

有理 C-Bézier 曲线的形状分析

吴荣军¹⁾ 叶正麟²⁾ 罗卫民¹⁾

¹⁾(西安邮电学院应用数理系 西安 710121)

²⁾(西北工业大学应用数学系 西安 710072)

摘 要 对有理 C-Bézier 曲线进行了形状分析,得出曲线上含有奇点、拐点和曲线为局部凸或全局凸的、用控制多边形边向量相对位置表示的充分必要条件,并讨论了权因子变化对曲线形状图的影响。

关键词 有理 C-Bézier 曲线;奇点;拐点;局部凸;全局凸

中图法分类号 TP391

Shape Analysis of Rational C-Bézier Curve

WU Rong-Jun¹⁾ YE Zheng-Lin²⁾ LUO Wei-Min¹⁾

¹⁾(Department of Applied Mathematics and Applied Physics, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121)

²⁾(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract In this paper the authors analyze the shape features like singularities, inflection points and local or global convexity of rational C-Bézier curve, then give the necessary and sufficient conditions for this curve having one or two inflection points, or a loop, or a cusp, or being local or global convex in terms of the relative position of its control polygons' side vectors. The authors also discuss the influences of weight coefficients on the shape diagram of this curve.

Keywords rational C-Bézier curve; singular points; inflection points; local convexity; global convexity

1 引 言

C-Bézier 曲线除了具有 Bézier 曲线的诸多优点外,还有一个整体形状调整参数 $0 < \alpha < 2\pi$,并且能精确表示圆弧、椭圆弧以及正弦曲线等非代数曲线^[1-2].但是其形状参数的调节能力非常有限,即 C-Bézier 曲线只能在相应的(同一控制多边形)Bézier 曲线和控制多边形首末端点连线之间进行调节,而且它不能精确表示双曲线和抛物线.本文考虑其有理形式,即有理 C-Bézier 曲线.文献[3]借助 C-曲线与摆线及正弦曲线之间的仿射变换得到了 C-Bézier

曲线的奇拐点分布图;文献[4]指出尖点条件线是拐点区域的包络曲线,并通过连续映射的方法巧妙地得到了重结点区域,从而给出了划分简单且易于判断的奇拐点分布图,并讨论了形状参数对分布图中奇拐点区域的影响;但文献[3-4]都没有对曲线的凸性作深入讨论,即当曲线上无尖点、重结点和拐点时曲线为局部凸还是全局凸.本文在文献[4]的基础上对有理 C-Bézier 曲线进行了形状分析,进一步发现局部凸区域与重结点区域的两条边界线之间存在包络关系,由此得出了有理 C-Bézier 曲线的完全形状分布图,图中除了划分出奇拐点分布区域外,还给出了局部凸区域和全局凸区域.文中还讨论了权因子

变化对形状图中各区域的影响,置所有权因子相等便可得 C-Bézier 曲线的形状图,令形状参数 $\alpha \rightarrow 0$ 又可得有理三次 Bézier 曲线的形状图.

2 空间有理 C-Bézier 曲线的形状分析

有理 C-Bézier 曲线可定义为

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i=0,1,2,3$) 为控制顶点(用列向量表示),

$$R_i(t) = \frac{\omega_i Z_i(t)}{R(t)} (i=0,1,2,3), R(t) = \sum_{j=0}^3 \omega_j Z_j(t),$$

权因子 $\omega_i > 0$ ($i=0,1,2,3$), $Z_i(t)$ ($i=0,1,2,3$) 为 C-Bézier 基函数:

$$Z_0(t) = \frac{\alpha - \alpha t - \sin(\alpha - \alpha t)}{\alpha - \sin \alpha},$$

$$Z_3(t) = \frac{\alpha t - \sin(\alpha t)}{\alpha - \sin \alpha},$$

$$Z_1(t) = M \left[\frac{1 - \cos(\alpha - \alpha t)}{1 - \cos \alpha} - Z_0(t) \right],$$

$$Z_2(t) = M \left[\frac{1 - \cos(\alpha t)}{1 - \cos \alpha} - Z_3(t) \right],$$

$$M = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2 - 2 \cos \alpha - \alpha \sin \alpha}.$$

当 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 不共面时, $\mathbf{p}(t)$ 为空间曲线,关于空间有理 C-Bézier 曲线有如下定理.

定理 1. 空间有理 C-Bézier 曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为挠曲线,无奇点及泛拐点,并且与其控制多边形的旋转方向一致.

证明. 设 $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i-1}$, $i=1,2,3$, 则可将 $\mathbf{p}(t)$ 改写为

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0 + [1 - R_0(t)]\mathbf{a}_1 + [R_2(t) + R_3(t)]\mathbf{a}_2 + R_3(t)\mathbf{a}_3, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

(I) 关于尖点: 曲线(1)上的点 $\mathbf{p}(t_0)$ ($0 < t_0 < 1$) 为尖点的必要条件是

$$\mathbf{p}'(t_0) = -R'_0(t_0)\mathbf{a}_1 + [R'_2(t_0) + R'_3(t_0)]\mathbf{a}_2 + R'_3(t_0)\mathbf{a}_3 = 0 \quad (2)$$

因为 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 不共面, 所以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 从而由式(2)可得 $R'_0(t_0) = 0$, $R'_2(t_0) = 0$, $R'_3(t_0) = 0$. 又 $R'_0(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 1$ 与 $R'_3(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0$ 矛盾. 故曲线 $\mathbf{p}(t)$ 无尖点.

(II) 关于重结点: 设有 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ 使 $\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_2) = 0$, 则有

$$[R_0(t_2) - R_0(t_1)]\mathbf{a}_1 + [R_2(t_1) + R_3(t_1) - R_2(t_2) - R_3(t_2)]\mathbf{a}_2 + [R_3(t_1) - R_3(t_2)]\mathbf{a}_3 = 0 \quad (3)$$

因为 \mathbf{a}_i ($i=1,2,3$) 线性无关, 所以由式(3)可得 $R_0(t_1) = R_0(t_2)$, $R_3(t_1) = R_3(t_2)$.

这显然与基函数 $R_0(t)$ 的单调递减性及 $R_3(t)$ 的单调递增性相矛盾. 所以曲线 $\mathbf{p}(t)$ 无重结点.

(III) 关于泛拐点: 泛拐点是指空间曲线上挠率变号的点. 设 $g(t) = \det(\mathbf{p}'(t), \mathbf{p}''(t), \mathbf{p}'''(t))$, 我们有

$$\begin{aligned} g(t) &= \det \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R'_i(t) & \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R''_i(t) & \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R'''_i(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R_i(t) & \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R'_i(t) & \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R''_i(t) & \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i R'''_i(t) \\ \sum_{i=0}^3 R_i(t) & \sum_{i=0}^3 R'_i(t) & \sum_{i=0}^3 R''_i(t) & \sum_{i=0}^3 R'''_i(t) \end{vmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0(t) & R'_0(t) & R''_0(t) & R'''_0(t) \\ R_1(t) & R'_1(t) & R''_1(t) & R'''_1(t) \\ R_2(t) & R'_2(t) & R''_2(t) & R'''_2(t) \\ R_3(t) & R'_3(t) & R''_3(t) & R'''_3(t) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{R^4(t)} \begin{vmatrix} Z_0(t) & Z'_0(t) & Z''_0(t) & Z'''_0(t) \\ Z_1(t) & Z'_1(t) & Z''_1(t) & Z'''_1(t) \\ Z_2(t) & Z'_2(t) & Z''_2(t) & Z'''_2(t) \\ Z_3(t) & Z'_3(t) & Z''_3(t) & Z'''_3(t) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3}{R^4(t)} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) D(t). \end{aligned}$$

其中 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 为向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 的混合积, $D(t) =$

$$\begin{vmatrix} Z_0(t) & Z'_0(t) & Z''_0(t) & Z'''_0(t) \\ Z_1(t) & Z'_1(t) & Z''_1(t) & Z'''_1(t) \\ Z_2(t) & Z'_2(t) & Z''_2(t) & Z'''_2(t) \\ Z_3(t) & Z'_3(t) & Z''_3(t) & Z'''_3(t) \end{vmatrix}. \text{ 容易算得 } D'(t) = 0, \text{ 所}$$

以 $D(t) \equiv D(0)$, 直接计算可得 $D(0) = \frac{\alpha^6 M}{(\alpha - \sin \alpha)^2} > 0$, $0 < \alpha < 2\pi$; 又 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 所以 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \neq 0$; 从而对于任意的 $0 < t < 1$ 都有 $g(t) \neq 0$, 并且与 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 同号. 所以曲线 $\mathbf{p}(t)$ 无泛拐点, 并且与其控制多边形 $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3$ 具有相同的旋转方向.

证毕.

3 平面有理 C-Bézier 曲线的形状分析

如 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 共面, 则 $\mathbf{p}(t)$ 为平面曲线, 此时 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 0$.

首先不妨设 $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_3$, 那么 \mathbf{a}_2 可表示为 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_3 的线性组合 $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3$, 代入式(1)可得

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0 + [1 - R_0(t) + \lambda(R_2(t) + R_3(t))]\mathbf{a}_1 +$$

$$[R_3(t) + \mu(R_2(t) + R_3(t))]a_3 \quad (4)$$

3.1 关于尖点

曲线 $p(t)$ 有尖点的必要条件是 $p'(t)=0, 0 < t < 1$. 由式(4)得

$$C: \begin{cases} \lambda = \frac{\omega_0 Z'_0(t) - R_0(t)R'(t)}{\omega_2 Z'_2(t) - R_2(t)R'(t) + \omega_3 Z'_3(t) - R_3(t)R'(t)} \\ \mu = \frac{-[\omega_3 Z'_3(t) - R_3(t)R'(t)]}{\omega_2 Z'_2(t) - R_2(t)R'(t) + \omega_3 Z'_3(t) - R_3(t)R'(t)} \end{cases}, \quad 0 < t < 1 \quad (6)$$

设与 $t_0 (0 < t_0 < 1)$ 对应的 $(\lambda_0, \mu_0) \in C$, 在展开式 $p'(t) = p''(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ 中 $p''(t_0) \neq 0$, 故 $p'(t)$ 经过 t_0 时方向反变, 所以曲线 C 是尖点条件曲线.

3.2 关于拐点

经计算可得曲线 $p(t)$ 的副法线向量为 $p'(t) \times p''(t) = f(t; \lambda, \mu)a_1 \times a_3$, 其中

$$f(t; \lambda, \mu) = - \begin{vmatrix} R'_0(t) & R'_3(t) \\ R''_0(t) & R''_3(t) \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} R'_2(t) & R'_3(t) \\ R''_2(t) & R''_3(t) \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} R'_0(t) & R'_1(t) \\ R''_0(t) & R''_1(t) \end{vmatrix} \quad (7)$$

点 $p(t_0) (0 < t_0 < 1)$ 是拐点当且仅当 $f(t; \lambda, \mu)$ 经过 t_0 时变号. 所以在 $\lambda\mu$ -平面上, 使得 $p(t)$ 有拐点的可能区域必为直线族 $f(t; \lambda, \mu) = 0$ 所覆盖, 求此直线族的包络, 即解关于 λ, μ 的方程 $\begin{cases} f(t; \lambda, \mu) = 0 \\ f'_t(t; \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$. 恰好可得曲线 C . 经容易但比较烦琐的计算可知曲线 C 是严格凸的连续曲线, 因此曲线 C 的切线所扫过的区域为 $S \cup D \cup C$ (如图 1), 亦即所求的可能拐点区域.

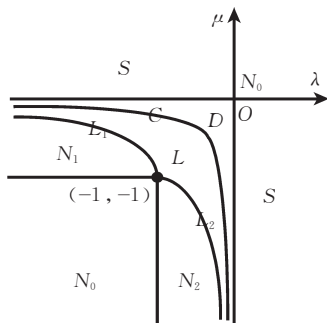


图 1 平面有理 C-Bézier 曲线的形状图

过任一点 $(\lambda_0, \mu_0) \in S \cup D \cup C$ 至少有一条 $\lambda\mu$ -平面上的直线 $f(t; \lambda, \mu) = 0$ 与曲线 C 相切. 当 $(\lambda_0, \mu_0) \in C$ 时, 由 Taylor 展式 $f(t; \lambda_0, \mu_0) = \frac{1}{2} f''_{tt}(t_0; \lambda_0, \mu_0)(t - t_0)^2 + o(t - t_0)^2$, 其中 $f''_{tt}(t_0; \lambda_0, \mu_0) \neq 0$, 知 $f(t; \lambda_0, \mu_0)$ 经过 t_0 时不变号, 故此时 $p(t)$ 无拐点;

$$[-R'_0(t) + \lambda(R'_2(t) + R'_3(t))]a_1 + [R'_3(t) + \mu(R'_2(t) + R'_3(t))]a_3 = 0 \quad (5)$$

因为 a_1 与 a_3 线性无关, 由式(5)可得参数曲线

当 $(\lambda_0, \mu_0) \in S \cup D$ 时, 设过它与曲线 C 相切的直线之一为 $f(t; \lambda, \mu) = 0$, 则由 $f(t; \lambda_0, \mu_0) = f'_t(t; \lambda_0, \mu_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$, $f'_t(t; \lambda_0, \mu_0) \neq 0$, 知 $f(t; \lambda_0, \mu_0)$ 经过 t_0 时变号, 从而 $p(t_0)$ 是拐点. 进一步, 当 $(\lambda_0, \mu_0) \in S$ 时, 过它只能作曲线 C 的一条切线, 对应 $p(t)$ 只有一个拐点; 当 $(\lambda_0, \mu_0) \in D$ 时, 过它可作曲线 C 的两条切线, 对应 $p(t)$ 有两个拐点.

3.3 关于重结点

曲线 $p(t)$ 有重结点, 当且仅当存在 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, 使得 $p(t_1) - p(t_2) = 0$, 这等价于 λ, μ, t_1 和 t_2 满足方程组:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{R_0(t_2) - R_0(t_1)}{R_2(t_2) + R_3(t_2) - R_2(t_1) - R_3(t_1)} \\ \mu = \frac{R_3(t_1) - R_3(t_2)}{R_2(t_2) + R_3(t_2) - R_2(t_1) - R_3(t_1)} \end{cases}, \quad (t_1, t_2) \in \Delta \quad (8)$$

其中, $\Delta = \{(t_1, t_2) \in E^2 \mid 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1\}$. 容易验证式(8)定义了 1 个拓扑映射 $F: \Delta \subset E^2 \rightarrow E^2$, 因此象域 $L = F(\Delta)$ 是 $\lambda\mu$ -平面上的单连通区域, 象域 L 的 3 条边界线与 Δ 的 3 条边界线 $t_1 = t_2$, $t_1 = 0$ 和 $t_2 = 1$ 相对应, 即分别为曲线 C (不属于 L), L_1 和 L_2 (都属于 L). L 中的点 (λ_0, μ_0) 所对应的曲线 $p(t)$ 有且只有 1 个二重结点. 其中 L_1 和 L_2 的参数方程如下:

$$L_1: \begin{cases} \lambda = - \frac{\omega_1 Z_1(t) + \omega_2 Z_2(t) + \omega_3 Z_3(t)}{\omega_2 Z_2(t) + \omega_3 Z_3(t)} \\ \mu = - \frac{\omega_3 Z_3(t)}{\omega_2 Z_2(t) + \omega_3 Z_3(t)} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (9)$$

$$L_2: \begin{cases} \lambda = - \frac{\omega_0 Z_0(t)}{\omega_0 Z_0(t) + \omega_1 Z_1(t)} \\ \mu = - \frac{\omega_0 Z_0(t) + \omega_1 Z_1(t) + \omega_2 Z_2(t)}{\omega_0 Z_0(t) + \omega_1 Z_1(t)} \end{cases}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (10)$$

由分析学可推知曲线 L_1 和 L_2 均为单调下降的、严格凸的连续曲线. L_1 和 L_2 相交于点 $(-1, -1)$, L_1 以 λ 轴为渐近线, L_2 以 μ 轴为渐近线; 曲线 C 以 λ 轴和 μ 轴为渐近线, 并且 C 与 L_1, L_2 不相交.

3.4 关于凸性

$$\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t) = f(t; \lambda, \mu) \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \quad (11)$$

$$\mathbf{p}'(0) \times [\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)] =$$

$$\frac{\omega_1 \alpha (1 - \cos \alpha)}{\omega_0 (\alpha - \sin \alpha)} [R_3(t) + \mu(R_2(t) + R_3(t))] \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \quad (12)$$

$$[\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)] \times \mathbf{p}'(t) = \varphi(t; \lambda, \mu) \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \quad (13)$$

其中

$$\varphi(t; \lambda, \mu) = (1 - R_0)R'_3 + R'_0R_3 + \lambda(R_2R'_3 - R'_2R_3) + \mu[(1 - R_0)(R'_2 + R'_3) + R'_0(R_2 + R_3)].$$

对于任意的 $t_0 \in (0, 1)$, 如果由式(11)~式(13)分别所确定的向量经过 t_0 时其方向都不发生反变, 则曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为全局凸; 如果由式(11)所确定的向量经过 t_0 时方向不发生反变, 而由式(12)或式(13)所确定的向量经过 t_0 时方向反变, 则曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为局部凸(参见文献[5]).

由 3.2 节中的讨论可知当 $(\lambda, \mu) \in N = N_0 \cup N_1 \cup N_2 = E^2 \setminus (C \cup S \cup D \cup L)$ (如图 1 所示) 时 $f(t; \lambda, \mu)$ 不变号, 所以由式(11)所确定的向量经过 t_0 时方向不发生反变. 由式(12)可知当 $\mu = -\frac{\omega_3 Z_3(t)}{\omega_2 Z_2(t) + \omega_3 Z_3(t)}$ 时, 由式(12)所确定的向量经过与 μ 相对应的参

$$(\lambda, \mu) \in \begin{cases} N_0 (\text{含边界 } \{(\lambda, 0) | \lambda \geq 0\} \cup \{(0, \mu) | \mu \geq 0\} \cup \\ \{(\lambda, -1) | \lambda \leq -1\} \cup \{(-1, \mu) | \mu \leq -1\}): \mathbf{p}(t) \text{ 为全局凸曲线, 无奇拐点;} \\ N_1 \cup N_2: \mathbf{p}(t) \text{ 为局部凸曲线, 无奇拐点;} \\ S (\text{含边界 } \{(\lambda, 0) | \lambda < 0\} \cup \{(0, \mu) | \mu < 0\}): \mathbf{p}(t) \text{ 有一个拐点, 无奇点;} \\ D: \mathbf{p}(t) \text{ 有两个拐点, 无奇点;} \\ C: \mathbf{p}(t) \text{ 有一个尖点, 无拐点和重结点;} \\ L (\text{含边界 } L_1 \text{ 和 } L_2): \mathbf{p}(t) \text{ 有一个重结点, 无尖点和拐点.} \end{cases}$$

3.5 权因子对形状图的影响

由形状图中各区域的划分可知: 固定参数 α 后, 调节权因子 ω_i 不影响单拐点区域 S 和全局凸区域 N_0 , 所以当 $\mathbf{p}(t)$ 上仅有一个拐点时, 不能通过调节权因子来除掉它; 而当 $\mathbf{p}(t)$ 为全局凸时, 无论如何修改权因子 ($\omega_i > 0$) 曲线仍为全局凸.

权因子变化对重结点区域 L 、双拐点区域 D 和局部凸区域 $N_1 \cup N_2$ 的影响如下:

(1) ω_0 的变化不影响曲线 L_1 和局部凸区域 N_1 , 随着 ω_0 的增大, 曲线 L_2 逐渐远离 μ 轴, 曲线 C 逐渐靠近 L_1 和 L_2 ; 重结点区域 L 缩小, 双拐点区域 D 相应扩大, 局部凸区域 N_2 缩小(如图 2 所示).

(2) 随着 ω_1 的增大, 曲线 C 逐渐远离 λ 轴并且靠近 μ 轴, 曲线 L_1 逐渐远离曲线 C , 曲线 L_2 逐渐靠近

数 t 时方向反变, 容易算得 μ 的取值范围为 $-1 < \mu < 0$, 所以当 $(\lambda, \mu) \in N_1$ (如图 1 所示) 曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为局部凸. 实际上还可以证明: N_1 恰好是 L_2 的切线所覆盖区域在 N 中的部分.

解关于 λ, μ 的方程 $\begin{cases} \varphi(t; \lambda, \mu) = 0 \\ \varphi'_t(t; \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$, 求得直线族

$\varphi(t; \lambda, \mu) = 0$ 的包络线恰好就是曲线 L_1 . 设 L_1 的切线在 N 中所扫过的区域为 N_2 (如图 1 所示), 由类似于 3.2 节中的讨论可知, 当 $(\lambda, \mu) \in N_2$ 时曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为局部凸.

显然, 当 $(\lambda, \mu) \in N_0 = N \setminus (N_1 \cup N_2)$ 时, 曲线 $\mathbf{p}(t)$ 为全局凸.

最后, 当 $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_3$ 时, 类似于 3.1 节~3.3 节中的讨论易得: 平面有理 C-Bézier 曲线 $\mathbf{p}(t)$ 无奇点; 当且仅当 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_3 方向相同时, $\mathbf{p}(t)$ 有且只有一个拐点.

综上所述我们有如下定理.

定理 2. 当 $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_3$ 时, 平面有理 C-Bézier 曲线 $\mathbf{p}(t)$ 无奇点; 当且仅当 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_3 方向相同时, $\mathbf{p}(t)$ 有且只有一个拐点. 当 $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_3$ 时, 设 $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_3$, 则 $\mathbf{p}(t)$ 的几何特征取决于点 (λ, μ) 在 $\lambda\mu$ 坐标系中的如下分布(见图 1).

曲线 C ; 局部凸区域 N_1 缩小 N_2 扩大(如图 3 所示).

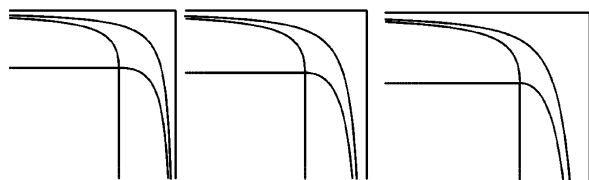


图 2 形状图随着 ω_0 增大而发生的变化

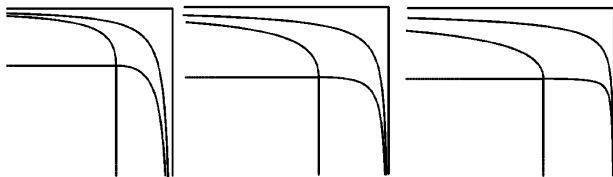


图 3 形状图随着 ω_1 增大而发生的变化

(3) 随着 ω_2 的增大, 曲线 C 逐渐靠近 λ 轴并且远离 μ 轴, 曲线 L_1 逐渐靠近曲线 C , 曲线 L_2 逐渐远离曲线 C ; 局部凸区域 N_1 扩大 N_2 缩小.

(4) ω_3 的变化不影响曲线 L_2 和局部凸区域 N_2 , 随着 ω_3 的增大, 曲线 L_1 逐渐远离 λ 轴, 曲线 C 靠近 L_1 和 L_2 , 重结点区域 L 缩小, 双拐点区域 D 相应扩大, 局部凸区域 N_1 缩小.

由以上权因子对形状图的影响可知, 当 $(\lambda, \mu) \in \{(\lambda, \mu) | -1 \leq \lambda < 0, -1 \leq \mu < 0\}$ 时, 曲线 $p(t)$ 上必将出现奇点或者双拐点, 仅仅通过修改权因子不能使 $p(t)$ 成为凸曲线或者只有一个拐点.

最后, 值得注意的是当形状参数 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $p(t)$ 即为有理三次 Bézier 曲线, 其形状图仍如图 1 所示, 其中参数曲线 C, L_1 和 L_2 的分析性质不变(参数方程应有所区别), 修改权因子对有理三次 Bézier 曲线形状的影响与以上讨论完全一致.



WU Rong-Jun, born in 1975, M.S..

His research interests include computer aided geometric design and numerical analysis.

Background

This work is supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China under grant No. 2004A12 and Special Research Project of Educational Department of Shaanxi Province under grant No. 05JK289.

Distribution of singular points, inflection points and convexity (local or global) of parametric curves is very important in designing curves. In this paper the authors apply the method used in (Ye and Wu 2005), which is based on

参 考 文 献

- [1] Zhang Ji-Wen. C-curves: An extension of cubic curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13(3): 199-217
- [2] Zhang Ji-Wen. Two different forms of C-B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(1): 31-41
- [3] Yang Qin-Min, Wang Guo-Zhao. Inflection points and singularities on C-curves. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(2): 207-213
- [4] Ye Zheng-Lin, Wu Rong-Jun. Analysis of inflection and singular points on planar C-Bézier curve. *Mathematica Numerica Sinica*, 2005, 27(1): 63-70(in Chinese)
(叶正麟, 吴荣军. 平面 C-Bézier 曲线的奇拐点分析. *计算数学*, 2005, 27(1): 63-70)
- [5] Liu Chao-Yang, Traas C R. On convexity of planar curves and its application in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, 1997, 14(7): 653-669

YE Zheng-Lin, born in 1943, professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include computer aided geometric design, computer graphics and fractal geometry.

LUO Wei-Min, born in 1950, professor. His major interests include computer aided geometric design, computer graphics and numerical analysis.

theory of envelope and continuous bijection, to rational C-Bézier curve, obtain the distribution regions of singular points and inflection points without much difficulty. Furthermore, the envelope of the regions, which indicate local convexity, are found to be two of boundary curves of region which indicates a loop, so the complete shape diagram, which is geometrical visual, is got, and easy to judge.