

# 一种基于 Fourier-小波矩的 PET 图像重建方法

胡轶宁 周 健 罗立民

(东南大学计算机科学与工程学院影像科学与技术实验室 南京 210096)

**摘 要** 正电子发射断层图像(PET)重建问题是一种不适定问题,通常需要采用正则化方法以抑制噪声,提高重建质量.本文提出一种新的非正则化重建方法,即基于 Fourier-小波基函数的特征重建算法. Fourier-小波基函数结合了小波基函数和 Fourier 调和函数的特征,使我们便于对其进行小波分析和 Fourier 分析.在本文的算法中,我们采用迭代方法,计算图像的 Fourier-小波矩(FWM),并由 FWM 恢复图像.此外我们利用 Fourier-小波基函数的旋转不变性节省算法存储空间,简化计算,并且利用此性质,推导出一种类似 Row-Action(RA)方法的快速收敛算法,以提高收敛速度.我们将 FWM 算法同几种常用算法进行了比较,实验结果表明,FWM 算法的重建效果同传统的 MAP 算法接近,具有较好的应用前景.

**关键词** 正电子发射断层图像(PET);重建;小波;傅立叶;矩  
**中图法分类号** TP391

## A New PET Reconstruction Method Based on Fourier-Wavelet Moment

HU Yi-Ning ZHOU Jian LUO Li-Min

(Laboratory of Image Science and Technology, School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096)

**Abstract** The problem of Positron emission tomography(PET) image reconstruction is well-known ill-posed, thus regularization methods are usually considered to suppress the noise effect. In this paper, a new non-regularization method is proposed, which is a feature-based reconstruction method using Fourier-Wavelet basis. The Fourier-Wavelet basis combines Fourier harmonic and Wavelet function, and provides us with convenience performing both Wavelet and Fourier analysis. In order to obtain the reconstructions, we only have to recover the Fourier-Wavelet moment(FWM) from the measurements. To achieve the FWMs the authors employ iterative method. With the aid of the rotation invariance property of the proposed basis, both the online memory storage and computational costs can be reduced. In addition, the property allows us to generate a Row-Action(RA) like fast convergent algorithm. In experiment, the proposed method is compared with several others. The results suggest that the proposed method offer good reconstruction quality comparable to conventional MAP method.

**Keywords** Positron Emission Tomography(PET); reconstruction; wavelet; Fourier; moment

## 1 引 言

PET(Positron Emission Tomography),即正电

子发射断层图像,主要用于医学诊断和临床研究中的肿瘤以及癌症的早期预测与防治中.常见的 PET 图像重建算法,大致可分为解析法和迭代法二类.解析法的代表算法是滤波反投影算法(FBP)<sup>[1]</sup>,其实

现较为简单,因此被广泛应用于 CT 重建.但是通常 PET 的扫描数据信噪比较低,利用 FBP 算法重建得到的结果较差.

迭代法又可分为代数迭代法和统计类方法.其中统计类方法应用较为广泛.统计类方法在系统模型、统计模型等诸多方面优于解析类算法.最早的统计类迭代算法是 Shepp 和 Vardi<sup>[2]</sup> 于 1982 年提出的最大似然期望最大化算法(MLEM).MLEM 算法是基于像素的迭代算法,每个像素值被看作待估计参数,通过不断迭代更新,使似然函数逼近最大,由此得到极大似然参数估计值.这样的思想为后续的各种改进算法所采用.但是 MLEM 算法的缺点在于收敛速度缓慢且不易确定停止条件,在实际应用中通常需要提前设定迭代次数<sup>[3]</sup>.此外,由于 PET 重建问题是一个不适定问题,在观测数据信噪比较低的情况下,MLEM 算法在迭代过程中会出现似然值增大,图像效果反而变得不稳定的情况.为了改善重建效果,通常需要在求解过程中采用正则化方法(添加惩罚项).其中最具代表性的就是最大后验概率方法(MAP).MAP 算法加入了图像空间先验(惩罚项),使得算法的收敛受到图像空间先验的约束.多数图像空间先验可以通过将图像看作二维 Gibbs 随机场推导而得,在这个模型中,图像的许多相关信息诸如线段、边界可通过对邻域结构的分析来确定.这样,利用邻域信息就可以构造出适当的惩罚项,从而达到抑制噪声或者增强边界的效果.常用的先验项有二次先验<sup>[4]</sup>,Green<sup>[5]</sup>,TV<sup>[6]</sup>等.

但是对于以 MAP 算法为代表的统计类方法的缺点在于:(1)不同的正则项对于图像重建的效果具有不同的影响,在实际应用中需要跟据不同的情况选择合适的图像空间先验,而这种选择通常需要借助人工干预;(2)在实际应用中,正则项的参数调节也是不容忽视的问题,参数过小导致正则项对重建结果的约束力不足,而参数过大又会引起算法不稳定.确定正则项的参数有二种途径:一是人工干预,二是加入自适应技术<sup>[7]</sup>,后者会给重建过程增加额外的计算量.鉴于上述缺陷,一些文献中提出了基于图像特征的重建方法,即在不使用惩罚项的前提下对图像特征进行重建,随后通过图像特征恢复图像.其中较有代表性的是基于矩的图像重建方法.

Milanfar<sup>[8]</sup>将 Legendre 矩应用断层图像重建,算法用二维 Legendre 矩描述图像,通过迭代重建矩信息并恢复图像.但是 Legendre 多项式作为全局多项式,在局部描述能力上有所欠缺,而且计算相对复

杂.同 Legendre 多项式相比,小波变换通过伸缩和平移运算对信号逐步进行多尺度细化,具有较高的局部描述能力,非常适合提取图像的局部特征. Raheja<sup>[10]</sup>将多重网格和多分辨率分析应用于 PET 重建问题,并结合 EM 算法,提出了基于小波的多分辨率 EM 重建算法. Lee<sup>[11]</sup>将小波收缩引入 EM 算法,并利用有序子集(ordered subset)思想提高算法的收敛速度.

本文利用 Fourier-小波矩(FWM)进行图像重建,FWM 最早由 Shen<sup>[12]</sup>等提出并被应用于模式识别领域,在图像描述和抗噪声等方面均具有良好的特性.FWM 兼具小波变换和 Fourier 变换的优点,不仅具有较好的局部特性,而且可以进行频域分析与处理.本文推导证明了 FWM 的一些性质,例如在重建问题中的旋转不变性,利用此性质,可以有效减少数据存储容量,简化计算.本文给出了 FWM 和观测数据之间的关系,并由此设计了一种新的类似 RA 的基于特征分块迭代算法,对图像进行矩重建,最终利用图像的矩信息恢复图像.同传统的矩重建算法不同,分块迭代思想的引入使得算法的收敛速度加快.此外,为了改善重建效果,本文还根据 Fourier 变换的特性,在迭代过程中加入了中间滤波环节.文章的第 2 节介绍了 FWM 与重建模型;第 3 节是模型优化与求解;第 4 节对实验结果进行了分析;最后对文章进行了总结.

## 2 FWM 与重建模型

理想情况下 PET 观测数据  $y_\theta(s)$  可以由理想线积分(Radon 变换)得到:

$$y_\theta(s) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \phi) \delta(s - r \cos(\theta - \phi)) r dr d\phi, \\ s \in [-1, 1], \theta \in [0, \pi) \quad (1)$$

其中,  $f(r, \phi)$  为放射性同位素浓度分布函数,  $f(r, \phi) \rightarrow [0, R] \times [0, 2\pi)$ ,  $\theta$  为投影方向角度,  $s$  为  $\theta$  方向上检测通道位置,在实际应用中通常  $\theta$  和  $s$  均为离散值.可以记  $\theta = \{\theta_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ ;  $s = \{s_l\}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ .  $I, L$  分别为总投影方向数和每个方向上的检测通道个数.  $\delta$  为狄拉克函数.重建问题的目标即通过观测数据  $\{y_{\theta_i}(s_l) | i = 1, 2, \dots, I; l = 1, 2, \dots, L\}$  恢复浓度分布函数(图像数据)  $f(r, \phi)$ .

假设  $f(r, \phi)$  可以按如下方式分解:

$$f(r, \phi) = g(r)h(\phi) \quad (2)$$

其中,  $g(r)$  为径向分量,  $h(\phi)$  为角度方向分量.我们可以进一步将  $g(r)$  按小波方式展开,即得

$$g(r)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\langle g,\psi_{p,q}\rangle\psi_{p,q}(r)\tag{3}$$

其中,  $\psi_{p,q}(r)$  为小波函数,  $p, q$  分别表示缩放尺度和平移尺度. 本文采用二进离散小波, 其定义如下:

$$\psi_{p,q}(t)=2^{\frac{p}{2}}\psi(2^pt-q)\tag{4}$$

$\psi(t)$  即小波基, 例如 Mexican Hat 小波基:

$$\psi(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}\right)(1-t^2)e^{-t^2/2}\tag{5}$$

实际应用中, 通常采用有限阶小波函数拟合信号, 即

$$g(r)\approx\sum_{p=0}^P\sum_{q=0}^Q\langle g,\psi_{p,q}\rangle\psi_{p,q}(r)\tag{6}$$

其中,  $P, Q$  分别表示最大缩放、平移尺度. 为简便起见, 记  $\psi_{p,q}(r)$  为  $\psi_m(r)$ , 其中  $m=p(Q+1)+q+1$  ( $p=0, 1, \cdots, P; q=0, 1, \cdots, Q$ ), 我们可以将式(6)表示为

$$g(r)\approx\sum_{m=1}^M\alpha_m\psi_m(r)\tag{7}$$

其中,  $\alpha_m=\langle g,\psi_{p,q}\rangle, M=(P+1)(Q+1)$ . 同时, 在角度方向, 可以将  $h(\phi)$  用 Fourier 调和级数展开:

$$h(\phi)=\sum_{n=-N}^N\beta_ne^{-jn\phi}, j=\sqrt{-1}\tag{8}$$

$N$  为最大阶数.

将式(7), 式(8)代入式(2), 可以得到:

$$\begin{aligned} f(r,\phi)&\approx\sum_{m=1}^M\sum_{n=-N}^N\alpha_m\beta_n\psi_m(r)e^{-jn\phi}\\ &\approx\sum_{m=1}^M\sum_{n=-N}^Nc_{m,n}\Psi_{m,n}(r,\phi)\end{aligned}\tag{9}$$

其中,  $c_{m,n}\equiv\alpha_m\beta_n$ , 即 FWM,  $\Psi_{m,n}(r,\phi)\equiv\psi_m(r)e^{-jn\phi}$  为 FWM 基函数.

为了直观地了解 FWM 基函数的形状, 我们给出了不同阶数的 FWM 基函数的函数图形(如图 1). 由图 1 可以看出 FWM 基函数具有局部紧支性, 这是由于小波函数的局部特性, 同时, 因为 Fourier 调和级数的引入使得函数图形具有旋转对称性.

为了得到 FWM 和观测数据之间的关系, 将式(9)代入式(1), 我们得到:

$$\begin{aligned} y_\theta(s)&=\sum_{m=1}^M\sum_{n=-N}^Nc_{m,n}\int_0^1\int_0^{2\pi}\Psi_{m,n}(r,\phi)\delta\cdot\\ &\quad (s-r\cos(\theta-\phi))rdrd\phi\end{aligned}\tag{10}$$

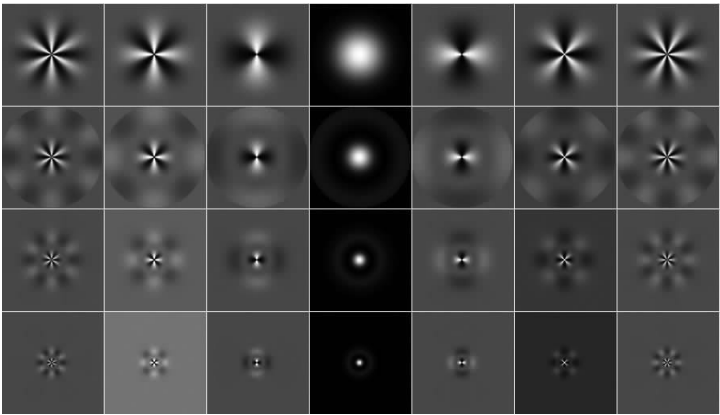


图 1 FWM 基函数的二维视觉效果图(从上至下:  $m=1, 2, 3, 4$ ; 从左至右:  $n=-3, \cdots, 3$ . 每一行具有相同的参数  $m$ ; 每一列具有相同的参数  $n$ )

我们定义

$$A_{m,n}(s,\theta)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\Psi_{m,n}(r,\phi)\delta(s-r\cos(\theta-\phi))rdrd\phi\tag{11}$$

则式(11)可以写作

$$y_\theta(s)=\sum_{m=1}^M\sum_{n=-N}^Nc_{m,n}A_{m,n}(s,\theta)\tag{12}$$

可以证明,  $A_{m,n}(s,\theta)$  具有如下性质.

**性质 1.**  $\theta\in[0,\pi)$  时,  $A_{m,n}(s,\theta)$  具有如下关系式:

$$A_{m,n}(s,\theta)=e^{-jn\theta}A_{m,n}(s,0), A_{m,n}(s,\theta)=\overline{A_{m,-n}(s,\theta)}\tag{13}$$

其证明如下: 将式(9)代入式(11), 即得到

$$\begin{aligned} A_{m,n}(s,\theta)&=e^{-jn\theta}\int_0^1\int_0^{2\pi}\psi_m(r)e^{-jn(\phi-\theta)}\delta\cdot\\ &\quad (s-r\cos(\theta-\phi))rdrd\phi.\end{aligned}$$

作变量代换  $v=\phi-\theta$ , 得到

$$\begin{aligned} A_{m,n}(s,\theta)&=e^{-jn\theta}\int_0^1\int_{-\theta}^{2\pi-\theta}\psi_m(r)e^{-jnv}\delta\cdot\\ &\quad (s-r\cos(-v))rdrdv.\end{aligned}$$

由于  $e^{-jnv}$  是  $[0, 2\pi]$  上的周期函数, 上式可以写作

$$\begin{aligned} A_{m,n}(s,\theta)&=e^{-jn\theta}\int_0^1\int_0^{2\pi}\psi_m(r)e^{-jnv}\delta\cdot\\ &\quad (s-r\cos(0-v))rdrdv,\end{aligned}$$

即

$$A_{m,n}(s,\theta) = e^{-jn\theta} A_{m,n}(s,0).$$

同理,可以证明:

$$A_{m,n}(s,\theta) = \overline{A_{m,-n}(s,\theta)}. \quad \text{证毕.}$$

我们进一步定义:

$$\mathbf{y}_\theta = (y_\theta(s_1), y_\theta(s_2), \dots, y_\theta(s_L))^T \quad (14)$$

变换矩阵

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{1,-N}(s_1, \theta) & A_{1,-N+1}(s_1, \theta) & \cdots & A_{M,N}(s_1, \theta) \\ A_{1,-N}(s_2, \theta) & A_{1,-N+1}(s_2, \theta) & \cdots & A_{M,N}(s_2, \theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,-N}(s_L, \theta) & A_{1,-N+1}(s_L, \theta) & \cdots & A_{M,N}(s_L, \theta) \end{bmatrix} \quad (15)$$

并且定义

$$\mathbf{c} = (c_{1,-N}, c_{1,-N+1}, \dots, c_{1,N}, c_{2,-N}, \dots, c_{M,N})^T \quad (16)$$

则式(12)可以写作

$$\mathbf{y}_\theta = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{c} \quad (17)$$

由性质 1,可以得到以下性质.

**性质 2.** 定义对角阵

$$\mathbf{E}(\theta) = \text{diag}\{e^{jN\theta}, \dots, e^{-jN\theta}, \dots, e^{jN\theta}, \dots, e^{-jN\theta}\} \quad (18)$$

则存在如下关系式:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}(0)\mathbf{E}(\theta) \quad (19)$$

其具体证明较为简单,故此略去. 由性质 1,2 可以得到  $\mathbf{A}(\theta)$  具有旋转不变性. 在下文中,将会利用此性质简化计算,减少数据存储空间.

### 3 模型优化与求解

#### 3.1 加权最小二乘估计

上文所述式(17)是理想情况下的模型,实际应用中,由于噪声的存在,一般不能直接采用式(17)作为求解模型. 通常观测数据被认为服从泊松分布<sup>[2]</sup>, 然而,大多数现代 PET 仪器扫描所得的观测数据需要经过诸如衰减校正、散射校正等校正步骤,经过校正后的数据不再满足泊松分布,其统计特性较为复杂<sup>[13-14]</sup>. Fessler<sup>[15]</sup> 建议采用高斯模型对观测数据进行建模,其表达式如下:

$$\mathbf{y}_{\theta_i} = \mathbf{A}(\theta_i)\mathbf{c} + \epsilon \quad (20)$$

其中  $\epsilon$  满足高斯分布,  $\epsilon \sim N(0, \mathbf{\Sigma}_i)$ , 协方差矩阵  $\mathbf{\Sigma}_i$  为  $L \times L$  维对角阵. 对于此模型,我们采用加权最小二乘方法(WLS)<sup>[16]</sup> 求解,其目标函数为

$$J(\mathbf{c}) = \arg \min_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^I \{(\mathbf{y}_{\theta_i} - \mathbf{A}(\theta_i)\mathbf{c})^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{y}_{\theta_i} - \mathbf{A}(\theta_i)\mathbf{c})\} \quad (21)$$

在本文的算法中协方差矩阵  $\mathbf{\Sigma}_i$  的选取至关重要. 其选取须正确遵循观测变量的统计特征, Fessler<sup>[17]</sup> 给出一种选取方式:

$$\mathbf{\Sigma}_i = \text{diag}\{\max(\mathbf{y}_{\theta_i}, \epsilon)\} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{y}_{\theta_i}$  是观测数据的无偏估计,在仿真实验中可以用经过平滑处理的观测数据来替代,  $\epsilon$  为一阈值,本文中取 5.0.

对式(21)的求解有多种方法,由于涉及矩阵维数较大,我们采用加性后继迭代算法求解,迭代公式为

$$\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{c}^k + \sum_{i=1}^I (\mathbf{A}(\theta_i)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{y}_{\theta_i} - \mathbf{A}(\theta_i)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{A}(\theta_i) \mathbf{c}^k) \quad (23)$$

其中,  $k$  表示迭代次数. 此迭代方法收敛速度较慢,为了加快收敛速度,我们可以在迭代中采用类似 RA 的分块迭代方法<sup>[18]</sup>. 根据 RA 的基本思想,我们将一次完整的迭代拆分成  $I$  次子迭代环节,每次子迭代涉及一个投影方向上的观测数据,新的迭代公式为

$$\mathbf{c}^{k,i+1} = \mathbf{c}^{k,i} + (\mathbf{A}(\theta_i)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{y}_{\theta_i} - \mathbf{A}(\theta_i)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{A}(\theta_i) \mathbf{c}^{k,i}),$$

其中,  $i=1,2,\dots,I$ . 考虑性质 2,迭代公式可以进一步写作

$$\mathbf{c}^{k,i+1} = \mathbf{c}^{k,i} + \mathbf{E}(\theta_i)(\mathbf{A}(0)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{y}_{\theta_i} - \mathbf{A}(0)^H \mathbf{\Sigma}_i^{-1} \mathbf{A}(0) \mathbf{E}(\theta_i) \mathbf{c}^{k,i}).$$

一次迭代完成后,记  $\mathbf{c}^{k,I+1}$  为  $\mathbf{c}^{k+1,1}$  进入下一次迭代. 通过观察我们可以发现,性质 2 的引入可以减少数据存储空间,节省计算量.

#### 3.2 迭代间平滑和滤波机制

根据 FWM 的定义,在  $\{c_{m,n} \mid m=1,2,\dots,M, n=1,2,\dots,N\}$  中,若固定下标  $n$ ,我们可以得到一组  $1 \sim M$  阶小波系数. 由小波理论可知,我们可以通过小波系数收缩(采用有限阶小波拟合)去除信号中的噪声,这样就相当于对径向分量进行滤波处理. 若固定下标  $m$ ,则得到一组的频率分量,根据一般的信号理论,信号的高频分量对噪声比较敏感,通常我们可以设计一个滤波器,对频率分量进行滤波加权,即可达到角度方向上的滤波效果.

我们设计如下的滤波方案:对每一组频率分量,我们采用长度为  $2N+1$  的离散高斯滤波窗  $\mathbf{w}_m(m=1,2,\dots,M)$  进行滤波,其元素定义如下:

$$\mathbf{w}_m[d] = e^{-\frac{1}{2\sigma}(\frac{d-1-N}{N})}, \quad d = 1,2,\dots,2N+1 \quad (24)$$

其中,  $\sigma$  可以用来调节滤波效果,其大小同窗的宽度成正比. 减小  $\sigma$  导致窗的宽度减小,从而增强对高频

分量的抑制作用. 滤波窗有多种选择, 选择高斯窗的原因在于其计算简单, 易于操作.

观察式(17)的定义, 我们可以将滤波过程用矩阵的方式表示, 定义加权矩阵

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_M\}$$

(25)

将加权滤波矩阵应用于迭代中, 我们给出完整的基于 FWM 的迭代重建算法:

1. 选取迭代初始值  $\mathbf{c}^0$ ;

2. 对于每次迭代, 执行步 3, 步 4;

3. 对于每个方向  $i=1, 2, \cdots, I$ , 按下式迭代:
- $$\mathbf{c}^{k,i+1} = \mathbf{c}^{k,i} + \mathbf{E}(\theta_i)^H (\mathbf{A}(0)^H \boldsymbol{\Sigma}_{y\theta_i}^{-1} \mathbf{y}(\theta_i) - \mathbf{A}(0)^H \boldsymbol{\Sigma}_{y\theta_i}^{-1} \mathbf{A}(0) \mathbf{E}(\theta_i) \mathbf{W} \mathbf{c}^{k,i});$$
4.  $\mathbf{c}^{k+1,1} = \mathbf{c}^{k,I+1}$ .

上述重建过程通过空间滤波来抑制噪声, 避免了图像空间先验项的选取. 从算法的计算复杂度上分析, 由于变换矩阵  $\mathbf{A}(\theta)$  具有旋转不变性, 在实际计算中仅需要计算  $\mathbf{A}(0)$ , 所需存储空间远小于一般的基于像素的重建算法.

## 4 实验结果与分析

### 4.1 数据描述

实验中, 我们将对仿真数据和实际临床数据进行重建. 仿真数据采用 Shepp-Logan 模版(如图 2 所示), 并模拟 PET 进行扫描, 其所得真实符合总数约为  $1 \times 10^6$ . 观测数据以 128 个方向(等间隔, 分布在  $0^\circ \sim 180^\circ$  内)进行采集, 每个投影包含 192 个投影点, 重建图像分辨率为  $128 \times 128$  像素. 在此数据配置下, 传统统计类方法系统矩阵大小为  $(128 \times 128) \times (128 \times 192)$ , 而 FWM 算法(以 7 阶小波拟合为例), 所需存储的系统阵  $\mathbf{A}(0)$  大小仅为  $192 \times (7 \times 128 \times 129)$ , 可见 FWM 算法在所需数据存储量方面优于传统统计类方法.



图 2 Shepp-Logan 模版图

临床数据采集自 CT/PET 扫描仪. 该机器可以同时 CT 与 PET 成像, 对一个断层进行 192 个方向进行投影, 每个投影具有 192 个采样点. 重建切

片分辨率为  $128 \times 128$  像素.

### 4.2 收敛性分析

为了对算法进行评估, 我们引入均方误差 (MSE), 其定义为

$$MSE = \frac{\|f - f^*\|_2}{\|f^*\|_2} \times 100\%$$

(26)

其中  $f^*$  和  $f$  分别表示原始浓度分布函数和重建图像函数,  $\|\cdot\|_2$  表示二范数.

我们利用 FWM 算法对无噪声情况的仿真数据进行重建, 重建结果如图 3 所示. 图 4 给出了算法的 MSE 变化曲线.

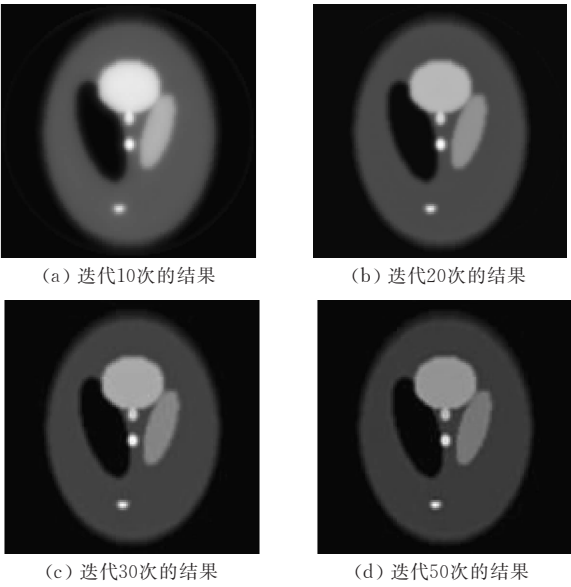


图 3 仿真数据重建结果

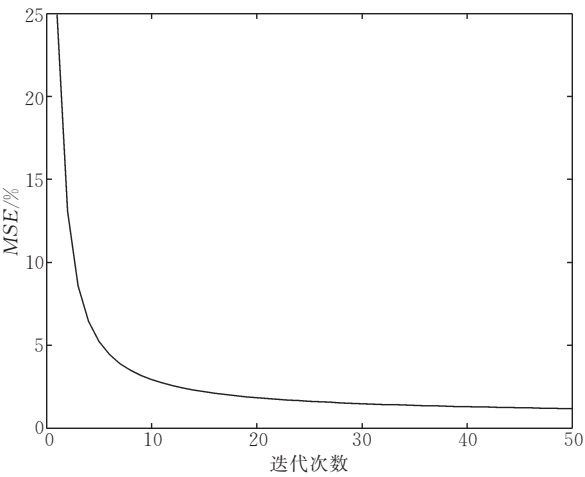


图 4 无噪声投影数据 FWM 重建 MSE 曲线

从重建结果以及误差曲线我们可以看出, 随着迭代的进行, 重建图像的质量逐步提高. 我们抽取重建结果图像的中间一列(第 63 列), 同模版作比较, 结果如图 5 所示. 从图中可以看出经过 50 次迭代,

重建结果已经可以较好地拟合模版图像,即 FWM 算法已经达到较好的收敛效果.

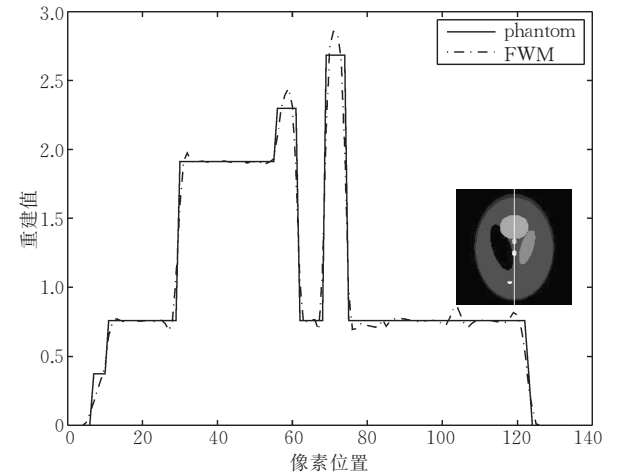


图 5 重建结果包络分析

4.3 算法性能分析

为了测试算法的性能,我们首先按如下方式模拟实际观测数据:

$$y_{s_l}(\theta_i) = Poisson(y_{s_l}^*(\theta_i) + a_{s_l}(\theta_i) + \varsigma) - Poisson(a_{s_l}(\theta_i)) \tag{27}$$

其中,  $y_{s_l}^*(\theta_i)$  表示投影数据理想值;  $\varsigma = 20\% \times \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L y_{s_l}^*(\theta_i) / (IL)$  表示背景噪声均值;  $a_{s_l}(\theta_i)$  表示延迟窗所检测到的符合数均值,我们取  $a_{s_l}(\theta_i) = 0.6 \times$

$y_{s_l}^*(\theta_i)$ ;  $Poisson(x)$  表示以  $x$  为均值的泊松变量;  $y_{s_l}(\theta_i)$  为最终所得的模拟观测数据.

作为比较,我们分别采用 MLEM, MAP 以及 FWM 算法对模拟真实投影数据进行重建,其中, MLEM 采用乘性迭代机制; MAP 算法采用 Green 先验项,按 OSL 迭代公式<sup>[4]</sup>进行迭代(此处 MLEM 算法和 MAP 算法有别于泊松模型下的 EM 算法,其详细推导参见文献<sup>[16]</sup>); FWM 算法采用 7 阶离散小波拟合. 各算法均进行 50 次迭代,重建结果如图 6 所示,图 7 给出了 MSE 误差分析曲线,各算法的 MSE 具体数值由表 1 给出. 从 MSE 变化曲线中可以看出 MLEM 算法由于未考虑先验项,重建质量呈现先下降后上升的变化规律,这说明在含有噪声的情况下,MLEM 算法的重建结果噪化较为明显,难以确定停止条件. 而 MAP 算法在噪声抑制方面和图像平滑方面均优于 MLEM 算法. FWM 算法在重建质量上同 MAP 算法比较接近. 此外,由于采用了 RA 机制, FWM 算法的收敛速度快于 MAP 算法,这主要体现在 MSE 变化曲线的斜率上.

表 1 各种算法不同迭代次数的 MSE 表

迭代次数	MLEM 算法	MAP 算法	FWM 算法
10	12.5464	6.4726	5.3782
20	11.4618	4.9636	4.4162
30	12.3956	4.9542	4.4891
40	14.0307	5.1758	4.4845
50	15.9989	5.4026	4.7317

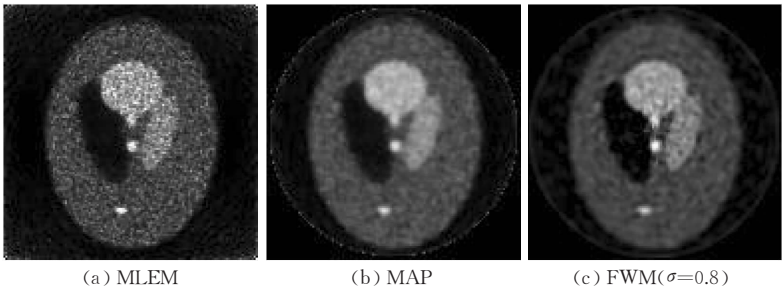


图 6 模拟真实观测数据重建结果

同样的,我们抽取重建结果图像的中间一列(第 63 列)进行比较,其结果如图 8 所示. 由图 8 可以看出 FWM 算法和 MAP 算法的恢复程度较为接近.

通过调节式(27)中的参数  $\sigma$ , FWM 算法可以得到不同的重建效果,图 9 给出了一组不同  $\sigma$  取值下的 FWM 算法重建结果图.

从图 9 可以看出,随着  $\sigma$  的增大,滤波窗的窗宽随之增大,在角度方向上的滤波效果被削弱;然而过小的取值会使得滤波效果过大,从而产生过平滑伪影. 在本实验中,我们认为取值在 0.8~1.0 之间较

为合适.

最后我们利用上述方法对 2 组真实数据进行了重建,真实数据以及重建结果如图 10 所示. 由于采集时间较短(采用放射性同位素<sup>18</sup>F,采集时间大约为 140s)因而信噪比较低,从图中也可以看出噪声较为明显. 由重建结果可以看出,MLEM 算法对低信噪比的投影数据进行重建的结果并不理想. 通过比较可知,MAP 算法的重建结果较为平滑,具有较好的视觉效果,而 FWM 算法的重建效果同 MAP 算法接近.



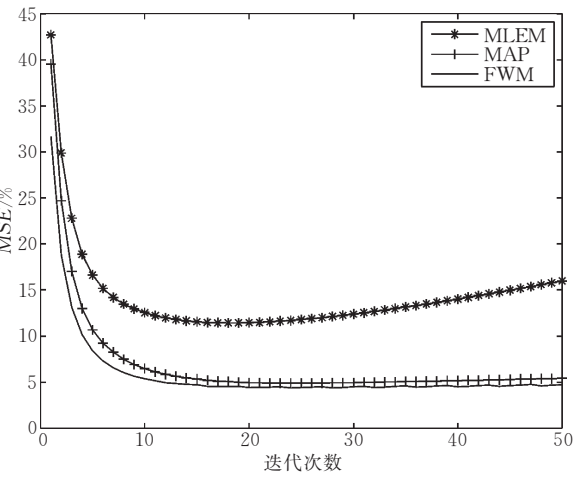


图 7 模拟真实观测数据重建 MSE 曲线

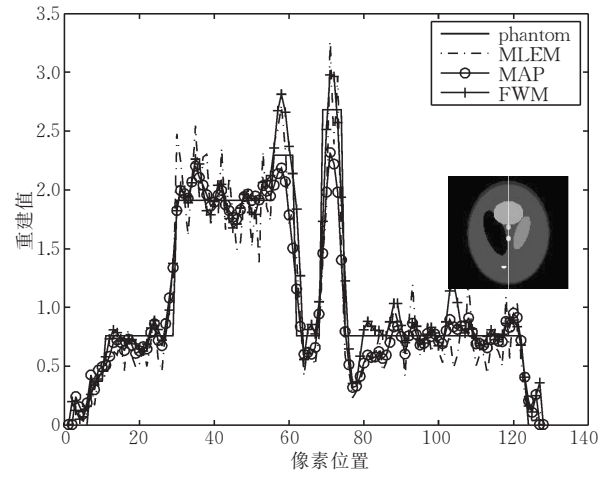


图 8 重建结果包络分析(模拟真实观测数据)

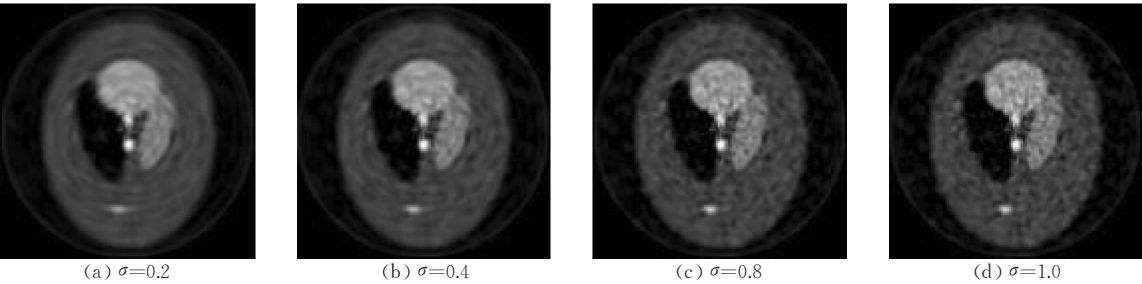


图 9 不同参数下 FWM 重建效果

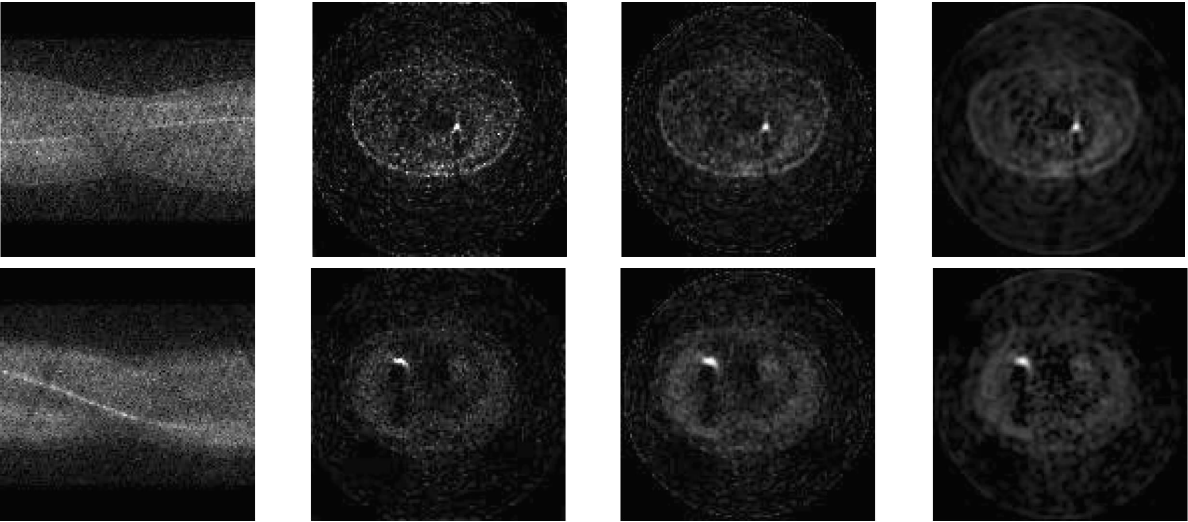


图 10 真实数据重建结果(第一列为真实观测数据,二,三,四列分别为利用 MLEM,MAP,FWM( $\sigma=0.8$ )算法对第一列数据的重建结果)

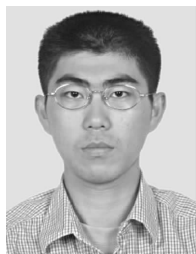
5 结 论

本文提出了一种新的基于 Fourier-小波矩的 PET 断层图像特征重建算法. 与传统的 MAP 算法不同,FWM 算法未引入图像空间先验项,而是利用图像的矩特征,辅以滤波环节,进行重建结果的优

化,从而避免了先验项的选择和先验项参数调节,具有较好的适应性,同时,算法所需存储空间同 MAP 相比较小,算法复杂度方面则与其大致相当. 在重建效果方面,FWM 算法同 MAP 算法较为接近,在图像平滑和抑制噪声方面均有较好的表现. 由于算法的推导始于解析方法,因此在后续的工作中,我们将尝试对真实数据进行分析,将重建方法推广至三维.

## 参 考 文 献

- [1] Kak A. Image reconstruction from projections. Image Processing Techniques, volume 2, Computational Techniques. Orlando, FL: Academic Press, 1984: 111-169
- [2] Shepp L, Vardi Y. Maximization likelihood reconstruction for emission tomography. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1982, 1(2): 113-122
- [3] Jones H, Mitra G. A parallel implementation of the maximum likelihood method in positron emission tomography image reconstruction. Computational Statistics and Data Analysis, 1999, 31(4): 417-439
- [4] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 721-741
- [5] Green P. Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1990, 9(1): 84-93
- [6] Panin V, Zeng G, Gullberg G. Total variation regulated EM algorithm. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1999, 46(6): 2202-2210
- [7] Galatsanos P. Methods for choosing the regularization parameter and estimating the noise variance in image restoration and their relation. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(3): 322-336
- [8] Milanfar P, Karl C. A moment-based variational approach to tomographic reconstruction. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(3): 459-470
- [9] Johnson E, Wong H. Image restoration using Gibbs priors boundary modeling, treatment of blurring and selection of hyperparameter. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(5): 413-425
- [10] Raheja A, Dhawanb A. Wavelet based multiresolution expectation maximization image reconstruction algorithm for positron emission tomography. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2000, 24(6): 359-376
- [11] Lee N, Choi Y. A modified OSEM algorithm for PET reconstruction using wavelet processing. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2005, 80(3): 236-245
- [12] Shen D, Horace H. Discriminative wavelet shape descriptors for recognition of 2D patterns. Pattern Recognition, 1999, 32(2): 151-165
- [13] Selivanov V, Picard Y, Cadorette J. Detector response models for statistical iterative image reconstruction in high resolution pet. IEEE Transactions on Nuclear Science, 2000, 47(3): 1168-1175
- [14] Thompson C, Ranger N. Simultaneous transmission and emission scans in positron emission tomography. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1989, 36(1): 1011-1016
- [15] Fessler J, Erdogan H. Exact distribution of edge-preserving MAP estimators for linear signal models with Gaussian measurement noise. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(6): 1049-1055
- [16] Anderson M, Mair A. Weighted least-squares reconstruction methods for positron emission tomography. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1997, 16(2): 159-165
- [17] Fessler J. Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1994, 13(2): 290-300
- [18] Browne J, Pierro R. A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihoods in emission tomography. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, 15(5): 687-699
- [19] Teh C, Chin R. On image analysis by the methods of moments. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1988, 10(4): 496-513
- [20] Bailey D, Jones T. Noise equivalent count measurements in a neuro-PET scanner with retractable. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1991, 10(3): 256-260
- [21] Carson R, Lange K. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. Journal of Computer Assisted Tomography, 1984, 8(2): 302-316
- [22] Saquib S, Bouman A. ML parameter estimation for Markov random fields with applications to Bayesian tomography. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(7): 1029-1044
- [23] Wang G, Wang S. Parallel recursive computation of the inverse Legendre moment transforms for signal and image reconstruction. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(12): 929-932
- [24] Yin J, Pierro R, Wei M. Analysis for the reconstruction of a noisy signal based on orthogonal moments. Applied Mathematics and Computation, 2002, 132(2-3): 249-263



**HU Yi-Ning**, born in 1981, Ph. D. candidate. His current research interests mainly focus on image analysis and signal processing.

**ZHOU Jian**, born in 1978, Ph. D. candidate. His current research interests mainly focus on pattern recognition and image processing.

**LUO Li-Min**, born in 1956, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His main research interests focus on 3D medical image processing, stereotactic radiotherapy.



## Background

In positron emission tomography (PET) image reconstruction, statistical methods are widely used since Shepp and Vardi introduced MLEM method. Because the problem of PET reconstruction is ill-posed, regularization methods are often used to improve reconstruction quality. To obtain good results, regularization term and parameters should be carefully chosen according to different situation. Such selection often involves interaction. Some literatures suggest using feature-based methods, which reconstruct image without using regularization terms. Milanfar applied Legendre moments to tomography reconstruction. He described a framework for the reconstruction of an image from the maximum likelihood (ML) estimates of its Legendre moments. However, Legendre polynomials are globally defined, as a result, it is not adequate for local feature extraction. Unlike Legendre polynomials, wavelet transform is capable of providing both time and frequency localization. The characteristic of wavelet transform is particularly suited to extract local features. Ra-

heja introduced the multigrid and multiresolution concept for PET image reconstruction using EM algorithm, and furthermore transforms his algorithm to a wavelet based multiresolution EM algorithm by extending the concept of switching resolutions in both image and data spaces. Lee applied wavelet Shrinkage into EM algorithm, in his work, ordered subset (OS) method was employed to accelerate the convergence speed. In this paper Fourier-Wavelet moments (FWM) are used for reconstruction. The relationship between the measurements and the moments is established. Since FWM is rotation invariant, it can be used to reduce the computational cost. A row-action (RA) like block iterative algorithm is proposed to accelerate the convergence rate. In addition, inter-iteration filtering scheme is adopted to improve the reconstruction quality. This research was supported by the National Basic Research Program of China under grant No. 2003CB716102, and Program for New Century Excellent Talents in University under grant No. NCET-04-0477.