

# 一类根式不等式的有理化算法与机器证明

徐 嘉 姚 勇

(中国科学院成都计算机应用研究所 成都 610041)

**摘 要** 文中讨论了一类根式不等式的有理等价问题,证明了这类根式不等式可等价转化为一组有理不等式,建立了一个算法 RFD,并用 Maple 编程实现. 对一个给定的这类根式不等式, RFD 可自动快速地产生一组有理等价不等式. 将 RFD 算法和差分代换方法相结合,给出了一大类具有相当难度的几何不等式的机器证明. 此前该课题仅有的工作是杨路关于二次根式的结果.

**关键词** 根式不等式;有理化;不等式机器证明;差分代换

**中图法分类号** TP301

## Rationalizing Algorithm and Automated Proving for a Class of Inequalities Involving Radicals

XU Jia YAO Yong

(Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041)

**Abstract** A theory is developed to transform a class of inequalities involving radicals to a set of rational inequalities. And this theory is implemented by a Maple program named "RFD" which can efficiently produce a set of rational inequalities that equal to the original inequalities involving radicals. Combining RFD with SDS, the program can automatically prove an extensive class of geometric inequalities involving radicals.

**Keywords** inequalities involving radicals; rationalization; automated proving; SDS

## 1 引 言

根式不等式的机器证明在自动推理领域中是一个比较困难的研究课题. 传统的方法是利用一些消去手段(如 Grobner 基方法<sup>[1]</sup>、吴方法<sup>[2]</sup>、结式方法<sup>[3]</sup>)寻找根式的边界多项式,然后对边界多项式做胞腔分解,对每个胞腔选择样本点,最后将样本点回代入根式检验. 详细过程可参考文献[3-4]. 这一方法对根式不等式的机器证明是完备的,但该方法使用了复杂度为双指数的胞腔分解算法,常常因此对一部分问题,机器运行需要大量的时间. 故有必要

对根式的相关问题做进一步的研究,探索新的算法,以提高机器运行效率.

在本文中我们选择如下覆盖范围广泛的一类的根式不等式作为研究目标:

$$\sqrt[m_1]{u_1} + \sqrt[m_2]{u_2} + \cdots + \sqrt[m_n]{u_n} \leq \sqrt[m]{t} \quad (1)$$

其中所有根式均为二次根式的情形已被杨路解决,这也是此前关于这一课题仅有的工作. 但杨的结果并未正式发表<sup>①</sup>.

我们进攻的策略分两步,一是获取与式(1)等价的有理不等式组,二是用差分代换方法处理有理不等式. 步骤1称为有理化步骤,本文理论上得到的结果对式(1)这种类型的不等式有理化是完备的. 步骤

收稿日期:2006-10-19;最终修改稿收到日期:2007-09-12. 本课题得到国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(2004CB318003)和中国科学院知识创新工程重要方向项目(KJCX-YW-S02)资助. 徐 嘉,女,1981年生,博士研究生,主要研究方向为计算机自动推理、智能软件技术. E-mail: xujia8106@yahoo.com.cn. 姚 勇,男,1974年生,主要研究方向为计算机自动推理、智能软件技术.

① 杨路. 关于一类多元根式不等式的证明. 见网页: <http://www.irgoc.org/bbs/disppbs.asp?boardID=4&ID=12&page=1>

2 称为验证步骤, 所选用的差分代换方法, 其处理有理不等式的能力相当强. 经大量的实例验证, 这种‘根式有理化+差分代换方法’的模式对处理一大类几何不等式很高效.

## 2 二次根式不等式的有理化

由于二次根式不等式有着特殊的重要性, 其中包含了大量的几何不等式在内, 所以有必要单独列出其有理化过程. 另外, 二次根式不等式的有理化, 对于了解一般根式不等式的有理化还具有启发作用. 这依赖于下面的定理.

**定理 1**(杨路). 设  $u_1, u_2, \dots, u_n, t (n \geq 2)$  是非负的实数, 记  $y$  的多项式  $f(y)$  为

$$f(y) := \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1, 2\}} (y - [\sqrt{u_1} + (-1)^{j_1} \sqrt{u_2} + \dots + (-1)^{j_{n-1}} \sqrt{u_n}]^2) \quad (2)$$

则如下不等式

$$\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n} \leq \sqrt{t} \quad (3)$$

成立的充分必要条件是下列  $r = 2^{n-1}$  个实数  $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$  满足:

$$\begin{aligned} c_0 &:= f(t) \geq 0, \quad c_1 := f^{(1)}(t) \geq 0, \dots, \\ c_{r-1} &:= f^{(r-1)}(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $f^{(k)}$  是  $f$  的  $k$  阶导数,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ .

这个定理的证明需要一条引理, 即 Descartes 符号法则的推论<sup>[5]</sup>.

**引理 1**(Descartes). 如果实系数多项式  $f(x)$  的根都是实的, 则它的正根个数 ( $l$  重根以  $l$  个计算) 等于这个多项式系数组的变号数.

下面给出定理 1 的证明.

**证明.** 必要性: 由已知, 对  $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2\}$  有  $2^n$  个不等式成立:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - [(-1)^{j_1} \sqrt{u_1} + (-1)^{j_2} \sqrt{u_2} + \dots + (-1)^{j_n} \sqrt{u_n}] \\ \geq \sqrt{t} - [\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n}] \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

将这  $2^n$  个式子, 配成  $2^{n-1}$  对, 应用平方差公式得到

$$p(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) := t - [\sqrt{u_1} + (-1)^{j_1} \sqrt{u_2} + \dots + (-1)^{j_{n-1}} \sqrt{u_n}]^2 \geq 0 \quad (6)$$

考察恒等式:

$$\prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1, 2\}} [x - (t - [\sqrt{u_1} + (-1)^{j_1} \sqrt{u_2} + \dots + (-1)^{j_{n-1}} \sqrt{u_n}]^2)] \equiv x^r - \sigma_1 x^{r-1} + \dots + \sigma_r \quad (7)$$

其中  $\sigma_k$  是  $p(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$  的初等对称多项式,  $k = 1, 2, \dots, r$ ;  $j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1, 2\}$ .

一方面, 由式(5), (6)知  $\sigma_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, r)$ .

另一方面, 显见  $f(t) = \sigma_r$ , 再由函数乘积的导数公式可见,  $f^{(k)}(t)$  与  $\sigma_{r-k}$  之间只相差一个正常数因子.

综合这两方面得  $f(t) \geq 0, \dots, f^{(r-1)}(t) \geq 0$ , 必要性成立.

充分性: 令

$$F(x) = \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1, 2\}} [x - (t - [\sqrt{u_1} + (-1)^{j_1} \sqrt{u_2} + \dots + (-1)^{j_{n-1}} \sqrt{u_n}]^2)],$$

可见方程  $F(x) = 0$  的根全是实的. 又  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  与  $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$  只相差正常数因子, 故得

$$\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \dots, \sigma_r \geq 0,$$

于是由引理  $F(x) = 0$  的根全是非负的, 特别的有

$$t - (\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n})^2 \geq 0,$$

即

$$\sqrt{t} - (\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n}) \geq 0,$$

充分性得证.

证毕.

这个定理可以很容易地推广到实函数域上而得到.

**定理 2.** 设  $u_1(X), u_2(X), \dots, u_n(X), t(X) (n \geq 2)$  是定义在一个区域  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m \subseteq R^m$  上的  $m$  元函数, 这里区间  $I_i$  可以是开的、闭的、半开半闭的. 并且在区域  $I$  上有

$$u_1(X) \geq 0, u_2(X) \geq 0, \dots, u_n(X) \geq 0, t(X) \geq 0.$$

记  $y, y_1, y_2, \dots, y_n$  的形式多项式为

$$\begin{aligned} H(y, y_1, y_2, \dots, y_n) &:= \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{1, 2\}} (y - [\sqrt{y_1} + \\ &(-1)^{j_1} \sqrt{y_2} + \dots + (-1)^{j_{n-1}} \sqrt{y_n}]^2) \end{aligned} \quad (8)$$

则如下不等式

$$\sqrt{u_1(X)} + \sqrt{u_2(X)} + \dots + \sqrt{u_n(X)} \leq \sqrt{t(X)} \quad (9)$$

在  $I$  上成立的充分必要条件是: 下列  $r = 2^{n-1}$  个实函数  $c_0(X), c_1(X), \dots, c_{r-1}(X)$  在  $I$  上满足:

$$c_0(X) = H(t(X), u_1(X), \dots, u_n(X)) \geq 0;$$

$$c_1(X) = \frac{\partial H}{\partial y}(t(X), u_1(X), \dots, u_n(X)) \geq 0;$$

...

$$c_{r-1}(X) = \frac{\partial^{r-1} H}{\partial y^{r-1}}(t(X), u_1(X), \dots, u_n(X)) \geq 0,$$

其中  $\frac{\partial^k H}{\partial y^k}$  是  $H$  关于  $y$  的  $k$  阶形式偏导数,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ .

**证明.** 对一个固定的点  $x_0 \in I, c_0(X), c_1(X), \dots,$

$c_{r-1}(X)$ 意义是明确的,由多项式  $f$  与  $H$  的定义显然有

$$\begin{cases} c_0(X_0) = H(t(X_0), u_1(X_0), \dots, u_n(X_0)) \\ \quad = f(t(X_0)); \\ c_1(X_0) = \frac{\partial H}{\partial y}(t(X_0), u_1(X_0), \dots, u_n(X_0)) \\ \quad = f^{(1)}(t(X_0)); \\ \dots \\ c_{r-1}(X_0) = \frac{\partial^{r-1} H}{\partial y^{r-1}}(t(X_0), u_1(X_0), \dots, u_n(X_0)) \\ \quad = f^{(r-1)}(t(X_0)). \end{cases} \quad (10)$$

必要性. 如果

$$\sqrt{u_1(X_0)} + \sqrt{u_2(X_0)} + \dots + \sqrt{u_n(X_0)} \leq \sqrt{t(X_0)} \quad (11)$$

由定理 1 知  $f(t(X_0)) \geq 0$ , 即  $c_0(X_0) \geq 0$ , 又  $X_0$  在  $I$  上是任意的, 故  $c_0(X) \geq 0$  在  $I$  上成立. 同理可证在  $I$  上  $c_1(X) \geq 0, c_2(X) \geq 0, \dots, c_{r-1}(X) \geq 0$  成立.

充分性. 由式(10)和定理 1, 对每个点  $X_0 \in I$ , 式(11)都成立, 故在区域  $I$  上式(9)成立. 证毕.

从定理 1 也可以得到如下推论.

**推论 1.** 设  $u_1, u_2, \dots, u_n, t (n \geq 2)$  是非负的实数, 则如下不等式

$$\sqrt{t} \leq \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \dots + \sqrt{u_n} \quad (12)$$

成立的充分必要条件是下列  $r = 2^{n-1}$  个实数  $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$  满足:

$$c_{r-1} := f^{(r-1)}(t) \leq 0$$

$$\text{或} \quad c_0 := f(t), \dots, c_{r-2} := f^{(r-2)}(t) \quad (13)$$

中至少有一个小于 0. 其中  $f$  由式(2)定义.

推论 1 实际上是定理 1 的逆否形式, 显然成立. 但遗憾的是推论 1 不能直接推广到函数域上, 这也就是为什么本文主要考虑形如式(1)这种类型不等式的原因.

### 3 一般根式不等式的有理化算法

现来讨论一般情况下的根式不等式的有理化方法, 需要如下引理.

**引理 2.** 设  $u_1, u_2, \dots, u_n, t$  是非负的实数,  $2 \leq m, n \in N$ , 记  $\zeta_m = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)i$  是  $m$  次本原单位根, 如果

$$\sqrt[m]{t} \geq \sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n},$$

则对自然数  $p$ , 复数

$$(\sqrt[m]{t})^p = (\zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_2} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_n} \sqrt[m]{u_n})^p, \\ j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, m\}$$

的实部总是非负的.

证明. 使用复数的三角形式, 记

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$u = \cos\left(\frac{2\pi j_1}{m}\right) \sqrt[m]{u_1} + \cos\left(\frac{2\pi j_2}{m}\right) \sqrt[m]{u_2} + \dots +$$

$$\cos\left(\frac{2\pi j_n}{m}\right) \sqrt[m]{u_n},$$

$$v = \sin\left(\frac{2\pi j_1}{m}\right) \sqrt[m]{u_1} + \sin\left(\frac{2\pi j_2}{m}\right) \sqrt[m]{u_2} + \dots +$$

$$\sin\left(\frac{2\pi j_n}{m}\right) \sqrt[m]{u_n},$$

于是存在实数  $\theta$  满足

$$\zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_2} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_n} \sqrt[m]{u_n} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad (14)$$

$$\rho = \left[ (\sqrt[m]{u_1})^2 + (\sqrt[m]{u_2})^2 + \dots + (\sqrt[m]{u_n})^2 + \right.$$

$$\left. 2 \sum_{1 \leq l < k \leq n} \cos\left(\frac{2\pi(j_l - j_k)}{m}\right) \sqrt[m]{u_l} \sqrt[m]{u_k} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[ (\sqrt[m]{u_1})^2 + (\sqrt[m]{u_2})^2 + \dots + (\sqrt[m]{u_n})^2 + \right.$$

$$\left. 2 \sum_{1 \leq l < k \leq n} \sqrt[m]{u_l} \sqrt[m]{u_k} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n},$$

于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}([\rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^p) \\ = \rho^p \cos(p\theta) \\ \leq (\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n})^p \leq (\sqrt[m]{t})^p \end{aligned} \quad (15)$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((\sqrt[m]{t})^p - (\zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_2} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_n} \sqrt[m]{u_n})^p) = \\ (\sqrt[m]{t})^p - \operatorname{Re}([\rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^p) \geq 0. \end{aligned}$$

**定理 3.** 设  $u_1, u_2, \dots, u_n, t$  是非负的实数,  $2 \leq m, n \in N$ , 记  $y$  的多项式  $f(y)$  为

$$f(y) := \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (y - [\sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_{n-1}} \sqrt[m]{u_n}]^m) \quad (16)$$

则如下不等式

$$\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n} \leq \sqrt[m]{t} \quad (17)$$

成立的充分必要条件是下列  $r = m^{n-1}$  个实数  $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$  满足:

$$\begin{aligned} c_0 := f(t) \geq 0, \quad c_1 := f^{(1)}(t) \geq 0, \dots, \\ c_{r-1} := f^{(r-1)}(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $f^{(k)}$  是  $f$  的  $k$  阶导数,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ .

证明. 显见  $f(y)$  是  $m$  次单位根  $\zeta_m, \zeta_m^2, \dots,$

$\zeta_m^{m-1}$  的对称多项式, 由对称多项式基本定理  $f(y)$  展开后可化简为有理系数的多项式, 故  $f(t) \geq 0, \dots, f^{(r-1)}(t) \geq 0$  等是有意义的 (不是虚数).

必要性. 记

$$q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, y) := (y - [\sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_{n-1}} \sqrt[m]{u_n}]^m) \quad (19)$$

进一步记

$$\begin{aligned} Q_1(y) &:= q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, y) \cdot \\ &\quad q(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1}, y); \\ Q_2(y) &:= q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, y) + \\ &\quad q(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1}, y); \end{aligned}$$

$Q_1(y), Q_2(y)$  有如下很好的性质:

$$(i) \quad Q_1(t) \geq 0, Q_2(t) \geq 0;$$

$$(ii) \quad \frac{d(Q_1(y))}{dy} = Q_2(y).$$

(i) 成立是因为: 若  $q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, t)$  是实数, 则由引理 2, 取  $p=m$  即知  $q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, t), q(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1}, t)$ , 都是非负实数, 故它们的积与和仍是非负的.

若  $q(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, t)$  是虚数, 则显然  $q(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1}, t)$  是它的复共轭, 故  $Q_1(t), Q_2(t)$  都是实数, 同样由引理 2 知  $Q_1(t) \geq 0, Q_2(t) \geq 0$ .

(ii) 直接对  $y$  求导即得.

另外将数组  $(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$  换为  $(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1})$  后  $Q_1(y)$  与  $Q_2(y)$  的值保持不变. 于是我们可以在对  $Q_1(y)$  与  $Q_2(y)$  求和或求积时将数组  $(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$  与  $(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1})$  视为等同. 这样可将  $f(y)$  写为

$$f(y) = q(0, \dots, 0, y) \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} Q_1(y), (m \text{ 为奇数}) \quad (20)$$

$$f(y) = q(0, \dots, 0, y) q(m/2, \dots, m/2, y) \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} Q_1(y), (m \text{ 为偶数}) \quad (21)$$

其中求积符号  $\prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ , 对  $j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  不全为 0, 也不全为  $\frac{m}{2}$  ( $m$  为偶数), 并将

$(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$  与  $(m-j_1, m-j_2, \dots, m-j_{n-1})$  视为等同.

这样从式(20), (21)由性质(i)立得  $c_0 = f(t) \geq 0$ .

由乘积的导数公式, 从式(20), (21)利用性质(ii)可见  $f^{(k)}(y)$  ( $k=1, 2, \dots, r-1$ ) 恰是一系列  $Q_1(y)$  与  $Q_2(y)$  乘积的非负线性组合, 再由性质(i)立得  $c_k = f^{(k)}(t) \geq 0$  ( $k=1, 2, \dots, r-1$ ).

必要性成立.

充分性. 令

$$\begin{aligned} F(x) &:= \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (x - [\sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_{n-1}} \sqrt[m]{u_n}]^m]) \\ &\equiv x^r - \sigma_1 x^{r-1} + \dots + \sigma_r \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\sigma_k$  ( $k=1, 2, \dots, r$ ) 是  $t - (\sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_{n-1}} \sqrt[m]{u_n})^m$  的初等对称多项式;  $j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

由  $f(y)$  与  $F(x)$  的定义易见  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  与  $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$  只相差正常数因子, 因  $c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, \dots, c_{r-1} \geq 0$  故  $\sigma_1 \geq 0, \dots, \sigma_r \geq 0$ .

于是由 Descartes 符号法则,  $F(x)$  的实根全是非负的, 特别的有

$$t - (\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n})^m \geq 0,$$

即

$$\sqrt[m]{t} - (\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n}) \geq 0.$$

充分性得证.

证毕.

同样, 定理 3 也可以推广到函数域上, 由于过程简单不再详述.

虽然, 定理 3 完全是构造性的, 相应算法也很简单, 但是如果直接展开形式多项式  $f$  整理为不含虚数单位  $i$  的式子, 却是很麻烦的, 所以有必要寻求  $f$  另外的计算方法. 由于  $f$  的表达式相当奇特, 它类似于 Sylvester 结式的计算公式, 和结式公式作比较, 我们确实找到了  $f$  新的计算方法. 关于 Sylvester 结式的定义是熟知的, 可参考文献[6-7], 我们还需要结式的如下结果.

**引理 3**<sup>[6-7]</sup>. 两个多项式  $g(x) = a_0(x-x_1) \cdots (x-x_n), h(x) = b_0(x-y_1) \cdots (x-y_m)$  的 Sylvester 结式记为  $\text{res}(g, h, x)$ , 则有

$$\text{res}(g, h, x) = a_0^m \prod_{i=1}^n h(x_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^m g(y_j).$$

**定理 4.** 记

$$\begin{cases} h_1 := u_1 - U_1^m, \\ h_2 := u_2 - U_2^m, \\ \dots \\ h_n := u_n - U_n^m, \\ H := \sqrt[m]{t} - U_1 - U_2 - \dots - U_n. \end{cases} \quad (23)$$

再依次作结式, 令

$$\begin{aligned} r_n &= \text{res}(H, h_n, U_n), \\ r_{n-1} &= \text{res}(r_n, h_{n-1}, U_{n-1}), \\ &\dots \\ r_1 &= \text{res}(r_2, h_1, U_1). \end{aligned} \quad (24)$$

则

$$r_1 = (-1)^{mn} f(t) \quad (25)$$

其中

$$f(t) := \prod_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \in \{0, 1, \dots, m-1\}} (t - [\sqrt[m]{u_1} + \zeta_m^{j_1} \sqrt[m]{u_2} + \dots + \zeta_m^{j_{n-1}} \sqrt[m]{u_n}]^m).$$

证明. 反复使用引理 3 的结式计算公式以及如下乘积公式即可.

$$a^m - b^m = \prod_{i=1}^m (a - \zeta_m^i b).$$

利用定理 3, 4 我们获得了如下根式不等式的有理化算法.

#### 算法 1. RFD.

输入根指数  $m$  和非负变元  $u_1, u_2, \dots, u_n, t$

输出与根式不等式

$$\sqrt[m]{u_1} + \sqrt[m]{u_2} + \dots + \sqrt[m]{u_n} \leq \sqrt[m]{t}$$

等价的多项式不等式组

1. 对  $h_1, h_2, \dots, h_n, H$  按式(23)赋值.
2. 按式(24)顺序, 依次计算结式  $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$ .
3. 令  $c_0 := (-1)^{mn} r_1$ , 计算  $c_0$  对变元  $t$  直到  $k-1 = m^{n-1} - 1$  阶导数, 并依次记这些导数为  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ .
4. 输出  $c_0 \geq 0, c_1 \geq 0, \dots, c_{k-1} \geq 0$ , 程序结束.

我们根据这个算法在 Maple 平台上编程实现了 RFD. 下面是一些算出的常用结果.

**结论 1.** 设  $u, v, t$  是给定区域  $I$  上的非负实函数, 则如下不等式

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{t} \quad (26)$$

成立的充分必要条件是  $c_0, c_1$  在给定区域  $I$  上满足

$$\begin{cases} c_0 = t^2 - 2(u+v)t + (u-v)^2 \geq 0 \\ c_1 = t - u - v \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

**结论 2.** 设  $u, v, w, t$  是给定区域  $I$  上的非负实函数, 则如下不等式

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} \leq \sqrt{t} \quad (28)$$

成立的充分必要条件是下列  $c_0, c_1, c_2, c_3$  在给定区域  $I$  上满足:

$$\begin{cases} c_0 = t^4 - 4\sigma_1 t^3 + 2(3\sigma_1^2 - 4\sigma_2) t^2 - 4(\sigma_1^3 - 4\sigma_2 \sigma_1 + 16\sigma_3) t + (\sigma_1^2 - 4\sigma_2)^2 \geq 0 \\ c_1 = t^3 - 3\sigma_1 t^2 + (3\sigma_1^2 - 4\sigma_2) t - (\sigma_1^3 - 4\sigma_2 \sigma_1 + 16\sigma_3) \geq 0 \\ c_2 = 3t^2 - 6\sigma_1 t + (3\sigma_1^2 - 4\sigma_2) \geq 0 \\ c_3 = t - \sigma_1 \end{cases} \quad (29)$$

其中,  $\sigma_1 = u+v+w, \sigma_2 = uv+vw+wu, \sigma_3 = uvw$ .

**结论 3.** 设  $u, v, t$  是给定区域  $I$  上的非负实函

数, 则如下不等式

$$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \leq \sqrt[3]{t} \quad (30)$$

成立的充分必要条件是下列  $c_0, c_1, c_2$  在给定区域  $I$  上满足:

$$\begin{cases} c_0 = t^3 - 3(u+v)t^2 + (3u+3v-21uv)t - (u+v)^3 \geq 0 \\ c_1 = t^2 - 2(u+v)t + u^2 + v^2 - 7uv \geq 0 \\ c_2 = t - u - v \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

**结论 4.** 设  $u, v, t$  是给定区域  $I$  上的非负实函数, 则如下不等式

$$\sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{v} \leq \sqrt[4]{t} \quad (32)$$

成立的充分必要条件是下列  $c_0, c_1, c_2, c_3$  在给定区域  $I$  上满足:

$$\begin{cases} c_0 = t^4 - 4(u+v)t^3 + (6u^2 - 124uv + 6v^2)t^2 - 4(u+v)(u^2 + 30uv + v^2)t + (u-v)^4 \geq 0 \\ c_1 = t^3 - 3(u+v)t^2 + (3u^2 + 3v^2 - 62uv)t - 31u^2v - v^3 - u^3 - 31uv^2 \geq 0 \\ c_2 = 3t^2 - 6(u+v)t + 3v^2 - 62uv + 3u^2 \geq 0 \\ c_3 = t - u - v \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

对一般情况形如式(1)的根式, 可以归结为定理 3 的情形. 这只需要做个变形就可以了,

$$\sqrt[m_1]{u_1} + \sqrt[m_2]{u_2} + \dots + \sqrt[m_n]{u_n} \leq \sqrt[m]{t}$$

等价于

$$\sqrt[d]{u_1^{d/m_1}} + \sqrt[d]{u_2^{d/m_2}} + \dots + \sqrt[d]{u_n^{d/m_n}} \leq \sqrt[d]{t^{d/m}}.$$

其中  $d$  是  $m_1, m_2, \dots, m_n, m$  的最小公倍数.

到此, 有理化步骤就算完成了.

## 4 应用实例

下面介绍处理多项式型不等式的所谓差分代换方法.

这种方法起源已不可考证, 关于差分代换最近的一些发展和应用可见杨路的文章<sup>[8]</sup>. 下举一例, 简单说明差分代换的具体使用过程.

**例 1.**  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , 证明  $(a^2 + ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq (ab - bc - ca)^3$ .

证明. 3 个变元一共有  $6(=3!)$  个序, 它们是

$$x \geq y \geq z, x \geq z \geq y, y \geq x \geq z,$$

$$y \geq z \geq x, z \geq x \geq y, z \geq y \geq x.$$

先取第一个序  $x \geq y \geq z$ , 作代换

$$\begin{cases} a = t_1 \\ b = t_1 + t_2 \\ c = t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} \quad (34)$$

其中  $t_1, t_2, t_3 \in R^+$ , 上式代入  $(a^2 + ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq (ab - bc - ca)^3$  展开整理为

$$\begin{aligned} &6t_1^6 + 45t_1^3t_2^2t_3 + 23t_1^3t_2t_3^2 + 66t_1^2t_2^3t_3 + \\ &42t_1^2t_2^2t_3^2 + 30t_1t_2^4t_3 + 26t_1t_2^3t_3^2 + 9t_1^2t_3^3t_2 + \\ &9t_1t_3^3t_2^2 + 12t_1^5t_2 + 6t_1^5t_3 + 15t_1^4t_2^2 + 7t_1^4t_3^2 + \\ &30t_1^3t_2^3 + 33t_1^2t_2^4 + 12t_1t_2^5 + 4t_1^3t_3^3 + \\ &t_2^4t_3^2 + 2t_2^3t_3^3 + t_3^4t_1^2 + t_3^3t_2^2 + 15t_1^4t_2t_3 + t_3^4t_1t_2 \end{aligned} \quad (35)$$

显见式(35)每一单项前的系数都是正的, 故在序  $x \geq y \geq z$  下, 原不等式成立.

完全类似的处理其余的序, 便证得原不等式成立.

如果使用差分代换的程序 sds 来做这个题目, 机器用时 0.093s 就出来了. 由本文第二作者编写的计算机程序 tsds2, 不但能证明代数不等式, 对不成立的不等式还能自动输出反例. 其应用和源程序可到如下网址下载: <http://www.irgoc.org/bbs/disppbbs.asp?boardID=12&ID=2685&page=1>.

下面开始将 RFD 和 sds 联合应用于一类几何不等式的机器证明. 基本思想是将几何不等式转化为等价的代数不等式, 为此还需要一个翻译表.

三角形的几何不变量(可扩充):

$a, b, c$	三角形的三边长	$a = x + y, b = y + z, c = z + x$
$s$	半周长	$s = x + y + z$
$x, y, z$	非负实数	$x = s - a, y = s - b, z = s - c$
$S$	三角形面积	$S = \sqrt{(x + y + z)xyz}$
$R$	外接圆半径	$R = \sqrt{\frac{(y + z)^2(z + x)^2(y + x)^2}{16(x + y + z)xyz}}$
$r$	内切圆半径	$r = \sqrt{\frac{(x + y + z)xyz}{(x + y + z)^2}}$
$r_a, r_b, r_c$	旁切圆半径	$r_a = \sqrt{\frac{(x + y + z)yz}{x}}$ ( $r_b, r_c$ 可由 $r_a$ 对 $x, y, z$ 轮换得到)
$h_a, h_b, h_c$	高	$h_a = \sqrt{\frac{4(x + y + z)xyz}{(y + z)^2}}$
$m_a, m_b, m_c$	中线	$m_a = \sqrt{\frac{4x^2 + y^2 + z^2 + 4zx + 4yx - 2yz}{2}}$
$w_a, w_b, w_c$	内角平分线	$w_a = \sqrt{\frac{4(z + x)(y + x)(x + y + z)x}{(2x + y + z)^2}}$
$\sin(A), \sin(B), \sin(C)$	内角的正弦值	$\sin(A) = \sqrt{\frac{4(x + y + z)xyz}{(x + y)^2(x + z)^2}}$
$\cos(A), \cos(B), \cos(C)$	内角的余弦值	$\cos(A) = \frac{x^2 + x(y + z) - yz}{(x + y)(x + z)}$
$\sin\left(\frac{A}{2}\right), \sin\left(\frac{B}{2}\right), \sin\left(\frac{C}{2}\right)$	半角正弦值	$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{yz}{(x + y)(x + z)}}$
$\cos\left(\frac{A}{2}\right), \cos\left(\frac{B}{2}\right), \cos\left(\frac{C}{2}\right)$	半角余弦值	$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(x + y + z)x}{(x + y)(x + z)}}$

**例 2.** 证明不等式:  $h_a + w_b + m_c \leq 3(R + r)$ .

证明. 第 1 步: 令

$$\begin{aligned} u &= h_a^2 = \frac{4(x + y + z)xyz}{(y + z)^2}; \\ v &= w_b^2 = \frac{4y(x + y)(y + z)(x + y + z)}{(2y + x + z)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= m_c^2 = \frac{(x^2 - 2xy + y^2 + 4zx + 4yz + 4z^2)}{4}; \\ t &= (3(R + r))^2 = \frac{9(6zxy + y^2z + x^2y + xy^2 + z^2x + z^2y + zx^2)^2}{16(x + y + z)xyz}. \end{aligned}$$

这样问题就变成了:证明 $\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\leq\sqrt{t}$ .

第 2 步:应用上一节的结论 2.

将上面  $u, v, w, t$  的表达式(它们都是  $x, y, z$  的有理函数)代入  $c_0, c_1, c_2, c_3$  得到 4 个有理函数;再去掉它们的分母(因为这些分母都是正的)得到 4 个关于  $x, y, z$  的多项式,设为  $p_0, p_1, p_2, p_3$ ;调用程序  $sds$ ,计算  $sds(p_0), sds(p_1), sds(p_2), sds(p_3)$ ;输出的结果都是: The form is positive semi-definite, 即这 4 个多项式都是非负的. 故原不等式得证.

我们在 Maple 平台上编写了程序 RFDSDS,实现了这类不等式的自动证明. 下面的例都是经过 RFDSDS 自动验证过的几何不等式.

例 3.  $am_a+bm_b+cm_c\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}(w_a^2+w_b^2+w_c^2).$

例 4.  $h_a+w_b+m_c\leq\sqrt{3}s.$

例 5.  $\frac{s-a}{w_a}+\frac{s-b}{w_b}+\frac{s-c}{w_c}\leq\sqrt{3}.$

例 6.  $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

例 7.  $\frac{4}{9}(w_a+w_b+w_c)\leq w_a+\frac{a^2}{4w_a}.$

例 8.  $\frac{w_a w_b}{bc}+\frac{w_c w_b}{ac}+\frac{w_a w_c}{ba}\leq\frac{9}{4}.$

例 9.  $\frac{w_a}{b+c}+\frac{w_b}{a+c}+\frac{w_c}{b+a}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}.$

例 10.  $\frac{w_a}{\sqrt{bc}}+\frac{w_b}{\sqrt{ac}}+\frac{w_c}{\sqrt{ba}}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

例 11.  $\frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}\leq\frac{9\sqrt{3}R}{2s}.$

例 12.  $m_a b+m_b c+m_c a\leq\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{2}.$

例 13.  $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\leq\frac{3\sqrt{3}s}{(h_a^2+h_b^2+h_c^2)}.$

例 14.  $w_a^2\sin\left(\frac{A}{2}\right)+w_b^2\sin\left(\frac{B}{2}\right)+w_c^2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\leq$

$\frac{3\sqrt{3}s}{2}.$

例 15.  $2\sqrt{3}(w_a+w_b+w_c)\leq9\left(\frac{3a}{4}+\frac{w_a^2}{3a}\right).$

例 16.  $\frac{h_b}{m_c}+\frac{h_c}{m_a}+\frac{h_a}{m_b}\leq3.$

例 17.  $w_a+w_b+w_c\leq\sqrt{3}s.$

例 18.  $h_a+h_b+h_c\leq2R+5r$

例 19.  $\frac{8h_a^3}{7}+\frac{8h_b^3}{7}+\frac{8h_c^3}{7}\leq a^3+b^3+c^3.$

例 20.  $\frac{ar_a}{a+b}+\frac{br_b}{c+b}+\frac{cr_c}{a+c}\leq4R-\frac{7r}{2}.$

例 21.  $\frac{h_a}{\cos(A)+\cos(B)}+\frac{h_b}{\cos(C)+\cos(B)}+\frac{h_c}{\cos(A)+\cos(C)}\leq6R-3r.$

例 22.  $\frac{a^2}{w_a}+\frac{b^2}{w_b}+\frac{c^2}{w_c}\leq\frac{\sqrt{2}s^2}{2r}+12r-\frac{27\sqrt{2}}{2r}.$

这些例子主要有两个来源,文献[9-14]和互联网站 <http://www.mathlinks> 与 <http://www.irgoc.org/bbs/>. 由于数量比较大,就不一一指出作者了,在此对这些不等式的作者表示衷心的感谢. 我们实际测试的例子有 100 多个,这里列出的都是有代表性的. 下面是程序 RFDSDS 与程序 Bottema<sup>[3-4]</sup>分别对上述 21 个例的测试时间(用的是同一台 P4, 2.4GHz 微机)如表 1 所示.

表 1 21 个例子的测试时间

	RFDSDS 测试时间/s	Bottema 测试时间/s
例 2	0.765	109.486
例 3	15.023	31.938
例 4	5.953	7.735
例 5	0.093	105.842
例 6	0.734	410.343
例 7	14.766	165.720
例 8	1.906	63.563
例 9	12.172	118.813
例 10	0.672	11.485
例 11	0.641	33.125
例 12	0.094	42.063
例 13	12.125	62.093
例 14	6.719	149.766
例 15	8.484	6716.685
例 16	6.719	2984.127
例 17	1.343	57.187
例 18	6.422	0.032
例 19	15.921	0.218
例 20	19.375	0.469
例 21	25.188	0.689
例 22	227.859	49.094

5 结束语

- (1) 本文提供的证明根式不等式的方法是可以并行计算的,因而解决问题的能力可以进一步提高.
- (2) 根据本文的方法编写的完全自动化根式不等式验证程序 RFDSDS,对关于三角形几何量的不等式非常高效.
- (3) 对于反方向的根式型不等式,推论 1 可以解决部分问题,但其在函数域上的推广有待进一步

研究.

(4) 对上面给出的这些例子,从比较表可以看出,有一部分传统方法较好,而另一部分本文方法较好.但是本文的方法不是一个完备的判定算法;它是一个试探性(heuristic)的方法,不能直接用于带约束条件的或含多重根式的不等式,大多数情况下也不能直接处理反方向的根式型不等式.因此本文的方法及程序不能代替文献[4]中完备的判定算法及 Bottema 软件.

**致 谢** 感谢杨路教授为本项研究提供了基本思想和基本素材以及悉心的研究指导.感谢审稿人提出的有益建议!

参 考 文 献

[1] Buchberger B, Collins G E, Kutzler B. Algebraic method for geometric reasoning. *Annual Review of Computer Science*, 1988, 3: 85-119

[2] Wu W-T. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. *Journal of Systems Science and Mathematical Science*, 1984, 4(3): 207-235

[3] Yang L, Zhang J. A Practical program of automated proving for a class of geometric inequalities//Richter-Gebert J, Wand D eds. *Proceedings of the Automated Deduction in Geometry*. LNAI 2061. Berlin: Springer-Verlag, 2001: 41-57

[4] Yang Lu, Xia Shi-Hong. Automated proving for a class of constructive geometric inequalities. *Chinese Journal of Computers*, 2003, 26(7): 769-778(in Chinese)  
(杨路,夏时洪. 一类构造性几何不等式的机器证明. *计算机学报*, 2003, 26(7): 769-778)

[5] Yang Lu, Zhang Jing-Zhong, Hou Xiao-Rong. Nonlinear Al-

gebraic Equation System and Automated Theorem Proving. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996: 141-144(in Chinese)  
(杨路,张景中,侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明. 上海: 上海科技教育出版社, 1996: 141-144)

[6] Cox D, Little J, O'Shea D. *Using algebraic geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998: 71-76

[7] Zhang Xian-Ke, Xu Pu-Hua. *Advance Algebra* (2nd Edition). Beijing: Tusinghua University Press, 2004: 86-89(in Chinese)  
(张贤科, 许甫华编著. 高等代数学(第2版). 北京: 清华大学出版社, 2004: 86-89)

[8] Yang L. Solving harder problems with lesser mathematics// *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics*. ATCM Inc, 2005: 37-46

[9] Bottema O et al. *Geometric Inequalities*. Groningen, Netherland: Wolters-Noordhoff Publishing, 1969

[10] Liu Bao-Qian. *BOTTEMA, What We See*. Lasha: Tibet People's Publishing House, 2003(in Chinese)  
(刘保乾. BOTTEMA, 我们看见了什么. 拉萨: 西藏人民出版社, 2003)

[11] Kuang Ji-Chang. *Applied Inequalities* (3rd Edition). Changsha: Hunan Educational Publishing House, 2004(in Chinese)  
(匡继昌. 常用不等式(第3版). 长沙: 湖南教育出版社, 2004)

[12] Collins G E, Hong H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. *Journal of Symbolic Computation*, 1991, 12(3): 299-328

[13] Yang L, Xia S H. An inequality-proving program applied to global optimization//Yang W C et al eds. *Proceedings of the Asian Technology conference in Mathematics*. Blacksburg: ATCM, Inc., 2000: 41-57

[14] Shan Dun. *Geometric Inequality in China*. Nangjing: Jiangsu Educational Publishing House, 1996(in Chinese)  
(单遵. 几何不等式在中国. 南京: 江苏教育出版社, 1996)



**XU Jia**, born in 1981, Ph. D. candidate. Her research interests include automated theorem proving, symbolic computation, and optimization algorithms.

**YAO Yong**, born in 1974. His major research interests include automated theorem proving and symbolic computation.

Background

This work is supported by the National Basic Research Program of China (973 Program) under grant No. 2004CB318003, which title is "The High Performance Algorithms in Real Geometry and Real Algebra". This paper develops a theory which aims at transforming a class of inequalities involving radicals to a set of rational inequalities, and also presents an algorithm which can efficiently prove an extensive class of ge-

ometric inequalities involving radicals. The authors' research is based on rationalization of radical expressions of index 2, which is solved by Yang Lu on the webpage: <http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardID=4&ID=12&page=1>. If you are interested in automated reasoning, please see about the references.