigma_1)$, 则 $h(g) \in FR(\Sigma_2)$, 其中 $h(g)(w) = \vee \{ g(v) : h(v) = w \}$.

3 单体二阶 Lukasiewicz 逻辑以及它可定义的模糊语言

我们首先回顾单体二阶逻辑(MSO)的有关概念.

设 Σ 为字母表, Σ 上的 MSO-逻辑公式的语构用如下的 BNF 形式定义:

$\varphi ::= P_a(x) \mid x \leq y \mid x \in X \mid \varphi \vee \psi \mid \neg \varphi \mid \exists x. \varphi \mid \exists X. \varphi$, 其中 $a \in \Sigma$, x, y 为一阶变量, 而 X 为二阶集合变量. 下列公式为利用上述形式中的公式推导出的用其他连接词表示的公式:

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \\
\varphi \rightarrow \psi &= \neg\varphi \vee \psi, \\
\varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi), \\
\forall x.\varphi &= \neg(\exists x.\neg\varphi), \\
\forall X.\varphi &= \neg(\exists X.\neg\varphi).
\end{aligned}$$

以下用 $Free(\varphi)$ 表示公式 φ 中出现的全体自由变量, 用 2^X 表示集合 X 的子集全体构成的集合.

设 $w = w(1)\cdots w(n) \in \Sigma^*$, $w(i) \in \Sigma$. w 的长度为 $|w| = n$. 则字 w 可用结构 $(\{1, 2, \dots, |w|\}, \leq, (Q_a)_{a \in \Sigma})$ 表示, 其中 $Q_a = \{i: w(i) = a\} (a \in \Sigma)$.

设 V 为一阶与二阶变量的有限集合, $w \in \Sigma^*$, 一个 (V, w) 指派是一个函数 $\sigma: V \rightarrow \{1, 2, \dots, |w|\} \cup 2^{\{1, 2, \dots, |w|\}}$, 对一阶变量 $x \in V$, $\sigma(x) \in \{1, 2, \dots, |w|\}$, 对二阶变量 $X \in V$, $\sigma(X) \subseteq \{1, 2, \dots, |w|\}$. 若 x 为一阶变量, 规定指派 $\sigma[x \rightarrow i]$ 为一个 $(V \cup \{x\}, w)$ 指派, $\sigma[x \rightarrow i](x) = i$, 而在 V 的其余变量上 $\sigma[x \rightarrow i]$ 与 σ 定义一致. 同理, 若 X 为二阶变量, $I \subseteq \{1, 2, \dots, |w|\}$, 同样的可以定义指派 $\sigma[X \rightarrow I]$. 给定 (w, σ) , 关系 $(w, \sigma) \models \varphi$ 按通常方式定义 (文献[2]), 其中 σ 的定义域包含了 $Free(\varphi)$. 明显的, $(w, \sigma) \models \varphi$ 只依赖于 $\sigma|_{Free(\varphi)}$.

通常我们用扩展字母表 $\Sigma_V = \Sigma \times \{0, 1\}^V$ 来对 (w, σ) 进行表示或编码, 即用字 $(w(1), U_1), \dots, (w(n), U_n) \in (\Sigma_V)^*$ 表示 (w, σ) , 其中 $w = w(1)\cdots w(n)$, 而 $U_i \subseteq V$ 定义为 $U_i = \{x \in V: x \text{ 是一阶变量且 } \sigma(x) = i\} \cup \{X \in V: X \text{ 是二阶变量且 } i \in \sigma(X)\}$, 这样的字与 (V, w) -指派一一对应. 以下我们就用 (w, σ) 表示这样的字, 并称这时的 σ 为 (V, w) -有效指派. $(\Sigma_V)^*$ 上的其他的字 θ 我们也用 (w, σ) 表示, 其中 w 为 (w, σ) 在 Σ^* 上的投影, 而 σ 为 (w, σ) 在 $\{0, 1\}^V$ 上的投影, 这时称 σ 不是有效的 (V, w) -指派, 以区别于 (V, w) -有效指派. 则语言

$$N = \{(w, \sigma) \in (\Sigma_V)^*: \sigma \text{ 为有效的 } (V, w) \text{ 指派}\}$$

为可识别的语言, 即正则语言^[2]. 记 $\Sigma_\varphi = \Sigma_{Free(\varphi)}$, $N_\varphi = N_{Free(\varphi)}$. 由 Büchi 定理, 若 $Free(\varphi) \subseteq V$, 则下面的语言

$$L_V(\varphi) = \{(w, \sigma) \in N_V: (w, \sigma) \models \varphi\}$$

是正则语言, 记 $L(\varphi) = L_{Free(\varphi)}(\varphi)$. 反之, 对 Σ^* 上的正则语言 L , 一定存在 MSO-句子 φ 使得 $L = L(\varphi)$.

下面我们把这个结论推广到模糊逻辑情形. 首先我们定义单体二阶 Lukasiewicz (简记为 LMSO)-逻辑. 对于模糊逻辑, 有两种类型的逻辑蕴涵: 一种可以用逻辑连接词 “ \vee ”, “ \wedge ”, 或者 “ \rightarrow ” 表示, 另一种用剩余运算定义. Lukasiewicz 逻辑采用第二种方

式来定义逻辑蕴涵. 因此, 在定义 Lukasiewicz 逻辑时, 逻辑蕴涵是一种主要的连接词, 它不能通过其他的连接词而定义.

定义 2. LMSO-逻辑公式的语构用如下的 BNF 形式定义:

$$\begin{aligned}
\varphi &::= r \mid P_a(x) \mid x \leq y \mid x \in X \mid \varphi \vee \psi \mid \neg\varphi \mid \\
&\quad \varphi \rightarrow \psi \mid \exists x.\varphi \mid \exists X.\varphi,
\end{aligned}$$

其中 $r \in [0, 1]$, $a \in \Sigma$, x, y 为一阶变量, 而 X 为二阶集合变量. 由此可诱导如下公式

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \\
\varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi), \\
\forall x.\varphi &= \neg(\exists x.\neg\varphi), \\
\forall X.\varphi &= \neg(\exists X.\neg\varphi).
\end{aligned}$$

以下用 $Free(\varphi)$ 表示公式 φ 中出现的全体自由变量. 而用 $LMSO(\Sigma)$ 表示所有的 LMSO-公式之集.

定义 3. 设 $\varphi \in LMSO(\Sigma)$, V 为有限变量集且 $Free(\varphi) \subseteq V$, 则 φ 的 V -语义定义为 Σ_V 上的模糊语言 $[[\varphi]]: \Sigma_V^* \rightarrow [0, 1]$, 其中 $(w, \sigma) \in \Sigma_V^*$, 当 σ 不是有效的 (V, w) 指派, 则 $[[\varphi]](w, \sigma) = 0$; 否则, $[[\varphi]]$ 归纳地定义如下:

$$[[r]](w, \sigma) = r,$$

$$[[P_a(x)]](w, \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } w(\sigma(x)) = a \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$[[x \leq y]](w, \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma(x) \leq \sigma(y) \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$[[x \in X]](w, \sigma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma(x) \in \sigma(X) \\ 0, & \text{否则} \end{cases},$$

$$[[\neg\varphi]](w, \sigma) = 1 - [[\varphi]](w, \sigma),$$

$$[[\varphi \vee \psi]](w, \sigma) = [[\varphi]](w, \sigma) \vee [[\psi]](w, \sigma),$$

$$[[\varphi \rightarrow \psi]](w, \sigma) = [[\varphi]](w, \sigma) \rightarrow [[\psi]](w, \sigma),$$

$$[[\exists x.\varphi]](w, \sigma) = \bigvee \{ [[\varphi]]_{V \cup \{x\}}(w, \sigma[x \rightarrow i]) : 1 \leq i \leq |w| \},$$

$$[[\exists X.\varphi]](w, \sigma) = \bigvee \{ [[\varphi]]_{V \cup \{X\}}(w, \sigma[X \rightarrow I]) : I \subseteq \{1, 2, \dots, |w|\} \}.$$

以下记 $[[\varphi]] = [[\varphi]]_{Free(\varphi)}$. 注意到, 若 φ 为句子, 从而 φ 无自由变量, 则 $[[\varphi]]$ 为 Σ 上的模糊语言.

命题 5. 设 $\varphi \in LMSO(\Sigma)$, $Free(\varphi) \subseteq V$, 则 $[[\varphi]]_V(w, \sigma) = [[\varphi]](w, \sigma|_{Free(\varphi)})$. 特别地, $[[\varphi]]$ 为模糊正则语言 $\Leftrightarrow [[\varphi]]_V$ 为模糊正则语言.

证明. 证明是简单的, 只需对公式 φ 中出现的连接词与量词的个数施行归纳即可. 证毕.

用 $[LMSO(\Sigma)]$ 表示所有的可用 $LMSO(\Sigma)$ 上的句子定义的模糊语言.

模糊逻辑意义下的 Büchi-Elgot 定理表述如下,这也构成本节的主要定理.

定理 1. $FR(\Sigma)=[LMSO(\Sigma)]$.

证明. 由下面引理 1、引理 2 以及引理 3 的结论得证.

引理 1. 若 $\varphi \in LMSO(\Sigma)$ 为原子的,则 $[[\varphi]] \in FR(\Sigma)$.

证明. 若 $\varphi = r \in [0, 1]$, 构造模糊有穷自动机 (Q, δ, I, F) , $Q = \{q\}$, 对任意的 $a \in \Sigma$, $\delta(q, a, q) = 1$, $I = \{q\}$, 而 $F\{q\} = r$. 对于 $\varphi = P_a(x) \mid x \leq y \mid x \in X$ 的情形, 经典构造即可, 参见文献[1]. 证毕.

引理 2. 若 $\varphi, \psi \in LMSO(\Sigma)$, 且 $[[\varphi]], [[\psi]]$ 可识别, 则 $[[\varphi \vee \psi]], [[\neg \varphi]], [[\varphi \rightarrow \psi]], [[\exists x. \varphi]], [[\exists X. \varphi]]$ 都可识别.

证明. 这是因为 $[[\varphi \vee \psi]] = [[\varphi]] \vee [[\psi]]$, $[[\neg \varphi]] = \neg [[\varphi]]$, $[[\varphi \rightarrow \psi]] = [[\varphi]] \rightarrow [[\psi]]$, 且模糊正则语言关于并、补、蕴涵运算封闭. 若令 $\pi: (\Sigma_{V \cup \{x\}})^* \rightarrow (\Sigma_V)^*$ 为抹去第 x 行的投影, 即对 $a \in \Sigma$, $\pi(a) = a$, 对 $U \subseteq V \cup \{x\}$, $\pi(U) = U - \{x\}$. 则 $[[\exists x. \varphi]] = \pi([[\varphi]])$, 由于模糊正则语言在投射同态下保持, 所以 $[[\exists x. \varphi]]$ 也是可识别的. 若将一阶变量 x 换为二阶变量 X , 则可以证明 $[[\exists X. \varphi]]$ 也是可识别的. 证毕.

命题 6. 以上构造模糊自动机的过程是可判定的.

证明. 显然.

引理 3. 若字母表 Σ 上的模糊语言 f 是可识别的, 则存在 $\varphi \in LMSO(\Sigma)$ 使得 φ 为句子, 且 $f = [[\varphi]]$.

证明. 由于 f 是可识别的, 所以存在正则语言 L_1, \dots, L_m 以及 k_1, \dots, k_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$. 由于 L_i 是正则的, 存在句子 φ_i 使得 $L_i = [[\varphi_i]]$, 这时若令 $\varphi = \bigvee_{i=1}^n (k_i \wedge \varphi_i)$, 则易证 $f = [[\varphi]]$. 实际上, 我们可以给出 φ 的具体构造如下.

设 $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ 为识别模糊语言 f 的模糊自动机. 对 $(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q$, 取集合变量 $X_{p,a,q}$, 并令 $V = \{X_{p,a,q} : (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q\}$, 设 $|V| = m = |Q|^2 \cdot |\Sigma|$, 并令 $\bar{X} = (X_1, \dots, X_m)$, 定义公式 ϕ 如下:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{X}) = & \text{decomp}(\bar{X}) \wedge \bigwedge_{p,a,q} \forall x. ((x \in X_{p,a,q}) \rightarrow \\ & P_a(X)) \wedge \forall x \forall y. (S(x, y) \rightarrow \\ & \bigvee_{p,q,r \in Q, a, b \in \Sigma} ((x \in X_{p,a,q} \wedge (y \in X_{q,b,r}))), \end{aligned}$$

其中, $\text{decomp}(\bar{X}) = \forall x. (\bigvee_{i=1}^m ((x \in X_i) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg (x \in X_j)))$, $S(x, y) = (x \leq y) \wedge \neg (y \leq x) \wedge \forall z. (z \leq x \vee y \leq z)$, $S(x, y)$ 也计为 $y = x + 1$.

这时, 对 $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ 令 $\text{assign}(V, w)$ 表示所有满足公式 ϕ 的 (V, w) -指派 (即 $[[\phi]](w, \sigma) = 1$) 的集合, 而 $\text{path}(w)$ 表示所有标记为 w 的路径的集合, 则存在从集合 $\text{assign}(V, w)$ 到集合 $\text{path}(w)$ 的一一对应. 这是因为, 若 $\text{path} = (q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{a_n} q_n)$ 为 A 上的一条以 w 为标记的路径, 则定义 (V, w) -指派 σ_{path} 为 $\sigma_{\text{path}}(X_{p,a,q}) = \{i : (q_{i-1}, a_i, q_i) = (p, a, q)\}$. 则易验证 $[[\phi]](w, \sigma_{\text{path}}) = 1$. 反之, 若 σ 为 (V, w) -指派且 $[[\phi]](w, \sigma_{\text{path}}) = 1$, 由 $\text{decomp}(\bar{X})$ 的定义, $\{\sigma(X_{p,a,q}) : (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q\}$ 构成 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分解, 则对任意的 $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ 存在唯一的 $(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q$ 使得 $x \in \sigma(X_{p,a,q})$, 且当 $y = x + 1 \leq n$ 时, 存在唯一的 $(p, b, r) \in Q \times \Sigma \times Q$ 使得 $y \in \sigma(X_{q,b,r})$, 从而得到唯一的一条路径 $\text{path} = (q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{a_n} q_n)$, 且 $\sigma_{\text{path}} = \sigma$.

定义公式 ψ 如下:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{X}) = & \phi(\bar{X}) \wedge \bigwedge_{p,a,q} \forall x. ((x \in X_{p,a,q}) \rightarrow \delta(p, a, q)) \wedge \\ & \exists y. (\text{first}(y) \wedge \bigvee_{p,a,q} (y \in X_{p,a,q} \wedge I(p)) \wedge \\ & \exists z. (\text{last}(z) \wedge \bigvee_{p,a,q} ((z \in X_{p,a,q}) \wedge F(q))), \end{aligned}$$

其中, $\text{first}(y) = \forall x. y \leq x$, $\text{last}(z) = \forall x. x \leq z$.

这时, 若 $\text{path} = (q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{a_n} q_n)$ 为 A 中的一条路径, σ_{path} 为对应的 (V, w) -指派, 则有

$$[[\psi]](w, \sigma_{\text{path}}) = I(q_0) \wedge \delta(q_0, a_1, q_1) \wedge \cdots \wedge \delta(q_{n-1}, a_n, q_n) \wedge F(q_n).$$

令 $\tau = \exists X_1 \cdots \exists X_m. \psi(X_1, \dots, X_m)$, 这时,

$$\begin{aligned} [[\tau]](w) &= \bigvee_{\sigma \in \text{assign}(V, w)} [[\psi]](w, \sigma) \\ &= \bigvee_{p \in \text{path}(w)} [[\psi]](w, \sigma_p) \\ &= \bigvee_{q_0, \dots, q_n \in Q} I(q_0) \wedge \delta(q_0, a_1, q_1) \wedge \cdots \wedge \\ & \quad \delta(q_{n-1}, a_n, q_n) \wedge F(q_n) \\ &= f_A(w). \end{aligned}$$

另外, 明显的, $[[\tau]](\epsilon) = 0$. 为了对空串输入 ϵ 进行处理, 我们令 $v = r \wedge \forall x. \neg (x \leq x)$, 其中 $r = \sigma_0 \circ \sigma_1 = \bigvee_{q \in Q} \sigma_0(q) \wedge \sigma_1(q)$, 则明显的, $[[v]](\epsilon) = r = f_A(\epsilon)$. 从而若取 $\varphi = \tau \vee v$, 则 φ 为句子, 且 $f = f_A = [[\tau \vee v]] = [[\varphi]]$. 证毕.

4 可用一阶 Lukasiewicz 逻辑定义的模糊语言

这一节我们来研究可用一阶 Lukasiewicz 逻辑

定义的模糊语言。

定义 4. 公式 $\varphi \in \text{LMSO}(\Sigma)$ 称为一阶公式, 若 φ 不包含任何的集合变量, 即

$$\varphi ::= r | P_a(x) | x \leq y | |\varphi \vee \psi| \rightarrow \varphi | \varphi \rightarrow \psi | \\ \varphi \leftrightarrow \psi | \exists x. \varphi | \forall x. \varphi.$$

用 $\text{LMO}(\Sigma)$ 表示 Σ 上所有的一阶公式。

定义 5. (1) 模糊语言 $f: \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ 称为星自由的 (star-free), 若 f 可通过 Σ 上的有限语言经过有限次的布尔运算 (并、交、补)、数量积、连接运算而得到。(2) 模糊语言 $f: \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ 称为非周期的 (aperiodic), 若 f 是可识别的且满足条件: 存在非负整数 m , 对任意的 $u, v, w \in \Sigma^*$, 恒有 $f(uv^m w) = f(uv^{m+1} w)$ 。

引理 4. 设 $f: \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ 为模糊语言, 则 f 为星自由的当且仅当存在有限个 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及星自由正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$ 。

证明. 设 f 为星自由的模糊语言, 我们针对生成 f 的运算符个数归纳证明该引理的结论成立。

当 f 无运算符号, 这时 f 为 Σ 上的有限语言, 引理结论自然成立。

设 f, g 为星自由的且满足引理条件, 则存在有限个数 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及 $d_1, \dots, d_n \in (0, 1]$, 有限个星自由的正则语言 L_1, \dots, L_m 以及 M_1, \dots, M_n 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$, $g = \bigvee_{j=1}^n (d_j \wedge 1_{M_j})$ 。这时 $f \vee g = \bigvee_{i=1}^m k_i \wedge 1_{L_i} \vee \bigvee_{j=1}^n d_j \wedge 1_{M_j}$, 显然满足引理条件。而 $\neg f = \bigvee_{i=1}^m (1 - k_i) \wedge 1_{L_i} \vee 1_{(L_1 \cup \dots \cup L_m)^c}$, 其中 L^c 表示语言 L 的补语言。从而 $\neg f$ 满足引理条件。对 $r \in [0, 1]$, $r \wedge f = \bigvee_{i=1}^m (r \wedge k_i) \wedge 1_{L_i}$ 也满足引理条件。关于连接运算, 我们有 $fg = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n (k_i \wedge d_j) \wedge 1_{L_i M_j}$, 从而 fg 也满足引理条件。归纳的, 我们证明了若 f 为星自由的模糊语言, 则引理的结论成立。

反之是显然的。

证毕。

引理 5. 设 $f: \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ 为模糊语言, 则 f 为非周期的当且仅当存在有限个 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及非周期正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$ 。

证明. 设模糊语言 f 为非周期的, 从而 f 为可识别的。由命题 1, 存在实数 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m (k_i \wedge 1_{L_i})$, 其中

$L_i = \{w: f(w) = k_i\}$ 。我们证明各 L_i 为非周期的语言即可。因为 f 为非周期的, 所以存在整数 $n \geq 0$ 使得对任意的 $u, v, w \in \Sigma^*$, 都有 $f(uv^n w) = f(uv^{n+1} w)$ 。对此 n , 以及 $u, v, w \in \Sigma^*$, 有 $uv^n w \in L_i \Leftrightarrow f(uv^n w) = k_i \Leftrightarrow f(uv^{n+1} w) = k_i \Leftrightarrow uv^{n+1} w \in L_i$, 所以各 L_i 都是非周期的正则语言。

反之, 若 f 满足引理条件, 由命题 1, f 是可识别的。因为各 L_i 都是非周期的, 所以存在正整数 n , 对任意的 $u, v, w \in \Sigma^*$, 有 $uv^n w \in L_i \Leftrightarrow uv^{n+1} w \in L_i$, 所以 $f(uv^n w) = \bigvee \{k_i: uv^n w \in L_i\} = \bigvee \{k_i: uv^{n+1} w \in L_i\} = f(uv^{n+1} w)$, 这说明 f 为非周期的模糊语言。

证毕。

引理 6. 对一阶公式 φ , 若 $[[\varphi]]$ 为非周期的, 则 $[[\exists x. \varphi]]$ 也是非周期的。

证明. 令 $V = \text{Free}(\exists x. \varphi)$, 因为 $[[\varphi]]$ 为非周期的, 由引理 5, 存在 $\Sigma_{V \cup \{x\}}$ 上的非周期正则语言 L_1, \dots, L_m 以及实数 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以使得 $[[\varphi]] = \bigvee_{i=1}^m k_i \wedge 1_{L_i}$, 可以要求各 L_i 是两两非交的。对 $(w, \sigma) \in (\Sigma_V)^*$, 恒有 $[[\exists x. \varphi]](w, \sigma) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^m k_j \wedge 1_{L_j}(w, \sigma[x \rightarrow i]) = \bigvee \{k_j: \exists i, 1 \leq i \leq |w|, (w, \sigma[x \rightarrow i]) \in L_j\}$ 。令 $M_j = \{(w, f) \in (\Sigma_V)^*: \exists i, 1 \leq i \leq |w|, (w, \sigma[x \rightarrow i]) \in L_j\}$ 。这时, $[[\exists x. \varphi]] = \bigvee_{j=1}^m k_j \wedge 1_{M_j}$ 。下面只要证明 M_j 为非周期的正则语言即可。我们先来证明 M_j 为正则语言。定义投影 $\pi: \Sigma_{V \cup \{x\}} \rightarrow \Sigma_V$ 为 $\pi(\sigma, U) = (\sigma, U - \{x\})$, 则 $\pi(L_j) = \{(w, f) \in \Sigma_V^*: \exists (w, f') \in L_j, \pi(w, f') = (w, f)\} = \{(w, f): \exists i, 1 \leq i \leq |w|, (w, f[x \rightarrow i]) \in L_j\}$ 。最后一个等式成立是因为, f' 为有效的 $(V \cup \{x\}, w)$ -指派且 $\pi(w, f') = (w, f)$ 当且仅当存在 $i \in \{1, 2, \dots, |w|\}$, 使得 $f' = f[x \rightarrow i]$ 。这样就证明了 $M_j = \pi(L_j)$ 。由于 L_j 是 $\Sigma_{V \cup \{x\}}$ 上的正则语言, 且正则语言在同态下保持 (见文献[17]), 所以 M_j 是正则语言。下面进一步证明 M_j 是非周期的即可。由于各 L_j 是非周期的, 则存在正整数 l , 对任意的 $u, v, w \in \Sigma^*$, 有 $uv^l w \in L_j \Leftrightarrow uv^{l+1} w \in L_j$ 成立。取 $n \geq 2(l+1)$, 我们证明 $uv^n w \in M_j \Leftrightarrow uv^{n+1} w \in M_j$ 。设 $u = (w_1, \sigma_1)$, $v = (w_2, \sigma_2)$, $w = (w_3, \sigma_3)$ 。则 $uv^n w \in M_j \Leftrightarrow (w_1 w_2^n w_3, \sigma_1 \sigma_2^n \sigma_3[x \rightarrow i]) \in L_j$ 。注意到 $\sigma_1 \sigma_2^n \sigma_3[x \rightarrow i]$ 的定义方式以及 L_j 是非周期的, 且 $n \geq l$, 说明 x 这个位置在 σ_2 对应位置的外边, 从而由 L_j 是非周期的, 可知 $uv^{n+1} w[x \rightarrow i] \in L_j$, 由于 x 位置在 v^{n+1} 位置的外边, 从而说明 $uv^{n+1} w \in M_j$ 成立。这说明 M_j 是非周期

的正则语言. 由引理 5, 得 $[[\exists x.\varphi]]$ 是非周期的模糊语言. 证毕.

定理 2. 设 $f: \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ 为模糊语言, 则下列条件等价.

(1) f 可以由一阶公式表示, 即存在 $\varphi \in LFO(\Sigma)$ 使得 $f = [[\varphi]]$.

(2) f 为星-自由的模糊语言.

(3) f 为非周期的模糊语言.

证明. 由于星自由的正则语言与非周期的正则语言是一致的, 从而由引理 4 与引理 5 可知条件(2)与条件(3)等价.

(1) \Rightarrow (2): 设 $f = [[\varphi]]$, φ 为一阶公式, 下面针对 φ 中出现的连接词与量词个数 k 进行归纳. $k=0$ 时, φ 为原子公式, 当 $\varphi = P_a(x) \mid x \leq y$ 时, $f = [[\varphi]]$ 为经典的星自由正则语言, 从而也是星自由模糊语言, 而当 $\varphi = r \in [0, 1]$ 时, $[[\varphi]] = r \wedge 1_{\Sigma^*}$, 后者明显的是星自由模糊语言. 假设 $k=n$ 时命题成立, 下面考察 $k=n+1$ 的情况. 分以下几种情况: (i) $\varphi = \phi \vee \psi$, 或者 $\varphi = \neg \phi$, 或者 $\varphi = r \wedge \phi$, 则由星自由模糊语言的定义, 可知星自由模糊语言关于语言的并、数量积、连接运算封闭, 所以在这种情况下, 都有 $f = [[\varphi]]$ 为星自由模糊语言. (ii) $\varphi = \phi \rightarrow \psi$, 设 $[[\phi]] = \bigvee_{i=1}^m k_i \wedge 1_{L_i}$, $[[\psi]] = \bigvee_{j=1}^n d_j \wedge 1_{M_j}$, 其中, L_i, M_j 都是星自由的, 则 $f = [[\varphi]] = [[\phi \rightarrow \psi]] = [[\phi]] \rightarrow [[\psi]] = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n (k_i \rightarrow d_j) \wedge 1_{L_i \cap M_j}$ 为星自由的. (iii) $\varphi = \exists x.\phi$, 则由引理 6 知 $f = [[\varphi]] = [[\exists x.\phi]]$ 是非周期的从而星自由的模糊语言.

(2) \Rightarrow (1): 因为 f 为星-自由的模糊语言, 根据引理 4, 存在有限个 $k_1, \dots, k_m \in (0, 1]$ 以及星自由正则语言 L_1, \dots, L_m 使得 $f = \bigvee_{i=1}^m k_i \wedge 1_{L_i}$. 由于各 L_i 都是星自由的正则语言, 所以存在一阶公式 φ_i 使得 $L_i = [[\varphi_i]]$. 令 $\varphi = \bigvee_{i=1}^m k_i \wedge \varphi_i$, 则明显的, φ 为一阶公式且 $f = [[\varphi]]$. 证毕.

5 结论与后续工作

本文在 Lukasiewicz 逻辑中研究了模糊自动机以及其识别的模糊语言, 给出了单体二阶 Lukasiewicz 逻辑的语构与语义, 证明了模糊逻辑意义下的 Büchi 与 Elgot 定理. 通过引入星自由模糊语言和非周期模糊语言, 完全刻画了可用一阶

Lukasiewicz 逻辑描述的模糊语言, 给出了模糊正则语言的一种分类方法.

本文是在 Lukasiewicz 模糊逻辑下讨论问题的, 且真值仅限于单位区间 $[0, 1]$, 而我们知道, 存在多种模糊逻辑体系, 而且对应的逻辑代数更为复杂, 参见文献[18-19], 那么在不同的模糊逻辑体系中本文的理论是否成立仍是需要进一步讨论的问题. 另外, 模糊语言在不同的形式下的相互转换的复杂性与模糊复杂性^[20]也有待于进一步研究.

参 考 文 献

- [1] Khoussainov B, Nerode A. Automata Theory and Its Applications. Boston: Birkhäuser, 2001
- [2] Thomas W. Languages, automata and logic//Rozenberg G, Salomaa A eds. Handbook of Formal Languages. Berlin: Springer Verlag, 1997, 3: 389-485
- [3] Büchi J R. Weak second-order arithmetic and finite automata. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1960, 6(1): 66-92
- [4] Elgot C C. Decision problems of finite automata design and related arithmetics. Transactions of the American Mathematical Society, 1961, 98(1): 21-52
- [5] Tian Qi-Jia, Shen En-Shao, Shi Zhong-Zhi. $L(P^{1,1})$ and regular language. Chinese Journal of Computers, 1996, 19(11): 848-853(in Chinese)
(田启家, 沈恩绍, 史忠植. $L(P^{1,1})$ 和正则语言. 计算机学报, 1996, 19(11): 848-853)
- [6] Droste M, Gastin P. Weighted automata and weighted logics. Theoretical Computer Science, 2007, 380(1): 69-86
- [7] Lee E T, Zadeh L A. Note on fuzzy languages. Information Sciences, 1969, 1(4): 421-434
- [8] Mordeson J N, Malik D S. Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications. Boca Raton, London: Chapman & Hall/CRC, 2002
- [9] Li Y M, Pedrycz W. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 156(1): 68-92
- [10] Li Y M, Pedrycz W. The equivalence between fuzzy Mealy and fuzzy Moore machines. Soft Computing, 2006, 10(10): 953-959
- [11] Li Y M. Approximation and robustness of fuzzy finite automata. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 47(2): 247-257
- [12] Li Y M, Pedrycz W. Minimization of lattice finite automata and its application to the decomposition of lattice languages. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(13): 1423-1436
- [13] Li P, Li Y M. Algebraic properties of LA-languages. Information Sciences, 2006, 176(21): 3232-3255

- [14] Ying M S. A formal model of computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(5): 640-652
- [15] Qiu D W. Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic. Science in China Series F, 2001, 44(6): 419-429
- [16] Li Yong-Ming. Analysis of Fuzzy Systems. Beijing: Science Press, 2005(in Chinese)
(李永明. 模糊系统分析. 北京: 科学出版社, 2005)
- [17] Hopcroft J E, Ullman J D. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation. New York: Addison-Wesley, 1979
- [18] Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1998
- [19] Wang Guo-Jun. Nonstandard Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Beijing: Science Press, 2000(in Chinese)
(王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000)
- [20] Li Yong-Ming. Approximation and universality of fuzzy Turing machines. Science in China (Series E), 2008, 38(8): 1189-1203(in Chinese)
(李永明. 模糊图灵机的逼近性与通用性. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2008, 38(8): 1139-1352)



LI Yong-Ming, born in 1966, Ph.D., professor. His research interests include computation theory, fuzzy control theory, fuzzy automata theory, spatial reasoning, fuzzy and quantum logic, and topology over lattices.

Background

Early in the history of theoretical computer science, it came to light that formal languages would be one of the foundations of further research. Therefore characterizing all languages, or even better sorting them in some hierarchy, was an important issue. For example, the regular languages can be characterized by finite automata and by regular expressions. Myhill and Nerode independently showed that this is equivalent to a characterization by finite monoids. The equivalence to monadic second-order logic is given by Büchi and Elgot. They further give a sort of regular languages definable by first-order logic. Recently, Droste and Gastin gave a further generalization to monadic second-order logic characterization of regular languages in the frame of formal power series.

Classical formal languages are precise defined languages, they are very useful in the describing of machine languages. But it is not powerful in the processing of human languages. For this, Zadeh introduced the notion of fuzzy languages and gave some characterizations. For example, fuzzy regular languages can be characterized by fuzzy finite automata, fuzzy

regular expressions, fuzzy grammars, etc. While there is no any results on the monadic second-order logic characterization of fuzzy regular languages. How to characterize fuzzy regular languages by monadic second-order logic in fuzzy setting is an open problem. The author and his collaborators have done some work in this way. In the frame of well-known residual-logic-Lukasiewicz fuzzy logic, they gave the definition of fuzzy finite automata, and presented the corresponding syntactic and semantics of monadic second-order logic, the fuzzy Büchi-Elgot theorem is set up. Furthermore, they give the characterization of fuzzy languages definable by first-order Lukasiewicz-logic, and a sort of fuzzy regular languages is given.

The workgroup has studied fuzzy automata for many years. In particular, they introduced the notion of lattice-valued automata^[9], which forms one of the main topics in the study of fuzzy automata. Many interesting results have been obtained in this field. The study of monadic second-order fuzzy logic of fuzzy automata is one of these results.