

循环 ALCN-Tbox 具有模型的条件

曹发生^{1),3)} 余 泉^{2),3)} 王 驹⁴⁾ 蒋运承⁴⁾

¹⁾(毕节学院逻辑与应用逻辑研究所 贵州 毕节 551700)

²⁾(黔南民族师范学院数学系 贵州 都匀 558000)

³⁾(广西师范大学数学科学学院 广西 桂林 541004)

⁴⁾(广西师范大学计算机科学与信息工程学院 广西 桂林 541004)

摘 要 分析了带循环定义的描述逻辑系统 ALCN 的研究现状和存在的问题,研究了循环 ALCN-Tbox 具有模型的条件,指出了 Baader 文中命题 2.9(Let T be a terminology such that each cycle in G_T contains an even number of negative arcs. Then T is monotone)的错误,并对该命题进行了修改,给出了循环 ALCN-Tbox 具有不动点模型(最小不动点模型和最大不动点模型)的条件.

关键词 循环 ALCN-Tbox; name symbol; 最小不动点模型; 最大不动点模型; Tbox 单调
中图法分类号 TP301

Condition of Cyclic ALCN-Tbox Exists Model

CAO Fa-Sheng^{1),3)} YU Quan^{2),3)} WANG Ju⁴⁾ JIANG Yun-Cheng⁴⁾

¹⁾(Institute of Logic and Applied Logic, Bijie College, Bijie, Guizhou 551700)

²⁾(Department of Mathematics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun, Guizhou 558000)

³⁾(College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004)

⁴⁾(College of Computer Science and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi 541004)

Abstract The current research progresses and the existing problems of description logic system ALCN with terminological cycles are analyzed in this paper. The condition of cyclic ALCN-Tbox exists model is studied. The mistake of proposition 2.9 in the paper published by Baader in 2003 (Let T be a terminology such that each cycle in G_T contains an even number of negative arcs. Then T is monotone) is pointed out, also some modification of proposition 2.9 is given. The condition of cyclic ALCN-Tbox exists fixpoint models (lfp-model and gfp-model) is given.

Keywords cyclic ALCN-Tbox; name symbol; lfp-model; gfp-model; Tbox monotone

1 引 言

描述逻辑是一种基于对象的知识表示的形式化工具,是一阶谓词逻辑的一个可判定子集.描述逻辑的重要特征是它具有很强的表达能力和可判定性,在众多知识表示的形式化方法中,描述逻辑在十多

年来受到人们的特别关注,近年来描述逻辑已成为计算机科学和人工智能的研究热点.

描述逻辑中的循环定义是描述逻辑长期以来的研究难点^[2-3],其中描述逻辑循环定义这样最基本的问题(即语义及其推理机制问题)都没有得到很好的解决,甚至在已给出的描述逻辑循环定义的研究结果中存在错误.例如,文献[1]关于描述逻辑循环定

义的一个重要结果(即命题 2.9)就是错误的.

由于描述逻辑循环定义最基本的理论问题没有得到很好的解决,因此在目前已实现的描述逻辑推理系统(如 Pellet、FaCT++、Racer 等)中都给出了强制规定:描述逻辑知识库的 Tbox 中不允许出现循环定义.但在描述逻辑的许多实际应用中(如医学领域),循环定义是不可避免的^[4-6].同时,循环定义能够方便用户建立描述逻辑知识库,并使所表示的知识或公理符合人们的直觉,如果没有循环定义,则只能用非循环定义来描述相应的循环定义,这样会使知识库变得非常复杂,用户也很难理解(这一点类似于程序设计中的递归程序设计方法)^[5,7].因此,无论从理论上还是应用上讲,研究描述逻辑中的循环定义都非常有意义.

Nebel 最早研究了循环定义的语义问题,提出了循环定义的 3 种语义表示:描述语义、最小不动点语义和最大不动点语义^[7].对于这 3 种语义,自从提出到现在都存在争议,Baader 认为最大不动点语义是循环定义最合适的语义解释方法^[8],并针对非常小的描述逻辑 FL_0 ,用有限状态自动机统一描述了循环定义的 3 种语义^[6].Nebel 对循环定义的 3 种语义进行了比较,认为描述语义是循环定义最合适的语义解释方法^[5].但大部分学者认为这 3 种语义的选择取决于所定义的概念,Giacomo 认为描述语义不适合解释递归概念,最小不动点语义适合解释归纳定义的概念,而最大不动点语义适合解释 non-well-founded 或 co-inductive 结构的概念,并指出带循环定义的描述逻辑系统中不应该只选择某一种语义,而应该是 3 种语义共存,提出了一种允许 3 种语义共存的描述逻辑概念定义方法^[2].

但是由于文献[1]中命题 2.9 的错误说明,带有

循环定义的 Tbox 是否存在模型,或者什么条件下存在模型,该问题目前还没有得到很好的解决,这给应用方面带来很大的影响,即得不到理论的保证.下面我们将指出文献[1]的命题 2.9 的错误,并且进行改进,寻找带有循环定义的 Tbox 有模型的条件.

2 预备知识

2.1 描述逻辑 ALCN

ALCN 的语法及语义如下:

(1) 字母表

① 个体变元:用 x, y, z, \dots 或者 x_1, x_2, x_3, \dots 表示;

② 常项变元:用 a, b, c, \dots 或者 c_1, c_2, c_3, \dots 表示;

③ 一元谓词:用 A, B, C, \dots 或者 A_1, A_2, A_3, \dots 表示;二元谓词:用 R, S, T, \dots 或者 R_1, R_2, R_3, \dots 表示.

说明:其中个体变元和常项变元都表示个体,一元谓词表示概念,二元谓词用以角色(即关系),在描述逻辑 ALCN 中没有函词.

(2) 公式的生成

① 任一——元谓词 A 是一合式公式;

② 若 B, C 是合式公式,则 $B \sqcap C, B \sqcup C, \neg C, \forall R.C, \exists R.C, \geq nR, \leq nR$ 是合式公式;

③ 仅由①和②定义得到的字符串是合式公式.

(3) 语义

描述逻辑 ALCN 的模型 M 包括一个解释函数, I 和一个非空的集合 Δ^I (解释论域). I 把每个原子概念 A 对应为 $A^I \subseteq \Delta^I$,把每个原子角色 R 对应为二元关系 $R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$,具体的解释如表 1.

表 1 ALCN 的语法和语义

逻辑连接词	语法	语义	例子
原子概念	A	$A^I \subseteq \Delta^I$	man
原子关系	R	$R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$	has-father
顶部	\top	Δ^I	True
底部	\perp	\emptyset	False
交	$C \sqcap D$	$C^I \cap D^I$	human \sqcap child
并	$C \sqcup D$	$C^I \cup D^I$	doctor \sqcup lawyer
非	$\neg C$	$\Delta^I - C^I$	\neg male
存在量词	$\exists R.C$	$\{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in C^I\}$	\exists has-child.female
全称量词	$\forall R.C$	$\{x \mid \forall y. \langle x, y \rangle \in R^I \rightarrow y \in C^I\}$	\forall has-child.female
大于等于约束	$\geq nR$	$\{a \in \Delta^I \mid \ \{b \mid \langle a, b \rangle \in R^I\}\ \geq n\}$	≥ 3 has-child
小于等于约束	$\leq nR$	$\{a \in \Delta^I \mid \ \{b \mid \langle a, b \rangle \in R^I\}\ \leq n\}$	≤ 3 has-child

2.2 循环的 ALCN

定义 1. 假设 A, B 是 Tbox T 中出现的两个

原子概念,如果 B 出现在关于 A 描述的右边,则称概念 A 直接引用概念 B ,此时我们说 $\langle A, B \rangle$ 具有直

接引用关系 \sqsubset .

定义 2. 如果在一个 Tbox 中存在概念 A_1, A_2, \dots, A_m , 使得 $\langle A_1, A_2 \rangle, \langle A_2, A_3 \rangle, \dots, \langle A_{m-1}, A_m \rangle$ 都属于直接引用关系 \sqsubset , 则称它们构成一个直接引用链, 如果还满足 $A_m = A_1$, 则说这个 Tbox T 中有循环出现, 否则称 T 是没有循环出现的.

定义 3. 如果一个解释只解释 Tbox 中的 base symbol, 则称该解释为基解释, 记为 J .

如果一个描述逻辑 ALCN 的 Tbox 中没有出现循环, 则对 Tbox 的基解释 J 有唯一扩张, 并且这个扩张是 Tbox 的模型; 如果在这个 Tbox 中出现了循环, 则关于 Tbox 的基解释 J 的扩张不唯一, 假设所有扩张组成的集合为

$$EXT_J = \{I_i \mid I_i \text{ 是 } J \text{ 的扩展}, i=1, 2, \dots\},$$

在这些扩张中有可能有 Tbox 的模型, 也可能没有.

定义 4. EXT_J 中的任意两个元素 I_i 与 I_j , $I_i \leq I_j$ 当且仅当对 Tbox 中的任意概念 A , 都有 $I_i(A) \subseteq I_j(A)$ 成立.

注 1. 为了方便, 下面对 $I(A)$ 和 A^I 不加区别, 它们都表示解释 I 对概念 A 的解释.

定义 5. 把 T 看成为 Tbox 中的 name symbol 到概念描述的映射, 即对于 Tbox 中的任意 name symbol C , 都有一概念描述 $T(C)$ 与之对应, EXT_J 到自身的映射 T_J 定义为: 对 Tbox 中的任意 name symbol A , $(T_J(I))(A) = I(T(A))$.

根据不动点的定义可知, I 是 T_J 的不动点当且仅当 $T_J(I) = I$, 当且仅当对于任意的 name symbol A , 有 $(T_J(I))(A) = I(A)$, 又因为 $(T_J(I))(A) = I(T(A))$, 所以有 $I(A) = I(T(A))$, 即当 I 是 T_J 的不动点时, I 是 Tbox 的模型. 从而我们知道, 要找循环的 Tbox 的模型, 实际上只需要找到在它的基解释的所有扩张上所定义的映射 T_J 的不动点即可, 因为对于所固定的基解释上所得到的所有扩张我们总可以做到使之成为一个完备格, 根据 Tarski 不动点定理(任何完备格上的单调映射至少存在一个不动点), 我们知道, 只要所定义的 T_J 单调, Tbox 就存在模型.

定义 6. 如果一个 Tbox 任意固定的基解释 J , 都有 EXT_J 上定义的 T_J 单调, 则称这个 Tbox T 单调.

命题 1. 假设 C, D 是 T 中的概念的合式公式, R 为 base symbol 则

$$(1) \neg\neg A \equiv A.$$

$$(2) \neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D, \neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D.$$

$$(3) \neg \forall R.C \equiv \exists R. \neg C, \neg \exists R.C \equiv \forall R. \neg C.$$

证明. (1) 对任意一个解释 I , $(\neg\neg A)^I = \Delta^I \setminus (\Delta^I \setminus A^I) = A^I$, 故 $\neg\neg A \equiv A$;

(2) 对任意一个解释 I , 由于 $(\neg(C \sqcup D))^I = \Delta^I \setminus (C \sqcup D)^I = (\Delta^I \setminus C^I) \cap (\Delta^I \setminus D^I) = (\neg C)^I \cap (\neg D)^I = (\neg C \sqcap \neg D)^I$, 所以, $\neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D$.

由于 $(\neg(C \sqcap D))^I = \Delta^I \setminus (C \sqcap D)^I = (\Delta^I \setminus C^I) \cup (\Delta^I \setminus D^I) = (\neg C)^I \cup (\neg D)^I = (\neg C \sqcup \neg D)^I$, 所以, $\neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D$.

(3) $(\neg \forall R.C)^I = \Delta^I \setminus (\forall R.C)^I = \Delta^I \setminus \{x \mid \forall y. \langle x, y \rangle \in R^I \rightarrow y \in C^I\} = \{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in \Delta^I \setminus C^I\} = \{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in (\neg C)^I\} = (\exists R. \neg C)^I$, 所以, $\neg \forall R.C \equiv \exists R. \neg C$.

同理可证 $\neg \exists R.C \equiv \forall R. \neg C$.

证毕.

命题 2. (1) 若 $A \equiv B$, 则 $\forall R.A \equiv \forall R.B$, $\exists R.A \equiv \exists R.B$.

(2) 若 $A \equiv B, C \equiv D$, 则 $A \sqcap C \equiv B \sqcap D, A \sqcup C \equiv B \sqcup D$.

证明. 对任给的解释 I ,

(1) 由于 $A \equiv B$, 从而有 $A^I = B^I$, 所以, $(\forall R.A)^I = \{x \mid \forall y. \langle x, y \rangle \in R^I \rightarrow y \in A^I\} = \{x \mid \forall y. \langle x, y \rangle \in R^I \rightarrow y \in B^I\} = (\forall R.B)^I$, 所以, $\forall R.A \equiv \forall R.B$.

$(\exists R.A)^I = \{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in A^I\} = \{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in B^I\} = (\exists R.B)^I$, 所以, $\exists R.A \equiv \exists R.B$.

(2) 由于 $A \equiv B, C \equiv D$, 从而有 $A^I = B^I, C^I = D^I$, 于是 $A^I \cap C^I = B^I \cap D^I$, 从而 $(A \sqcap C)^I = (B \sqcap D)^I$, 所以, $A \sqcap C \equiv B \sqcap D$.

由 $A \equiv B, C \equiv D$, 有 $A^I \cup C^I = B^I \cup D^I$, 从而 $(A \sqcup C)^I = (B \sqcup D)^I$, 所以, $A \sqcup C \equiv B \sqcup D$. 证毕.

命题 3(见文献[1]的 61 页). 对于一个 Tbox T , 其基解释 J 的所有扩充 EXT_J 和 EXT_J 中解释之间的关系 \leq 组成一个完备格.

3 主要结论

为了下面的讨论, 先说明几点事实:

(i) 并不是所有的 Tbox 都有模型.

考虑只有一个公理 $A = \neg A$ 的 Tbox, 如果 I 是该 Tbox 的一个模型, 则 $A^I = (\neg A)^I = \Delta^I \setminus A^I$, 从而 $\Delta^I = \emptyset$, 这与 I 作为一个模型相矛盾(任何模型的解释域非空).

(ii) T 有模型, 但不一定有最小、最大语义不动点模型。

例如, 考虑只有一个公理 $A = \forall R. \neg A$ 的 Tbox (见文献[1]的 61 页), 给出其基解释为 $\Delta^I = \{a, b\}$, $R^I = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$, 基于该基解释的两个扩充解释 I_1, I_2 对概念 A 的解释分别为 $I_1(A) = \{a\}$ 和 $I_2(A) = \{b\}$, 不难验证 I_1, I_2 都是 Tbox 的模型, 但 I_1 与 I_2 不可比, 所以这个 Tbox 不存在最小、最大语义不动点模型。

(iii) 如果固定一个基本解 J , 则 EXT_J 是一个完备格, 并且假设 T_J 单调, 则知 T 关于这个基解释 J 有模型, 且有最小、最大语义不动点模型。但反之, T 有模型, 不一定说明在 EXT_J 上定义的 T_J 单调。我们关心的是当 T 满足什么条件时, T 关于所有可能的基解释 J 有最小、最大语义不动点模型。

命题 4(文献[1]的命题 2.8). 如果 T 是没有 \neg 出现的 Tbox, J 是 T 的基解释, 则 J 的扩张 EXT_J 中存在 T 的最小、最大语义不动点模型。

文献[1]中没有给出命题 2.8 的证明, 现我们给出一种证法如下:

证明. 根据 Tarski 不动点定理(Tarski 1955, 完备格上的单调映射存在不动点), 由命题 3, 只需证 EXT_J 上定义的映射 T_J 单调即可。

考虑 T 中的任意定义式 $A \equiv B$, 由 $I_1 \leq I_2$ 得 $I_1(A) \subseteq I_2(A)$, 要证 T_J 单调, 只需证 $T_J(I_1)(A) \subseteq T_J(I_2)(A)$, 由 $T_J(I)(A)$ 的定义有

$$T_J(I_1)(A) = I_1(T(A)) = I_1(B),$$

$$T_J(I_2)(A) = I_2(T(A)) = I_2(B),$$

所以要证 $T_J(I_1)(A) \subseteq T_J(I_2)(A)$, 只需证 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。下面对概念描述 B 的复杂性进行归纳证明 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

基始: B 是原子公式, 即是单个 base symbol 或 name symbol, 由 $I_1 \leq I_2$ 有 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

归纳: 假设复杂度小于 B 的概念都成立。

(1) B 是 $C \sqcap D$ 的形式, $I_1(B) = I_1(C) \cap I_1(D)$, $I_2(B) = I_2(C) \cap I_2(D)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$ 及 $I_1(D) \subseteq I_2(D)$, 于是有 $(I_1(C) \cap I_1(D)) \subseteq (I_2(C) \cap I_2(D))$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

(2) B 是 $C \sqcup D$ 的形式, $I_1(B) = I_1(C) \cup I_1(D)$, $I_2(B) = I_2(C) \cup I_2(D)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$ 及 $I_1(D) \subseteq I_2(D)$, 于是有 $(I_1(C) \cup I_1(D)) \subseteq (I_2(C) \cup I_2(D))$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

(3) B 是 $\forall R.C$ 的形式, 任取 $x \in I_1(\forall R.C)$, 即 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in I_1(R) \rightarrow y \in I_1(C)$, 由归纳假设

有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$, 而 $I_1(R) = I_2(R)$, 故 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in I_2(R) \rightarrow y \in I_2(C)$, 即 $x \in I_2(\forall R.C)$, 从而有 $I_1(\forall R.C) \subseteq I_2(\forall R.C)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

(4) B 是 $\exists R.C$ 的形式, 任取 $x \in I_1(\exists R.C)$, 即 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in I_1(R) \wedge y \in I_1(C)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$, 而 $I_1(R) = I_2(R)$, 故 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in I_2(R) \wedge y \in I_2(C)$, 即 $x \in I_2(\exists R.C)$, 从而有 $I_1(\exists R.C) \subseteq I_2(\exists R.C)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

(5) B 是 $\geq nR$ 的形式, 因为 $I_1(R) = I_2(R)$, 显然 $I_1(\geq nR) = I_2(\geq nR)$ 成立, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

(6) B 是 $\leq nR$ 的形式, 因为 $I_1(R) = I_2(R)$, 显然 $I_1(\leq nR) = I_2(\leq nR)$ 成立, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 。

由于以上各种情况下都有 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 成立, 于是 $T_J(I_1)(A) = T_J(I_2)(A)$, 由概念 A 的任意性知 T 单调, 从而命题得证。证毕。

为了说明当 ALCN 的 Tbox 中出现 \neg 时, T_J 不一定单调, 给出如下例子:

一个 Tbox 含有如下的一条公理 $A \equiv \neg C \sqcap (A \sqcup B)$, 其中 C, A, B 都是 name symbol, 设 $I_1 \leq I_2$ 则有 $I_1(A) \subseteq I_2(A)$, $I_1(C) \subseteq I_2(C)$, $I_1(B) \subseteq I_2(B)$, 而 $I_1(\neg C) \supseteq I_2(\neg C)$, 这时候我们考虑:

$$I_1(A) = I_1(\neg C \sqcap (A \sqcup B))$$

$$= I_1(\neg C) \cap (I_1(A) \cup I_1(B)).$$

$$I_2(A) = I_2(\neg C \sqcap (A \sqcup B))$$

$$= I_2(\neg C) \cap (I_2(A) \cup I_2(B)).$$

由于 $I_1(A) \subseteq I_2(A)$, $I_1(B) \subseteq I_2(B) \Rightarrow (I_1(A) \cup I_1(B)) \subseteq (I_2(A) \cup I_2(B))$, 但是由于 $I_1(\neg C) \supseteq I_2(\neg C)$, 所以 $I_1(A)$ 与 $I_2(A)$ 大小无法判断, 从而有 T 不单调的可能。

现在我们构造反例证明文献[1]中命题 2.9(注: 命题 2.9 的具体内容请参看文献[1])是错误的。

图 1 是以下 Tbox 的 G_T 图。

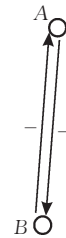


图 1 Tbox 的 G_T 图

图 1 中, $A \equiv \neg B \sqcap C$; $B \equiv \neg A \sqcap D$. 其中 C, D 为 base symbol, 很容易验证该 Tbox 满足命题 2.9 的前提, 即 G_T 图中每一个环上有偶数个负弧。但是, 假定任一基解释为 J , 定义在 J 的所有扩充 EXT_J 上

的映射为 T_J , 设 $I_1, I_2 \in EXT_J$, 且满足 $I_1 \leq I_2$, 则有 $I_1(D) = I_2(D)$, $I_1(C) = I_2(C)$, $I_1(A) \subseteq I_2(A)$, $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

从而 $I_1(\neg B) \supseteq I_2(\neg B)$, $I_1(\neg A) \supseteq I_2(\neg A)$.

所以有 $T_J(I_1)(A) = I_1(\neg B \sqcap C) \supseteq I_2(\neg B \sqcap C) = T_J(I_2)(A)$.

即当 $I_1(A) \subseteq I_2(A)$ 时, 得出 $T_J(I_1)(A) \supseteq T_J(I_2)(A)$, 这与 T_J 单调的定义相矛盾, 说明 T_J 不单调, 从而 T 不单调.

下面我们具体地给出一个解释域来加以说明.

假设 $\Delta^I = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义其基解释为: $C^I = I_1(C) = I_2(C) = \{1, 2, 3\}$, $D^I = I_1(D) = I_2(D) = \{1, 3, 4\}$, 解释 I_1, I_2 如下: $I_1(A) = \{1\}$, $I_1(B) = \{4\}$, $I_2(A) = \{1, 2\}$, $I_2(B) = \{3, 4\}$, 显然满足 $I_1 \leq I_2$. 而 $T_J(I_1)(A) = I_1(\neg B) \cap I_1(C) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

$T_J(I_1)(B) = I_1(\neg A) \cap I_1(D) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 4\} = \{3, 4\}$.

$T_J(I_2)(A) = I_2(\neg B) \cap I_2(C) = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$.

$T_J(I_2)(B) = I_2(\neg A) \cap I_2(D) = \{3, 4\} \cap \{1, 3, 4\} = \{3, 4\}$.

根据以上分析知: $I_1(A) \subseteq I_2(A)$ 且 $I_1(A) \neq I_2(A)$, 而 $T_J(I_1)(A) \supset T_J(I_2)(A)$.

另外一方面, $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 且 $I_1(B) \neq I_2(B)$, 而 $T_J(I_1)(B) = T_J(I_2)(B)$, 说明 T_J 不单调, 从而 T 不单调.

为了对命题 2.9 作修改, 我们先作以下准备工作.

引理 1. B 为由 base symbols 形成的合式公式, I 为 J 的扩充解释, 则 $B^I = B^J$.

证明. 对 B 的复杂性进行归纳证明.

基始: B 是单个 base symbol, 则由 I 为 J 的扩充解释的定义知 $B^I = B^J$.

归纳: 假设对于复杂度小于 B 的合式公式命题都成立, 考虑最后一步的形成方式:

(1) B 是 $\neg C$ 的形式, $B^I = (\neg C)^I = \Delta^I \setminus C^I$, 由归纳假设有 $C^I = C^J$, 于是 $B^I = (\neg C)^I = \Delta^I \setminus C^I = \Delta^I \setminus C^J = B^J$.

(2) B 是 $C \sqcap D$ 的形式, $B^I = C^I \cap D^I$, $B^J = C^J \cap D^J$, 由归纳假设有 $C^I = C^J$ 及 $D^I = D^J$, 于是 $(C^I \cap D^I) = (C^J \cap D^J)$, 即 $B^I = B^J$.

(3) B 是 $C \sqcup D$ 的形式, $B^I = C^I \cup D^I$, $B^J = C^J \cup D^J$, 由归纳假设有 $C^I = C^J$ 及 $D^I = D^J$, 于是 $(C^I \cup D^I) = (C^J \cup D^J)$, 即 $B^I = B^J$.

$D^I) = (C^J \cup D^J)$, 即 $B^I = B^J$.

(4) B 是 $\forall R.C$ 的形式, 任取 $x \in (\forall R.C)^I$, 即 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in R^I \rightarrow y \in C^I$, 由归纳假设有 $C^I = C^J$, 而 $R^I = R^J$, 故 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in R^J \rightarrow y \in C^J$, 即 $x \in (\forall R.C)^J$. 同理, 反之也成立.

(5) B 是 $\exists R.C$ 的形式, 任取 $x \in (\exists R.C)^I$, 即 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in R^I \wedge y \in C^I$, 由归纳假设有 $C^I = C^J$, 而 $R^I = R^J$, 故 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in R^J \wedge y \in C^J$, 即 $x \in (\exists R.C)^J$. 同理, 反之也成立.

(6) B 是 $\geq nR$ 的形式, 由 $R^I = R^J$, 显然有 $(\geq nR)^I = (\geq nR)^J$ 成立.

(7) B 是 $\leq nR$ 的形式, 由 $R^I = R^J$, 显然有 $(\leq nR)^I = (\leq nR)^J$ 成立. 证毕.

引理 2. B 为由 name symbol 不出现在 \neg 的作用域内而形成的合式公式, $I_1 \leq I_2$, 则 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

证明. 对 B 的复杂性进行归纳证明.

基始: B 是单个 base symbol 或 name symbol, 由 $I_1 \leq I_2$ 有 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

归纳: 假设复杂度小于 B 的概念都成立.

(1) B 是 $\neg C$ 的形式, 此时 C 中只能含 base symbol, 故由引理 1 有 $I_1(B) = I_2(B)$.

(2) B 是 $C \sqcap D$ 的形式, $I_1(B) = I_1(C) \cap I_1(D)$, $I_2(B) = I_2(C) \cap I_2(D)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$ 及 $I_1(D) \subseteq I_2(D)$.

于是 $(I_1(C) \cap I_1(D)) \subseteq (I_2(C) \cap I_2(D))$, 即 $I_1(C \sqcap D) \subseteq I_2(C \sqcap D)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

(3) B 是 $C \sqcup D$ 的形式, $I_1(B) = I_1(C) \cup I_1(D)$, $I_2(B) = I_2(C) \cup I_2(D)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$ 及 $I_1(D) \subseteq I_2(D)$.

于是 $(I_1(C) \cup I_1(D)) \subseteq (I_2(C) \cup I_2(D))$, 即 $I_1(C \sqcup D) \subseteq I_2(C \sqcup D)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

(4) B 是 $\forall R.C$ 的形式, 任取 $x \in I_1(\forall R.C)$, 即 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in I_1(R) \rightarrow y \in I_1(C)$, 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$, 而 $I_1(R) = I_2(R)$, 故 x 满足 $\forall y. \langle x, y \rangle \in I_2(R) \rightarrow y \in I_2(C)$, 即 $x \in I_2(\forall R.C)$, 从而 $I_1(\forall R.C) \subseteq I_2(\forall R.C)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

(5) B 是 $\exists R.C$ 的形式, 任取 $x \in I_1(\exists R.C)$, 即 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in I_1(R) \wedge y \in I_1(C)$. 由归纳假设有 $I_1(C) \subseteq I_2(C)$, 而 $I_1(R) = I_2(R)$, 故 x 满足 $\exists y. \langle x, y \rangle \in I_2(R) \wedge y \in I_2(C)$, 即 $x \in I_2(\exists R.C)$, 从而 $I_1(\exists R.C) \subseteq I_2(\exists R.C)$, 即 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

(6) B 是 $\geq nR$ 的形式, 由 $I_1(R) = I_2(R)$, 显然有 $I_1(\geq nR) = I_2(\geq nR)$ 成立.

(7) B 是 $\leq nR$ 的形式, 由 $I_1(R) = I_2(R)$, 显然有 $I_1(\leq nR) = I_2(\leq nR)$ 成立. 证毕.

引理 3. 如果合式公式 A 的描述中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 则 A 等价于一个每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中的合式公式.

证明. 对 A 的复杂性进行归纳证明.

基始: A 是单个 base symbol 或 name symbol B , 此时没有 \rightarrow 出现, $B \equiv B$.

归纳: 假设对所有复杂度小于 A 的合式公式, 命题成立, 考虑 A 最后一步的形成方式:

(1) A 是 $\neg C$ 的形式, 由已知条件知 C 中的 name symbol 出现在奇数个 \rightarrow 的辖域内, 此时要对 C 的复杂性进行归纳证明:

基始: C 是原子概念, 则只能是单个 base symbol, 此时 C 不是 name symbol, 否则若 C 是 name symbol, 则该 name symbol 出现在奇数个 \rightarrow 的辖域内, 矛盾, 故命题成立.

归纳: ① C 是 $\neg E$ 的形式, 则 E 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 由归纳假设知 E 等价于 E' , E' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, A 的字符串是 $A \equiv \neg \neg E$, 又 $\neg \neg E \equiv E$, $E \equiv E'$, 故 $A \equiv \neg \neg E \equiv E'$, 从而命题成立.

② C 是 $E \sqcap F$ 的形式, 由命题 1 知 $A \equiv \neg (E \sqcap F) \equiv \neg E \sqcup \neg F$, $\neg E$ 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 由归纳假设知, $\neg E$ 等价于 E' , E' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中. $\neg F$ 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 由归纳假设知, $\neg F$ 等价于 F' , F' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 由命题 2 有 $A \equiv \neg E \sqcup \neg F \equiv E' \sqcup F'$, 从而命题成立.

③ C 是 $E \sqcup F$ 的形式, 由命题 1 知 $A \equiv \neg (E \sqcup F) \equiv \neg E \sqcap \neg F$, $\neg E$ 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 由归纳假设知, $\neg E$ 等价于 E' , E' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中. $\neg F$ 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, 由归纳假设知, $\neg F$ 等价于 F' , F' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 由命题 2 有 $A \equiv \neg E \sqcap \neg F \equiv E' \sqcap F'$, 从而命题成立.

④ C 是 $\forall R.E$ 的形式, 由命题 1 知 $A \equiv \neg \forall R.E \equiv \exists R.\neg E$. 由归纳假设知, $\neg E$ 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, $\neg E$ 等价于 E' , E' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域

中, 由命题 2 有 $A \equiv \neg \forall R.E \equiv \exists R.\neg E \equiv \exists R.E'$, 从而命题成立.

⑤ C 是 $\exists R.E$ 的形式. 由归纳假设知, E 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, $\neg E$ 等价于 E' , E' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 由命题 2 有 $A \equiv \neg \exists R.E \equiv \forall R.\neg E \equiv \forall R.E'$, 从而命题成立.

⑥ C 是 $\geq nR$ 或 $\leq nR$ 的形式时, C 中都不含 name symbol, 从而 $A \equiv \neg C$ 中不含 name symbol, 所以命题成立.

(2) A 是 $C \sqcap D$ 的形式, 由归纳假设知, C 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, C 等价于 C' , C' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, D 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, D 等价于 D' , D' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 故 $A \equiv C \sqcap D \equiv C' \sqcap D'$, 从而命题成立.

(3) A 是 $C \sqcup D$ 的形式, 由归纳假设知, C 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, C 等价于 C' , C' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, D 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, D 等价于 D' , D' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 故 $A \equiv C \sqcup D \equiv C' \sqcup D'$, 从而命题成立.

(4) A 是 $\forall R.C$ 的形式, 由归纳假设知, C 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, C 等价于 C' , C' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 故 $A \equiv \forall R.C \equiv \forall R.C'$, 从而命题成立.

(5) A 是 $\exists R.C$ 的形式, 由归纳假设知, C 中的每一个 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的辖域中, C 等价于 C' , C' 中每一个 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域中, 故 $A \equiv \exists R.C \equiv \exists R.C'$, 从而命题成立.

(6) A 是 $\geq nR$ 或 $\leq nR$ 的形式, 此两种情形下 A 中都不含 name symbol, 故命题成立.

综上所述, 该命题成立.

证毕.

命题 5. 如果 T 中所有的 name symbol 都不出现在 \rightarrow 的作用域内, 则 T 单调.

证明. 考虑 T 中的任意定义式 $A \equiv B$, 由 $I_1 \leq I_2$ 得 $I_1(A) \subseteq I_2(A)$, 要证 T 单调, 只需要证明 $T_J(I_1)(A) \subseteq T_J(I_2)(A)$.

而由 $T_J(I)(A)$ 的定义, 有 $T_J(I_1)(A) = I_1(T(A)) = I_1(B)$.

$T_J(I_2)(A) = I_2(T(A)) = I_2(B)$, 所以要证 $T_J(I_1)(A) \subseteq T_J(I_2)(A)$, 只需证 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 即

可,若 B 的字符中只含 base symbol 时,由引理 1 得 $I_1(B) = I_2(B)$,若 B 的字符中含 name symbol 时,由引理 2 得 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$.

所以总有 $I_1(B) \subseteq I_2(B)$ 成立,故 T 单调.

证毕.

命题 6. 如果一个 Tbox T 的定义式中的所有 name symbol 只出现在偶数个 \rightarrow 的作用域内,则 Tbox T 单调,从而该 Tbox T 存在最大、最小语义不动点模型.

证明. 任取 Tbox T 中的定义式 $A \equiv B$,由引理 3 有 $B \equiv B'$,其中 B' 中的任意 name symbol 不出现在 \rightarrow 的辖域内,任取两解释 $I_1, I_2 \in EXT_J$,满足 $I_1 \leq I_2$,从而

$$T_J(I_1)(A) = I_1(B) = I_1(B'),$$

$$T_J(I_2)(A) = I_2(B) = I_2(B'),$$

再由命题 5 的证明有 $I_1(B') \subseteq I_2(B')$,从而有 $T_J(I_1)(A) \subseteq T_J(I_2)(A)$,由定义式 $A \equiv B$ 的任意性知 Tbox T 单调,从而根据定义 6, Tbox 任意固定的基解释 J ,都有 EXT_J 上定义的映射 T_J 单调,进一步根据命题 3, EXT_J 与关系 \leq 形成完备格,由 Tarski 不动点定理知道,则定义在 EXT_J 上的映射 T_J 存在不动点,从而 Tbox T 存在最大、最小语义不动点模型.

证毕.

根据命题 1,我们可以进行否定深入,如果一个 Tbox 满足文献[1]中的命题 2.9 的条件,且如果仅仅从语法上讲,我们可以对该 Tbox 进行变形,转换为另外一个 Tbox T' ,满足对于 Tbox 任意定义式 $A \equiv B$,当定义 $A \equiv B$ 的 B 中有 C ,而且在所考虑的 Tbox 中有关于概念 C 的描述,则我们用概念 C 的描述来代替 C 在 B 中的所有出现,将这过程进行到右边再没有 name symbol 出现时,所得到的 $A \equiv T(A)$ 的 $T(A)$ 中的任一概念前或者没有否定词 \rightarrow 出现,或者出现否定词 \rightarrow 偶数次,所以根据引理 1、引理 2、引理 3 和命题 5,有 T' 一定单调,从而所考虑的 Tbox T 一定单调.但是命题 2.9 之所以不成立的原因是,语法上能代入并不表示从语义上可以代入,说的意思是,如果在基解释 J 的所有扩充 EXT_J 上的映射为 $T_J, I_1, I_2 \in EXT_J$ 满足 $I_1 \leq I_2$,对于 name symbol A ,我们在进行比较 $T_J(I_1)(A)$, $T_J(I_2)(A)$ 的大小时,由于出现了否定,我们想到把 $T(A)$ 中的出现 name symbol 全部用其描述替换,但是由于 I_1, I_2 还不一定是 Tbox 的模型,所以 I_1, I_2 对 $T(A)$ 中出现的 name symbol 的解释不等于对其描述的解释,从而在语义上不可以代入(请读者认真

体会本段).

明白了这一点,我们有下面的命题.

命题 7. 如果一个 Tbox T 满足文献[1]中的命题 2.9 的条件,记该 Tbox T 的所有模型组成的集合为 Δ ,则定义在 Δ 上的映射 T_J 单调,从而 Δ 中存在 T 的最大、最小语义不动点模型.

证明. 如果一个 Tbox T 对应的图 G_T 中每一个环上有偶数个负弧,即满足文献[1]中的命题 2.9 的条件,并且 Δ 中每一个解释都是 Tbox T 的模型,则 Tbox T 相对于模型集 Δ 从语义上是可以代入的,从而可以把 Tbox 转换为另外一个 Tbox T' ,使得 T' 满足任意概念的描述中任一概念前或者没有否定词 \rightarrow 出现,或者出现否定词 \rightarrow 偶数次,所以根据引理 1、引理 2、引理 3 和命题 5,有 T' 单调,而转换不改变 Tbox 的单调性,从而所考虑的 Tbox T 相对于模型集合 Δ 单调.由于 T 单调,根据定义 6, Tbox 任意固定的基解释 J ,都有 Δ 上定义的 T_J 单调.另外,容易验证集合 Δ 及 Δ 中解释间的关系 \leq 组成一个完备格,由 Tarski 不动点定理知道,则定义在 Δ 上的映射 T_J 存在不动点,从而 Δ 中存在 Tbox T 的最大、最小语义不动点模型.

证毕.

应该注意的是 Δ 上的映射 T_J 与 EXT_J 上的映射 T_J 的定义方法一样,所以我们用相同的符号记之.

4 结束语

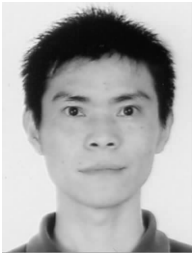
本文主要指出了文献[1]中的命题 2.9 的错误,并且给出了几种改变条件的修改结论,属于带循环的描述逻辑系统 ALCN 的不动点语义的前沿和基础性工作.下一步我们将考虑 name symbol 前带有奇数个否定词的循环 ALCN 具有模型的条件.

致 谢 感谢审稿专家提出的宝贵意见!

参 考 文 献

- [1] Baader F, Nutt W. Basic description logics//Baader F, Calvanese D, McGuinness D, Nardi D, Patel-Schneider P. Proceedings of the Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 47-100
- [2] Giacomo G D, Lenzerini M. A uniform framework for concept definitions in description logics. Journal of Artificial Intelligence Research, 1997, 6(1): 87-110

- [3] Buchheit M, Donini F M, Nutt W, Schaerf A. A refined architecture for terminological systems: Terminology = schema + views. *Artificial Intelligence*, 1998, 99(2): 209-260
- [4] Horrocks I, Sattler U. Decidability of SHIQ with complex role inclusion axioms. *Artificial Intelligence*, 2004, 160(1-2): 79-104
- [5] Nebel B. Terminological cycles: semantics and computational properties//Sowa J F. *Proceedings of the Principles of Semantic Networks*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1991: 331-362
- [6] Baader F. Using automata theory for characterizing the semantics of terminological cycles. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 1996, 18(2-4): 175-219
- [7] Nebel B. *Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems*//LNAI 422. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [8] Baader F. Terminological cycles in KL-ONE based knowledge representation languages//Dietterich T, Swartout W. *Proceedings of the 8th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 1990)*. Cambridge: MIT Press, 1990: 621-626



CAO Fa-Sheng, born in 1977, master. His main research interests include mathematical logic and universal algebra.

YU Quan, born in 1979, master. His main research interests include description logics and modal logic.

WANG Ju, born in 1950, Ph.D., professor. His main research interests include description logics, mathematical logic and artificial intelligence.

JIANG Yun-Cheng, born in 1974, Ph.D., associate professor. His main research interests include description logics, semantic Web and Web intelligence.

Background

Description logics are a logical reconstruction of the frame-based knowledge representation languages, with the aim of providing a simple well-established declarative semantics to capture the meaning of structured representation of knowledge. Terminological cycles (or cyclic definitions) have been a very hard problem in description logics for a long time, and their essential problems, i. e. semantics and reasoning problems, have not been solved reasonably. But terminological cycles may extend expressiveness capability of description logics, and in some applications (such as medical field) terminological cycles are inevitable. Also, envisioning a system that views a description logic knowledge base as an abstract entity that can be changed incrementally, terminological cycles can be easily created and either have to be detected and rejected by the system, which makes the system specification overly complex and hard to understand by a user, or the system has to accept them as legal constructions. For these reasons it seems worthwhile to analyze the seman-

tic and algorithmic nature of terminological cycles. The current research progresses and the existing problems of description logic system ALCN with terminological cycles are analyzed. The condition of cyclic ALCN-Tbox exists model is studied. The mistake of proposition 2.9 in the paper published by Baadr in 2003 (Let T be a terminology such that each cycle in G_T contains an even number of negative arcs. Then T is monotone) is pointed out, also some modification of proposition 2.9 is given. The condition of cyclic ALCN-Tbox exists fixpoint models (lfp-model and gfp-model) is given. Theoretical foundation for the application of terminological cycles in description logics is provided through the work in this paper. The work is supported by the National Natural Science Foundation of China under Nos. 60573010, 60663001, the Natural Science Foundation of Guangxi Province of China under grant No. 0447032, and the Youth Science Foundation of Guangxi Province of China under grant No. 0640030.