

# 满足数据点切向约束的二次 B 样条插值曲线

潘日晶

(福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007)

**摘 要** 给出一种二次 B 样条曲线插值方法. 利用数据点的参数化和节点向量的自由度, 构造在各数据点满足切向约束的二次 B 样条插值曲线, 直观地控制插值曲线达到预期形状. 用文中方法构造插值曲线是一个递推过程, 不必预先确定数据点参数值和节点向量、不必解线性方程组, 而是在插值过程中根据数据点及其切向的约束条件递推地确定数据点的参数值、节点和控制顶点. 该文方法允许插值曲线各段的连接点与数据点不一致, 以使得二次 B 样条插值曲线的形状更自然. 而且在满足数据点切向约束的条件下, 还可利用节点进一步调控插值曲线的形状. 另外, 用文中方法构造的二次 B 样条插值曲线对于数据点的改变具有较好的局部性质. 文中最后给出一些例子将该文方法与其它一些插值方法进行比较, 实验结果表明, 该文方法是有效的.

**关键词** B 样条曲线; 插值; 参数化; 节点向量; 切向约束

**中图法分类号** TP391

## Quadratic B-Spline Interpolation Curves with Tangent Constraints on Data Points

PAN Ri-Jing

(College of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

**Abstract** In this paper a new interpolation method for quadratic B-spline curves is proposed so as to fully utilize the degrees of freedom provided by parameterization and knot vector to control the shapes of the interpolation curves intuitively by the tangent constraints on data points. Without solving any equation systems, the interpolation procedure of the method is a recursive one in which the parameter values at data points, the knots and the control points are determined recursively according to the data points and the tangent constraints on data points. With the method the connection points of adjacent curve segments are not necessarily coincident with data points, so that the shapes of quadratic B-spline interpolation curves are more natural. Furthermore, under the restriction of the tangent constraints, there are still some degrees of freedom in constructing interpolation curves by the method; the shapes of the interpolation curves can be further adjusted by the selection of knots. Besides, the quadratic B-spline interpolation curves constructed by the method possess rather good local properties for the relieving disturbances on data points. Some examples are given to compare the method proposed in the paper with several other interpolation methods. The experimental results show that this method is effective.

**Keywords** B-spline curve; interpolation; parameterization; knot vector; tangent constraint

# 1 引言

在几何造型、逆向工程和计算机辅助几何设计等领域中,插值是一种十分重要的技术. B 样条曲线由于具有局部性、保凸性和连续性等优点,被广泛应用于构造插值曲线. B 样条曲线插值虽然已得到广泛的研究,但如何有效地控制插值曲线的形状仍然是一个值得探讨的问题. B 样条插值曲线的形状不仅取决于给定的数据点,而且还受到曲线次数、数据点的参数化和节点向量的影响. 在构造 B 样条插值曲线时,除了给定数据点外,往往也预先给定次数. 这样,控制插值曲线形状的自由度还剩下参数化和节点向量. 主要的参数化方法有均匀参数化方法、累加弦长参数化方法、向心(centripetal)参数化方法<sup>[1]</sup>和 Foley 参数化方法<sup>[2]</sup>等. 节点向量的选取通常与数据点的参数化相一致,但也有不一致的. 例如,文献[3-4]中提出节点向量按以上任一种参数化方法选取,以相应 B 样条基函数最大值处的参数值作为数据点的参数值. 文献[5]先采用向心参数化,再求节点向量使得 B 样条基函数在数据点参数值处取最大值,文献[6]建议采用累加弦长参数化,通过对参数值求平均的方法取节点向量.

以上提到的参数化与节点向量确定方法应用于插值问题时,主要是根据数据点分布的几何信息预先确定节点向量和各数据点的参数值. 由于参数和节点与 B 样条插值曲线的几何形状之间的关系复杂,所以这些预先确定参数与节点向量的方法有时难以直观地控制 B 样条插值曲线,使之具有预期的几何形状,尤其是当数据点分布很不均匀且拐点较多时. 要有效地控制 B 样条插值曲线的形状,应充分利用参数化与节点向量的自由度,一个途径是直接利用插值曲线本身的几何性质进行参数化和确定节点向量. 考虑到 B 样条曲线的表示形式关于参数和节点都是非线性的,对于高阶曲线而言,这样做需要解决复杂的非线性问题,因此采用低阶 B 样条曲线进行插值要相对简单.

本文研究可有效控制形状的二次 B 样条插值曲线. 二次 B 样条曲线形式简单,在连续性要求不是很高的情况下,作为插值曲线计算简单,且易于控制曲线形状. 二次 B 样条曲线曾被认为不适用于插值<sup>[7]</sup>,但实际上并非如此. 文献[5]指出,二次 B 样条插值曲线形状不能达到预期效果是由于不适当的参数化和节点向量,而非其次数. 文献[8]给出二次

B 样条曲线的一种插值方法,直接利用插值曲线直观的几何约束条件如曲线在数据点处的切向、曲线段的相对高度等进行参数化,使得构造出的插值曲线不仅在两端,而且在中间各段具有预期的几何性质. 该方法在构造插值曲线的过程中根据曲线的几何约束条件动态地确定参数值、节点向量和控制顶点,整个过程不必解方程组,计算简便. 但该方法只考虑节点向量的选取与参数化相一致的情况,即相邻曲线段的连接点与数据点相一致的情况. 文献[6]给出的局部插值方法,可构造在数据点满足切向约束的二次 B 样条插值曲线,但该方法也只适用于连接点与数据点相一致的情况. 由于二次曲线段中不含有拐点,所以当连接点与数据点相一致时,若数据点分布所建议的形状具有较多拐点且弯度较大,会使得插值曲线的形状不自然. deBoor 指出对二次样条插值曲线而言,在节点区间内取参数值可使得插值线性方程组更加稳定<sup>[9]</sup>. 因此,在上述研究的基础上,本文考虑更一般的问题,在允许节点向量的选取与参数化不一致的情况下,充分利用参数化与节点向量的自由度,构造在各数据点满足切向约束的二次 B 样条插值曲线,以使得插值曲线的形状得到更直观有效的控制. 实验结果表明,本文方法是有效的.

## 2 问题的提出

二次 B 样条曲线由控制顶点序列  $d_0, d_1, \dots, d_n$  和节点向量  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+3}\}$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+3}$  确定,其表示形式如下:

$$c(t) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,2}(t), \quad t \in [t_2, t_{n+1}] \quad (1)$$

其中,  $N_{i,2}(t)$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 为由节点向量  $T$  确定的二次规范 B 样条基函数.

给定平面上  $n$  个互异的数据点  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 要求顺序通过这些数据点的二次 B 样条插值曲线  $c(t)$ . 设  $c(t)$  在数据点  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的参数值分别为  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$ , 则  $c(t)$  应满足

$$c(\bar{t}_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

为了在保证问题的解存在的前提下让参数值的选取具有充分的自由度,下面总是设

$$\bar{t}_1 = t_2, \quad \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

不妨进一步要求  $c(t)$  为端点插值的,且以  $p_1, p_n$  为两端点,于是应有

$$\begin{aligned} d_0 &= p_1, \quad d_n = p_n, \\ \bar{t}_1 &= t_0 = t_1 = t_2, \quad \bar{t}_n = t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} \end{aligned} \quad (4)$$

在上述问题中,要确定满足条件式(2)~(4)的二次 B 样条插值曲线  $c(t)$ , 相对于约束条件个数, 求解该问题有较多的自由度. 考虑到曲线在数据点处的切向能直观地控制曲线形状, 对插值曲线  $c(t)$  加上切向约束: 给定  $c(t)$  在数据点  $p_i$  处的单位切向量  $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 要求  $c(t)$  满足

$$\frac{\dot{c}(\bar{t}_i)}{|\dot{c}(\bar{t}_i)|} = v_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

在应用中, 单位切向量  $v_i$  可直接获得, 或根据数据点预先计算, 计算方法见第 5 节.

设  $u, v$  为向量, 下面用  $\langle u, v \rangle$  表示从  $u$  到  $v$  的有向夹角, 规定夹角的符号取逆时针方向为正, 顺时针方向为负. 记  $\alpha_i = \langle v_i, p_{i+1} - p_i \rangle (i=1, 2, \dots, n-1)$ ,  $\theta_i = \langle p_i - p_{i-1}, p_{i+1} - p_i \rangle (i=2, 3, \dots, n-1)$  (见图 1). 为了使切向  $v_i$  能更有效地控制插值曲线  $c(t)$  的形状, 限制所取的  $v_i$  满足如下条件:

$$\begin{cases} \alpha_i \theta_i \geq 0, |\theta_i| \geq |\alpha_i| \geq 0, i=2, 3, \dots, n-1, \\ \alpha_1 \theta_2 \geq 0, |\langle v_1, v_2 \rangle| < \pi, \langle p_n - p_{n-1}, v_n \rangle \theta_{n-1} \geq 0 \\ \alpha_i = 0 \Leftrightarrow v_{i+1} \text{ 与 } p_{i+1} - p_i \text{ 同向}, i=1, 2, \dots, n-1 \\ |\langle v_i, p_{i+1} - p_i \rangle| + |\langle p_{i+1} - p_i, v_{i+1} \rangle| < \pi, \\ \text{若 } \theta_{i+1} \geq 0, i=1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (6)$$

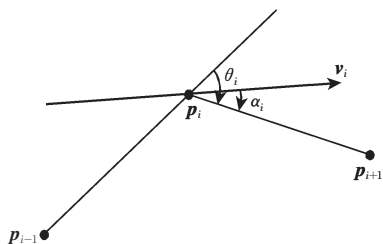


图 1 切向  $v_i$  以及有向夹角  $\alpha_i$  和  $\theta_i$

本文要解决的插值问题是: 给定平面上互异的数据点序列  $p_1, p_2, \dots, p_n$  和满足条件(6)的单位切向量序列  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 求控制顶点序列  $d_0, d_1, \dots, d_n$ 、节点向量  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+3}\}, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+3}$  和数据点的参数值  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$ , 使得所确定的二次 B 样条曲线  $c(t)$  满足插值和切向约束条件式(2)~(5). 下面简称该问题为满足切向约束的插值问题.

### 3 满足数据点切向约束的二次 B 样条插值曲线的构造

#### 3.1 关于数据点、控制顶点、节点和数据点的参数值的关系式

将计算 B 样条曲线上点的 deBoor 算法的公式

应用于二次 B 样条曲线  $c(t)$ , 有

$$\begin{cases} d_{i-2}^1(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_{i-1}} d_{i-2} + \frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} d_{i-1} \\ d_{i-1}^1(t) = \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_i} d_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i} d_i \\ c(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} d_{i-2}^1(t) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} d_{i-1}^1(t) \end{cases}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [t_2, t_{n+1}] \quad (7)$$

其中, 规定  $0/0=0$ . 在插值条件式(2)~(4)的限制下, 由式(7)可得到如下关于数据点、控制顶点、节点和数据点的参数值的关系式:

$$\begin{cases} d_{i,1} = \frac{t_{i+1}-\bar{t}_i}{t_{i+1}-t_{i-1}} d_{i-2} + \frac{\bar{t}_i-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} d_{i-1}, i=2, 3, \dots, n \\ d_{i,2} = \frac{t_{i+2}-\bar{t}_i}{t_{i+2}-t_i} d_{i-1} + \frac{\bar{t}_i-t_i}{t_{i+2}-t_i} d_i, i=2, 3, \dots, n-1 \\ p_i = \frac{t_{i+1}-\bar{t}_i}{t_{i+1}-t_i} d_{i,1} + \frac{\bar{t}_i-t_i}{t_{i+1}-t_i} d_{i,2}, i=2, 3, \dots, n-1 \\ d_0 = p_1, d_n = p_n \\ \bar{t}_1 = t_0 = t_1 = t_2, \bar{t}_n = t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3}, \\ \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], i=2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

其中, 规定  $0/0=0, d_{i,1} = d_{i-2}^1(\bar{t}_i), d_{i,2} = d_{i-1}^1(\bar{t}_i), i=2, 3, \dots, n$ .

$$\text{根据 } \dot{c}(\bar{t}_i) = \frac{2}{t_{i+1}-t_i} (d_{i,2} - d_{i,1}), i=2, 3, \dots, n$$

$$\text{以及当 } \bar{t}_1 = t_0 = t_1 = t_2 \text{ 时, } \dot{c}(\bar{t}_1) = \frac{2}{t_3-t_2} (d_1 - d_0),$$

在端点插值条件式(4)的限制下, 切向约束条件式(5)等价于如下条件:

$$d_1 - d_0 \text{ 与 } v_1 \text{ 同向}, d_{i,2} - d_{i,1} \text{ 与 } v_i \text{ 同向}, i=2, 3, \dots, n \quad (9)$$

这表明, 对于  $i=2, 3, \dots, n-1, d_{i,1}$  和  $d_{i,2}$  应分别为控制多边形的边  $d_{i-2}d_{i-1}$  和  $d_{i-1}d_i$  与由数据点  $p_i$  和方向  $v_i$  确定的直线的交点. 图 2 给出了条件式(8)和(9)的几何意义.

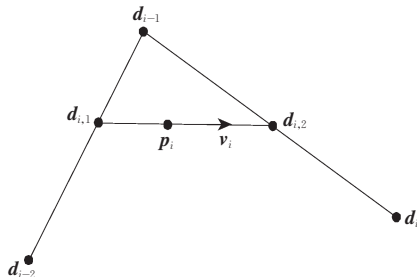


图 2 条件式(8)和(9)的几何意义

#### 3.2 构造满足切向约束的二次 B 样条插值曲线的算法

根据 3.1 小节, 满足切向约束的插值问题可转

换为已知  $p_1, p_2, \dots, p_n$  和  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 求满足式(8)和(9)的  $d_0, d_1, \dots, d_n, t_0, t_1, \dots, t_{n+3}$  和  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$  的问题. 为了便于计算, 下面进一步将式(8)化为等价的递推形式.

首先, 不难得到如下与式(8)的第 1~3 式等价的递推式:

$$\begin{cases} d_{i-1} = d_{i-2} + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{\bar{t}_i - t_{i-1}}(d_{i,1} - d_{i-2}), i = 2, 3, \dots, n \\ d_{i,2} = d_{i,1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{\bar{t}_i - t_i}(p_i - d_{i,1}), i = 2, 3, \dots, n-1 \\ (\bar{t}_{i+1} - t_i)(d_{i,2} - d_{i-1}) = (\bar{t}_i - t_i)(d_{i+1,1} - d_{i-1}), \\ i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (10)$$

当  $\bar{t}_i > t_i$  且  $d_{i,2} - d_{i-1}$  与  $d_{i+1,1} - d_{i-1}$  同向时, 式(10)中的第 3 式又等价于

$$\bar{t}_{i+1} = t_i + (\bar{t}_i - t_i) \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|}, i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (11)$$

从而由式(10)和(11)得式(8)的如下等价形式:

$$\begin{cases} d_{i-1} = d_{i-2} + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{\bar{t}_i - t_{i-1}}(d_{i,1} - d_{i-2}), i = 2, 3, \dots, n \\ d_{i,2} = d_{i,1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{\bar{t}_i - t_i}(p_i - d_{i,1}), i = 2, 3, \dots, n-1 \\ \bar{t}_{i+1} = t_i + (\bar{t}_i - t_i) \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|} \text{ 且} \\ d_{i,2} - d_{i-1} \text{ 与 } d_{i+1,1} - d_{i-1} \text{ 同向}, i = 2, 3, \dots, n-1 \\ d_0 = p_1, d_n = p_n \\ \bar{t}_1 = t_0 = t_1 = t_2, \bar{t}_n = t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3}, \\ \bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1}], i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中含有 5 种未知量:  $\{d_i\}, \{d_{i,1}\}, \{d_{i,2}\}, \{t_i\}$  和  $\{\bar{t}_i\}$ , 其中  $\{d_i\}, \{d_{i,2}\}$  和  $\{\bar{t}_i\}$  由式(12)中的第 1~3 递推式确定, 而结合切向约束条件式(9),  $\{d_{i,1}\}$  并非自由量,  $d_{i+1,1}$  为过点  $d_{i-1}$  和  $d_{i,2}$  的直线与过点  $p_{i+1}$  以  $v_{i+1}$  为方向的直线的交点. 至于  $\{t_i\}$ , 在条件式(9)和(12)的限制下,  $t_i$  有一定的取值范围, 该问题将在第 4 节中讨论.

根据式(9)和(12), 下面给出构造满足切向约束的二次 B 样条插值曲线的算法.

**算法.** Tangent\_constrained\_interpolation\_curve.

输入: 数据点  $p_1, p_2, \dots, p_n$  和插值曲线在数据点处的单位切向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

输出: 在数据点处满足切向约束的二次 B 样条插值曲线的控制顶点序列  $d_0, d_1, \dots, d_n$ 、节点向量  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+3}\}$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+3}$  和数据点的参数值  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$ .

{ 自由选取  $t_0 = t_1 = t_2$ ;  $\bar{t}_1 = t_2$ ; 自由选取  $\bar{t}_2 > t_2$ ;  
 $d_0 = p_1$ ;  
 if  $\alpha_1 = 0$  then  $d_{2,1} = (p_1 + p_2)/2$   
 else  $d_{2,1}$  = 过点  $p_1$  以  $v_1$  为方向的直线与过点  $p_2$  以  $v_2$  为方向的直线的交点;  
 for( $i = 2$ ;  $i \leq n-1$ ;  $i++$ )  
 {  
   取满足约束条件式(9)和(12)的  $t_{i+1}$ ;  
    $d_{i-1} = d_{i-2} + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{\bar{t}_i - t_{i-1}}(d_{i,1} - d_{i-2})$ ;  
    $d_{i,2} = d_{i,1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{\bar{t}_i - t_i}(p_i - d_{i,1})$ ;  
   if  $\alpha_i = 0$  then  $d_{i+1,1} = (p_i + p_{i+1})/2$   
   else  $d_{i+1,1}$  = 过点  $d_{i-1}$  和  $d_{i,2}$  的直线与过点  $p_{i+1}$  以  $v_{i+1}$  为方向的直线的交点;  
    $\bar{t}_{i+1} = t_i + (\bar{t}_i - t_i) \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|}$ ;  
 }  
 $t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3} = \bar{t}_n$ ;  $d_{n-1} = d_{n,1}$ ;  $d_n = p_n$ ;  
 }

## 4 节点的选取

本节给出算法 Tangent\_constrained\_interpolation\_curve 中节点  $t_{i+1}$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) 的取值范围.

**定义 1.** 对于  $i, 2 \leq i \leq n-1$ , 在数据点  $p_i$  与  $p_{i+1}$  处, 若  $\theta_i \theta_{i+1} \geq 0$ , 则称  $i$  对应无拐段, 若  $\theta_i \theta_{i+1} < 0$ , 则称  $i$  对应有拐段.

无拐段和有拐段见图 3. 显然, 对应于一个有拐段, 二次 B 样条插值曲线至少有一个拐点.

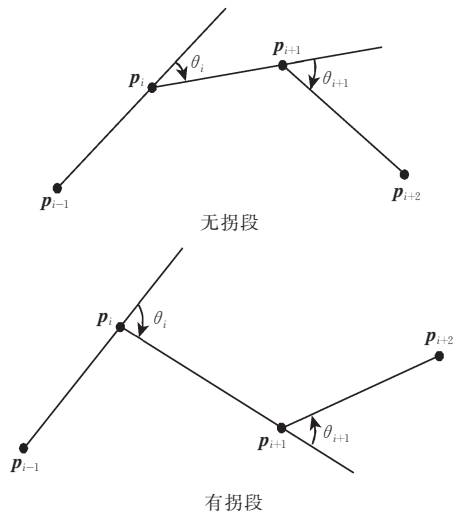


图 3 无拐段和有拐段

根据条件式(9)和(12), 在算法 Tangent\_constrained\_interpolation\_curve 中应取节点  $t_{i+1}$  ( $i = 2,$

$3, \dots, n-1$  使得如下条件成立:

$$\begin{cases} \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_{i+1}, \\ \text{当 } \alpha_i \neq 0 \text{ 时, 过点 } d_{i-1} \text{ 和 } d_{i,2} \text{ 的直线与过点 } p_{i+1} \text{ 以} \\ \quad v_{i+1} \text{ 为方向的直线相交,} \\ d_{i,2} \text{ 在直线段 } \overline{d_{i-1}d_{i+1,1}} \text{ 内 (不等于端点) 且} \\ \text{当 } d_{i+1,1} \neq p_{i+1} \text{ 时, } p_{i+1} - d_{i+1,1} \text{ 与 } v_{i+1} \text{ 同向} \end{cases} \quad (13)$$

由于算法 Tangent\_constrained\_interpolation\_curve 实现一个递推计算过程, 而且满足初始条件  $t_1, t_2 < \bar{t}_2$ , 所以可在前提条件  $t_{i-1}, t_i < \bar{t}_i$  下求  $t_{i+1}$  应满足的条件. 当  $t_{i-1}, t_i < \bar{t}_i$  时, 根据条件式(13)并考虑插值曲线的保形性, 结合图 2 和图 3 可直观地得到如下  $t_{i+1}$  应满足的条件:

①  $t_{i+1} \geq \bar{t}_i$ .

②  $t_{i+1} < \bar{t}_{i+1}$ .

③ 若  $\alpha_i = 0$ , 则  $t_{i+1} = \bar{t}_i$ .

④ 若  $\alpha_i \neq 0$  且  $i$  对应无拐段, 则应取  $t_{i+1}$  使得

$$d_{i,2} \text{ 在直线段 } \overline{p_i q_i} \text{ 上且 } d_{i,2} \neq q_i \quad (14)$$

$$d_{i+1,1} \text{ 在直线段 } \overline{q_i p_{i+1}} \text{ 上且 } d_{i+1,1} \neq p_{i+1} \quad (15)$$

其中,  $q_i$  是过点  $p_i$  以  $v_i$  为方向的直线与过点  $p_{i+1}$  以  $v_{i+1}$  为方向的直线的交点(见图 4),  $q_i$  的存在性由条件式(6)保证.

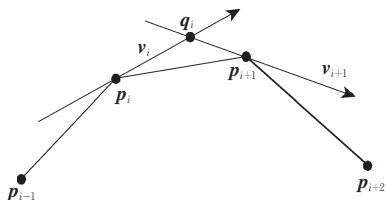


图 4

⑤ 若  $\alpha_i \neq 0$  且  $i$  对应有拐段, 则应取  $t_{i+1}$  使得

$$\langle d_{i,2} - d_{i-1}, v_{i+1} \rangle \neq \pi \text{ 且与 } \langle p_{i+1} - p_i, v_{i+1} \rangle \text{ 同号} \quad (16)$$

$$r_i \text{ 在直线段 } \overline{p_i p_{i+1}} \text{ 上且 } r_i \neq p_i, p_{i+1} \quad (17)$$

其中,  $r_i$  是过点  $d_{i,2}$  和  $d_{i+1,1}$  的直线与过点  $p_i$  和  $p_{i+1}$  的直线的交点(见图 5).

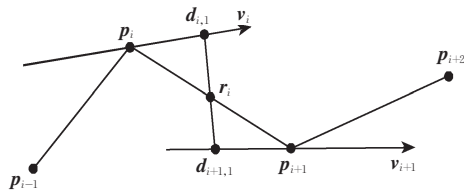


图 5

下面在  $t_{i-1}, t_i < \bar{t}_i$  的前提下, 根据上述条件分两步求出  $t_{i+1}$  的取值范围: 先求出由条件①, ③~⑤确定的取值范围, 然后求出由条件②进一步

确定的取值范围.

首先考虑条件式(14). 由式(12)的第 2 式得

$$d_{i,2} - p_i = \frac{t_{i+1} - \bar{t}_i}{\bar{t}_i - t_i} (p_i - d_{i,1}). \text{ 记} \quad (18)$$

$$x_i = t_{i+1} - \bar{t}_i, \quad a_i = \frac{|q_i - p_i|}{|p_i - d_{i,1}|} \quad (18)$$

则条件式(14)等价于

$$0 \leq x_i < (\bar{t}_i - t_i) a_i \quad (19)$$

接着考虑条件式(16), 为此可利用叉乘  $(d_{i,2} - d_{i-1}) \times v_{i+1}$  和  $(p_{i+1} - p_i) \times v_{i+1}$ . 由于仅牵涉到平面向量的叉乘, 本文的叉乘结果均用带符号的标量表示, 即令  $u \times v = |u| |v| \sin(\langle u, v \rangle)$ . 由式(12)的第 1, 2 式得

$$d_{i,2} - d_{i-1} = p_i - d_{i,1} + \frac{t_{i+1} - \bar{t}_i}{\bar{t}_i - t_i} (p_i - d_{i,1}) - \frac{t_{i+1} - \bar{t}_i}{\bar{t}_i - t_{i-1}} (d_{i,1} - d_{i-2}) \quad (20)$$

记

$$E_i = \frac{1}{\bar{t}_i - t_i} (p_i - d_{i,1}) \times v_{i+1} - \frac{1}{\bar{t}_i - t_{i-1}} (d_{i,1} - d_{i-2}) \times v_{i+1},$$

$$F_i = (p_i - d_{i,1}) \times v_{i+1}, \quad G_i = (p_{i+1} - p_i) \times v_{i+1} \quad (21)$$

则当  $\alpha_i \neq 0$  时, 条件式(16)等价于

$$E_i x_i + F_i \neq 0 \text{ 且 } (E_i x_i + F_i) G_i > 0 \quad (22)$$

最后考虑条件式(15)和(17), 为此令  $s_i = (d_{i,2} - d_{i-1}) \times (p_{i+1} - d_{i,2})$ . 由式(12)的第 2 式得

$$p_{i+1} - d_{i,2} = (p_{i+1} - p_i) - \frac{t_{i+1} - \bar{t}_i}{\bar{t}_i - t_i} (p_i - d_{i,1}) \quad (23)$$

于是根据式(20)和(23),  $s_i$  是关于  $x_i$  的二次函数:

$$s_i = s_i(x_i) = A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i \quad (24)$$

其中,  $x_i$  在式(18)中定义,

$$A_i = \frac{1}{(\bar{t}_i - t_{i-1})(\bar{t}_i - t_i)} (d_{i,1} - d_{i-2}) \times (p_i - d_{i,1}),$$

$$B_i = \frac{1}{\bar{t}_i - t_i} (p_i - d_{i,1}) \times (p_{i+1} - p_i) -$$

$$\frac{1}{\bar{t}_i - t_{i-1}} (d_{i,1} - d_{i-2}) \times (p_{i+1} - p_i),$$

$$C_i = (p_i - d_{i,1}) \times (p_{i+1} - p_i).$$

注意到  $\alpha_i = 0 \Leftrightarrow s_i(0) = 0$ , 于是结合图 4 和图 5 不难直观地得到, 当  $\alpha_i \neq 0$  时, 在条件式(14)成立的情况下, 条件式(15)成立当且仅当  $t_{i+1}$  使得

$$s_i(x_i) s_i(0) > 0 \quad (25)$$

在条件(16)成立的情况下, 条件(17)成立当且仅当  $t_{i+1}$  使得

$$s_i(x_i) s_i(0) < 0 \quad (26)$$

于是, 由式(19)、(22)、(25)和式(26)知,  $t_{i+1}$  应满足

的条件①,③~⑤等价于如下条件:

$$(I) x_i \geq 0$$

$$(II) \text{ 若 } s_i(0)=0, \text{ 则 } x_i=0.$$

(III) 若  $i$  对应无拐段且  $s_i(0) \neq 0$ , 则  $s_i(x_i)s_i(0) > 0$  且  $x_i < (\bar{t}_i - t_i)a_i$ , 其中  $a_i$  由式(18)定义.

(IV) 若  $i$  对应有拐段且  $s_i(0) \neq 0$ , 则  $s_i(x_i)s_i(0) < 0$ ,  $E_i x_i + F_i \neq 0$  且  $(E_i x_i + F_i)G_i > 0$ , 其中  $E_i, F_i, G_i$  由式(21)定义.

根据与式(24)对应的关于  $x_i$  的二次方程

$$A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i = 0 \quad (27)$$

的根的不同情况,可得到在条件(I)~(IV)(即条件①,③~⑤)限制下  $t_{i+1}$  的取值范围如下:

$$(a) \text{ 若 } C_i = 0 (\text{此时 } s_i(0) = 0), \text{ 则取 } t_{i+1} = \bar{t}_i.$$

(b) 若  $C_i \neq 0$  且方程(27)仅有一个正根  $x_{i,1}$ , 则取

$$\begin{cases} \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + \min\{x_{i,1}, (\bar{t}_i - t_i)a_i\}, & i \text{ 对应无拐段} \\ t_{i+1} > \bar{t}_i + x_{i,1}, & i \text{ 对应有拐段} \end{cases}$$

(c) 若  $C_i \neq 0$  且方程(27)有两个不同的正根  $x_{i,1}$  和  $x_{i,2}$ , 设  $x_{i,1} < x_{i,2}$ , 则取

$$\begin{cases} \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + \min\{x_{i,1}, (\bar{t}_i - t_i)a_i\} \text{ 或} \\ \bar{t}_i + x_{i,2} < t_{i+1} < \bar{t}_i + (\bar{t}_i - t_i)a_i, & i \text{ 对应无拐段} \\ \bar{t}_i + x_{i,1} < t_{i+1} < \bar{t}_i + x_{i,2}, & i \text{ 对应有拐段} \end{cases}$$

(d) 若  $C_i \neq 0$  且方程(27)有两个重正根  $x_{i,1} = x_{i,2}$ , 则取

$$\begin{cases} t_{i+1} \neq \bar{t}_i + x_{i,1} \text{ 且 } \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + (\bar{t}_i - t_i)a_i, & i \text{ 对应无拐段} \\ t_{i+1} \text{ 的取值范围为空集}, & i \text{ 对应有拐段} \end{cases}$$

(e) 除(a)~(d)的其它情况下,取

$$\begin{cases} \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + (\bar{t}_i - t_i)a_i, & i \text{ 对应无拐段} \\ t_{i+1} \text{ 的取值范围为空集}, & i \text{ 对应有拐段} \end{cases}$$

(f) 若  $C_i \neq 0$  且  $i$  对应有拐段,在上述各种情况下  $t_{i+1}$  的取值还应满足如下条件:

$$\begin{cases} t_{i+1} < \bar{t}_i - F_i/E_i, & G_i E_i < 0 \text{ 且 } E_i \neq 0 \\ t_{i+1} > \bar{t}_i - F_i/E_i, & G_i E_i > 0 \text{ 且 } E_i \neq 0. \\ t_{i+1} \text{ 的取值范围为空集}, & F_i G_i < 0 \text{ 且 } E_i = 0 \end{cases}$$

上述条件中的  $a_i$  由式(18)定义. 在情况(d)、(e)和(f)中,当  $t_{i+1}$  的取值范围为空集时,可在  $p_i$  与  $p_{i+1}$  之间加上一个数据点. 具体处理方法留到后面讨论.

下面在由条件①,③~⑤的限制下  $t_{i+1}$  的取值范围中进一步考虑条件②对  $t_{i+1}$  取值的限制. 为此,设条件①,③~⑤已成立,即条件式(13)中除了  $t_{i+1} < \bar{t}_{i+1}$  外其它条件已成立.

由式(12)中的第3式得

$$\begin{aligned} t_{i+1} < \bar{t}_{i+1} &\Leftrightarrow t_{i+1} - t_i < (\bar{t}_i - t_i) \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|} \\ &\Leftrightarrow t_{i+1} - \bar{t}_i < (\bar{t}_i - t_i) \left( \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|} - 1 \right), \end{aligned}$$

于是问题转化为在条件①,③~⑤的限制下,求满足下式的  $t_{i+1}$  的取值范围

$$t_{i+1} - \bar{t}_i < b_i (\bar{t}_i - t_i) \quad (28)$$

其中,  $b_i = \frac{|d_{i+1,1} - d_{i-1}|}{|d_{i,2} - d_{i-1}|}$ . 若  $\alpha_i = 0$ , 则在条件①,

③~⑤的限制下,只能取  $t_{i+1} = \bar{t}_i$ , 显然此时式(28)成立. 若  $\alpha_i \neq 0$ , 则在条件①,③~⑤限制下有

$$d_{i+1,1} = d_{i,2} + b_i (d_{i,2} - d_{i-1}) \quad (29)$$

而且有  $(d_{i,2} - d_{i-1}) \times v_{i+1} \neq 0$ , 注意到  $d_{i+1,1}$  在过点  $p_{i+1}$  以  $v_{i+1}$  为方向的直线上, 于是由式(28)和(29)

知  $t_{i+1}$  应满足  $t_{i+1} - \bar{t}_i < (\bar{t}_i - t_i) \frac{(p_{i+1} - d_{i,2}) \times v_{i+1}}{(d_{i,2} - d_{i-1}) \times v_{i+1}}$ ,

将  $(d_{i,2} - d_{i-1}) \times v_{i+1} = E_i x_i + F_i$  和式(23)代入得

$$x_i < \frac{-F_i x_i + \bar{G}_i}{E_i x_i + F_i} \quad (30)$$

其中,  $x_i$  在式(18)中定义,  $\bar{G}_i = (\bar{t}_i - t_i)G_i$ ,  $E_i, F_i, G_i$  由式(21)定义. 根据数据点切向的限制条件式(6), 当  $\alpha_i \neq 0$  时总有  $\bar{G}_i \neq 0$ . 显然, 式(30)等价于

$$(E_i x_i + F_i)(E_i x_i^2 + 2F_i x_i - \bar{G}_i) < 0 \quad (31)$$

于是根据如下关于  $x_i$  的二次方程

$$E_i x_i^2 + 2F_i x_i - \bar{G}_i = 0 \quad (32)$$

的系数的不同情况,可得到如下的在条件①,③~⑤的限制下当  $\alpha_i \neq 0$  时由式(31)所确定的  $t_{i+1}$  的取值范围,该取值范围也就是在条件①,③~⑤的限制下当  $\alpha_i \neq 0$  时由条件②进一步确定的  $t_{i+1}$  的取值范围. 显然下面各情况中仍应限制  $t_{i+1} \geq t_i$ :

(i) 若  $E_i = 0$ , 则当  $i$  对应无拐段,或  $i$  对应有拐段且  $F_i \bar{G}_i > 0$  时,取  $\bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + \bar{G}_i/2F_i$ ; 当  $i$  对应有拐段且  $F_i \bar{G}_i < 0$  时,  $t_{i+1}$  的取值范围为空集.

(ii) 若  $E_i \neq 0$  且  $E_i F_i \geq 0$ , 则当  $i$  对应无拐段,或  $i$  对应有拐段且  $E_i \bar{G}_i > 0$ ,  $F_i \neq 0$  时,取  $\bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + x_{i,1}$ , 其中  $x_{i,1}$  为此时方程(32)的唯一正根; 当  $i$  对应有拐段且  $E_i \bar{G}_i > 0$ ,  $F_i = 0$  时,取  $\bar{t}_i < t_{i+1} < \bar{t}_i + x_{i,1}$ , 其中  $x_{i,1}$  为此时方程(32)的唯一正根; 当  $i$  对应有拐段且  $E_i \bar{G}_i < 0$  时,  $t_{i+1}$  的取值范围为空集.

(iii) 若  $E_i \neq 0$  且  $E_i F_i < 0$ , 则当  $i$  对应无拐段,或  $i$  对应有拐段且  $E_i \bar{G}_i < 0$  时,取

$$\begin{cases} \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i + x_{i,1} \text{ 或 } \bar{t}_i - F_i/E_i < t_{i+1} < \bar{t}_i + x_{i,2}, \\ \text{方程(32)有两个正根 } x_{i,1} \leq x_{i,2}; \\ \bar{t}_i \leq t_{i+1} < \bar{t}_i - F_i/E_i, \text{ 否则} \end{cases}$$

当  $i$  对应有拐段且  $E_i \bar{G}_i > 0$  时,取  $\bar{t}_i - F_i/E_i < t_{i+1} <$

$\bar{t}_i + x_{i+1}$ , 其中,  $x_{i+1}$  为此时方程(32)的唯一正根.

取在条件①, ③~⑤的限制下的  $t_{i+1}$  的取值范围(见(a)~(f))与在条件②进一步限制下的  $t_{i+1}$  的取值范围(见(i)~(iii))的交集即得到节点  $t_{i+1}$  的取值范围. 由于  $t_{i+1}$  有一定的取值范围, 可利用  $t_{i+1}$  的取值进一步控制插值曲线的形状.

应注意到, 当  $i$  对应有拐段时,  $t_{i+1}$  的取值范围可能为空集, 此时可在  $p_i$  与  $p_{i+1}$  之间加上一个数据点. 具体做法是, 取  $t_{i+1} = \bar{t}_i$ , 使得曲线段  $c(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  在端点  $t_{i+1}$  处插值数据点  $p_i$ , 然后在直线段  $\overline{p_i p_{i+1}}$  上加取一个数据点  $\hat{p}_i$ , 并取一个合适的单位切向  $\hat{v}_i$ , 使得  $\langle \hat{v}_i, p_{i+1} - p_i \rangle$  与  $\langle p_{i+1} - p_i, p_{i+2} - p_{i+1} \rangle$  同号, 然后按前面的方法继续构造插值曲线.

## 5 例 子

下面给出用本文的方法构造满足数据点切向约束的二次 B 样条插值曲线的一些例子, 并通过这些例子将本文方法与其它一些插值方法进行比较. 在下面的例子中, 在插值曲线两端点  $p_1$  和  $p_n$  处的切向  $v_1$  和  $v_n$  预先给定, 除两端点外其余数据点处的切向按下式(33)或(34)计算:

$$T_i = (1 - \beta_i) \Delta p_{i-1} + \beta_i \Delta p_i, \quad v_i = \frac{T_i}{|T_i|}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (33)$$

$$T_i = (1 - \gamma_i) \frac{\Delta p_{i-1}}{|\Delta p_{i-1}|} + \gamma_i \frac{\Delta p_i}{|\Delta p_i|}, \quad v_i = \frac{T_i}{|T_i|}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (34)$$

其中,  $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $0 \leq \beta_i, \gamma_i \leq 1$ . 显然,  $\beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \theta_i$ ,  $\beta_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ ,  $\gamma_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \theta_i$  且  $\gamma_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ . 除了本文的插值方法, 下面例子中其它插值方法的参数化与节点向量的选取均相一致, 而且端点约束条件均为指定两端的切线.

**例 1.** 取两组数据点. 第一组从一个五线谱高音谱号曲线上取  $n = 23$  个数据点:  $p_1 = (77.2, 102.7)$ ,  $p_2 = (75.3, 101.0)$ ,  $p_3 = (77.0, 97.5)$ ,  $p_4 = (81.5, 95.9)$ ,  $p_5 = (85.4, 98.0)$ ,  $p_6 = (86.4, 100.0)$ ,  $p_7 = (87.3, 09.6)$ ,  $p_8 = (85.5, 132.3)$ ,  $p_9 = (82.0, 150.0)$ ,  $p_{10} = (79.6, 172.9)$ ,  $p_{11} = (82.3, 188.7)$ ,  $p_{12} = (87.1, 175.2)$ ,  $p_{13} = (81.4, 158.5)$ ,  $p_{14} = (70.5, 144.1)$ ,  $p_{15} = (64.5, 133.6)$ ,  $p_{16} = (67.4, 118.8)$ ,  $p_{17} = (85.3, 111.3)$ ,  $p_{18} = (101.1, 123.6)$ ,  $p_{19} = (96.7, 138.0)$ ,  $p_{20} = (82.0, 141.9)$ ,  $p_{21} = (75.7, 134.9)$ ,  $p_{22} = (76.8, 127.5)$ ,  $p_{23} = (81.3, 125.3)$ . 第二组取一个连续之字形折线的顶

点作为数据点:  $n = 9$ ,  $p_1 = (10, 125)$ ,  $p_2 = (20, 150)$ ,  $p_3 = (40, 100)$ ,  $p_4 = (60, 150)$ ,  $p_5 = (80, 100)$ ,  $p_6 = (100, 150)$ ,  $p_7 = (120, 100)$ ,  $p_8 = (140, 150)$ ,  $p_9 = (150, 125)$ . 对每一组数据点分别用本文的方法和均匀参数化、累加弦长参数化、向心参数化、Foley 参数化方法以及文献[8]中对应切向约束的参数化方法构造二次 B 样条插值曲线, 结果见图 6 和图 7, 其中对于同一组数据点所有的插值方法都取一样的端点条件, 而且本文的方法采用式(34)确定数据点处的切向  $v_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ), 并且取  $t_{i+1}$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) 为其相应取值区间的中点(当有两个取值区间时, 取值较小的区间中点).

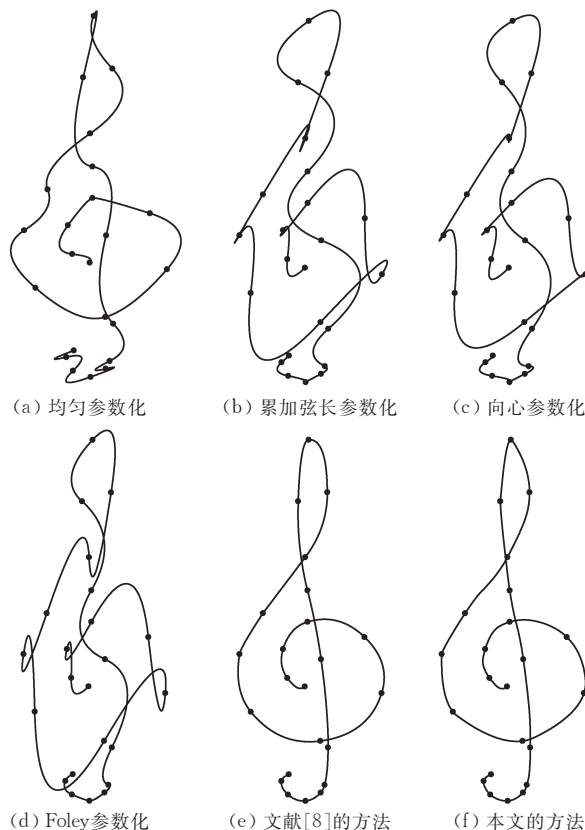


图 6 用各种插值方法构造的二次 B 样条插值曲线的比较(1)

图 6 和图 7 表明, 传统的插值方法由于预先参数化和确定节点向量, 难以控制插值曲线在数据点处的切向, 当数据点分布不均匀或由数据点确定的多边形拐点较多时, 可能导致插值曲线形状失控(见图 6(a)~(d)和图 7(a)~(d)); 文献[8]的参数化方法利用了数据点处的切向控制, 在数据点分布所建议的曲线形状拐点不集中且在拐点处弯度较小的情况下, 能较好控制插值曲线的形状(见图 6(e)), 但该方法限制数据点必须与曲线段连接点重合, 这样在拐点较多或在拐点处弯度较大的情况下, 有可能致使插值曲线在拐点处形状不自然(见图 7(e)); 本



文的方法由于充分利用了参数化和节点向量的自由度,使得插值曲线在数据点处的切向可预先确定,而且允许曲线段的连接点位置自然调节,不必与数据点重合,从而即使在拐点较多且在拐点处弯度较大的情况下也能有效地控制插值曲线,使之具有预期的形状(见图 6(f)和图 7(f)).

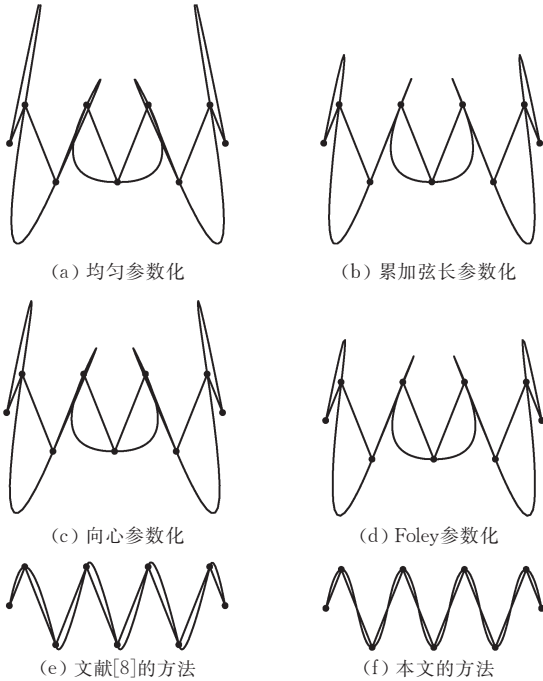


图 7 用各种插值方法构造的二次 B 样条插值曲线的比较(2)

**例 2.** 取  $n=19$  个数据点:  $p_1=(40,200)$ ,  $p_2=(50,200)$ ,  $p_3=(50,240)$ ,  $p_4=(100,240)$ ,  $p_5=(100,210)$ ,  $p_6=(80,210)$ ,  $p_7=(80,220)$ ,  $p_8=(70,220)$ ,  $p_9=(70,200)$ ,  $p_{10}=(100,200)$ ,  $p_{11}=(100,160)$ ,  $p_{12}=(150,160)$ ,  $p_{13}=(150,190)$ ,  $p_{14}=(130,190)$ ,  $p_{15}=(130,180)$ ,  $p_{16}=(120,180)$ ,  $p_{17}=(120,200)$ ,  $p_{18}=(150,200)$ ,  $p_{19}=(150,210)$ . 一方面,在不同的数据点切向约束条件下用本文的方法构造二次 B 样条插值曲线,结果见图 8,其中 3 条插值曲线在数据点处的切向约束分别是:用式(33)确定  $v_i$ ,其中  $\beta_i$  根据五点方法<sup>[8]</sup> 计算(对应点划线);用式(33)确定  $v_i$ ,其中  $\beta_i=0.52(i=2,3,\dots,n-1)$ (对应实线);用式(34)确定  $v_i$ ,其中  $\gamma_i=0.5(i=2,3,\dots,n-1)$ (对应虚线). 三条曲线的节点  $t_{i+1}(i=2,3,\dots,n-1)$  均取其相应取值区间的中点(当有两个取值区间时,取值较小的区间中点). 另一方面,用式(34)确定  $v_i$ ,其中  $\gamma_i=0.5, i=2,3,\dots,n-1$ ,两端切向  $v_1$  和  $v_n$  也给定,在数据点切向约束条件不变的情况下,取不同节点  $t_{i+1}$  构造二次 B 样条插值曲线,结果见图 9. 其中,点划线对应的  $t_{i+1}=0.8 \times l_{i+1}+0.2 \times h_{i+1}$ ,实线对应的  $t_{i+1}=0.5(l_{i+1}+$

$h_{i+1})$ ,虚线对应的  $t_{i+1}=0.3 \times l_{i+1}+0.7 \times h_{i+1}$ ,这里  $[l_{i+1}, h_{i+1})$  或  $(l_{i+1}, h_{i+1})$  为  $t_{i+1}$  的取值区间(当有两个取值区间时,为值较小的区间).

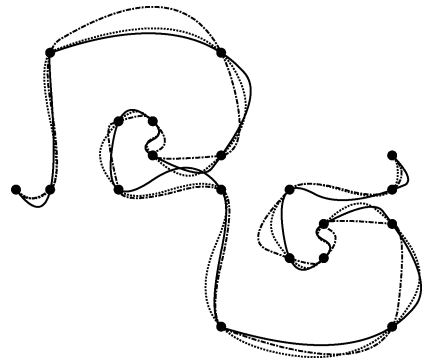


图 8 用本文的方法构造的满足不同的数据点切向约束的二次 B 样条插值曲线

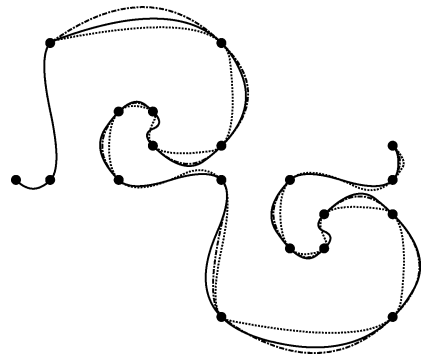


图 9 用本文的方法构造的满足相同的数据点切向约束但节点向量不同的二次 B 样条插值曲线

图 8 表明,数据点的切向约束具有直观地控制插值曲线形状的能力. 图 9 表明,在相同的数据点切向约束条件下,利用节点  $t_{i+1}$  还可进一步调控插值曲线的形状.

**例 3.** 取  $n=12$  个数据点:  $p_1=(165,150)$ ,  $p_2=(75,150)$ ,  $p_3=(75,225)$ ,  $p_4=(150,225)$ ,  $p_5=(150,165)$ ,  $p_6=(90,165)$ ,  $p_7=(90,210)$ ,  $p_8=(135,210)$ ,  $p_9=(135,180)$ ,  $p_{10}=(105,180)$ ,  $p_{11}=(105,195)$ ,  $p_{12}=(120,195)$ . 分别用本文的方法和均匀参数化、准均匀参数化、累加弦长参数化、向心参数化以及 Foley 参数化方法构造二次 B 样条插值曲线,考察改变一个数据点的位置对插值曲线形状的影响,结果见图 10,其中所有的插值方法都取一样的端点条件,而且本文的方法采用式(34)确定数据点处的切向  $v_i$ ,其中  $\gamma_i=0.5(i=2,3,\dots,n-1)$ ,并且取  $t_{i+1}(i=2,3,\dots,n-1)$  为其相应取值区间的中点(当有两个取值区间时,取值较小的区间中点). 对于每种插值方法都产生三条插值曲线:实线为对应原数据点的插值曲线;点划线为将数据点



$p_8$  修改为  $\bar{p}_8 = (120, 200)$  后的插值曲线, 虚线为将数据点  $p_4$  修改为  $\bar{p}_4 = (170, 265)$  后的插值曲线。

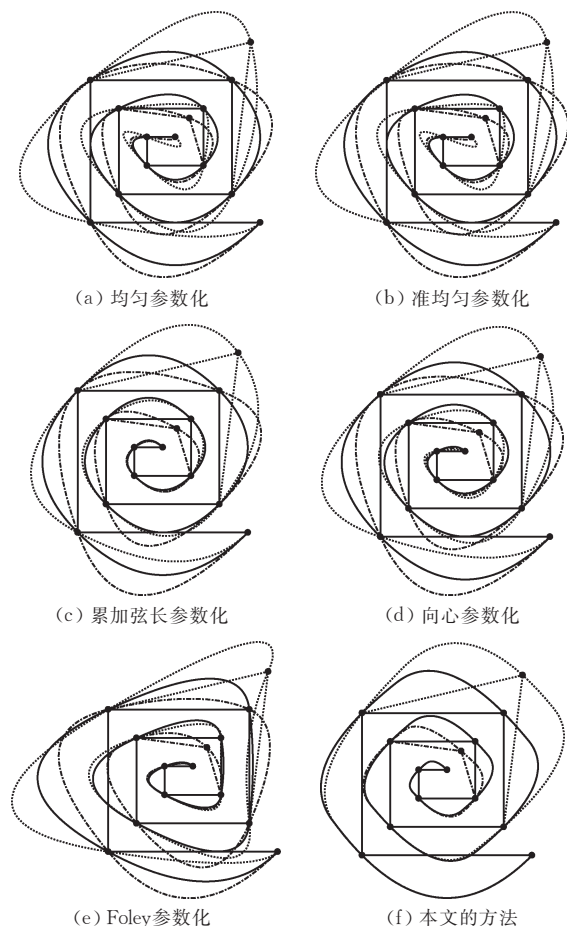


图 10 改变一个数据点的位置对二次 B 样条插值曲线形状的影响

图 10 表明, 用本文的方法构造的二次 B 样条插值曲线对于数据点的改变具有较好的局部性质, 而用传统的插值方法构造的插值曲线局部性能差, 一个数据点的改变会引起整条曲线的较大改变。

## 6 结 论

以往的整体插值方法往往预先确定数据点的参数化和节点向量, 通过求解线性方程组来确定插值曲线的控制顶点序列, 所构造的插值曲线的形状有时难以预期。本文给出的二次 B 样条曲线插值方法充分利用数据点的参数化和节点向量的自由度, 通过数据点处的切向约束来直观地控制插值曲线的形状, 使得所构造的插值曲线在各数据点具有指定切向, 达到预期形状。本文方法允许插值曲线各段的连

接点与数据点不一致, 使得二次 B 样条插值曲线的形状更自然。

用本文方法构造插值曲线是一个递推过程, 在插值过程中根据数据点及其切向的约束条件递推地确定数据点的参数值、节点和控制顶点, 不必解线性方程组。

用本文方法构造二次 B 样条插值曲线时, 在满足数据点切向约束的条件下, 还有一定的自由度: 可利用节点  $t_{i+1}$  进一步调控插值曲线的形状。另外, 用本文的方法构造的二次 B 样条插值曲线对于数据点的改变具有较好的局部性质, 这种性质在几何设计中是十分有用的, 而用传统的插值方法构造的插值曲线不具有局部性质。通过实验结果的比较, 本文方法在插值曲线的形状控制、局部性等方面都体现出良好的性质。

以用本文方法构造的具有预期形状的二次 B 样条插值曲线为基础, 进一步构造更高阶的可控制形状的 B 样条插值曲线, 是今后要研究的内容。

## 参 考 文 献

- [1] Lee E T Y. Choosing nodes in parametric curve interpolation. CAD, 1989, 21(6): 363-370
- [2] Foley T A, Nielson G M. Knot selection for parametric spline interpolation//Lyche T, Schumaker L L eds. Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design. San Diego: Academic Press, 1989: 261-272
- [3] Lim C G. A universal parametrization in B-spline curve and surface interpolation. CAGD, 1999, 16(5): 407-422
- [4] Lim C G. Universal parametrization in constructing smoothly-connected B-spline surfaces. CAGD, 2002, 19(6): 465-478
- [5] Cheng F H, Wang X F, Barsky B A. Quadratic B-spline curve interpolation. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41(1-2): 39-50
- [6] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1997
- [7] Ahlberg J H, Nilson E N, Walse J L. The Theory of Splines and Their Applications. New York: Academic Press, 1967
- [8] Pan R J, Yao Z Q. Quadratic B-spline interpolation curves based on dynamic parametrization. Chinese Journal of Computers, 2005, 28(3): 334-342(in Chinese)  
(潘日晶, 姚志强. 基于动态参数化的二次 B 样条插值曲线. 计算机学报, 2005, 28(3): 334-342)
- [9] deBoor C. A Practical Guide to Spline. New York: Springer-Verlag, 1978



**PAN Ri-Jing**, born in 1955, professor. Her major research interests include CAGD, computational geometry, algorithm design and analysis, etc.

**Background**

This paper explores the interpolation problem of B-spline curves that is extensively applied in the fields of geometric modeling, computer aided geometric design and reverse engineering etc. Though B-spline interpolation problem has been widely investigated, it remains to be further explored that how to fully utilize the degrees of freedom provided by knot vector and parameterization on data points to control the shapes of the interpolation curves effectively. In this paper, a new interpolation method is proposed to construct quadratic B-spline interpolation curves that satisfy the tangent constraints on data points. The method fully utilizes the degrees of freedom provided by knot vector and parameterization on data points to control the shapes of interpolation curves intuitively.

This research is a part of the project — Applications of transformation matrices of B-spline bases in curve and surface modeling — Supported by Nature Science Foundation of Fujian province under granted No. A0610007 and the project — On several key techniques for the fitting of B-spline

curves and surfaces — supported by Science Foundation of Education department of Fujian Province under grant No. JA05207. The former project probes into the representations and applications of transformation matrices of B-spline bases in curve and surface modeling, including the interpolation and approximation, data reduction and multiresolution analysis for B-spline curves and surfaces. The latter project probes into several key problems in the fitting of B-spline curves and surfaces, including parameterization, knot vector, object function, and error estimation etc. The interpolation problem of B-spline curves is a common basic aspect for two projects. The research groups of the projects have obtained some results on the representation of transformation matrices of B-spline bases and on the fitting of B-spline curves and surfaces, including a method for constructing quadratic B-spline interpolation curves by dynamic parameterization. Based on these results, this paper provides a further result on B-spline interpolation curves.