

中介真值程度的度量及其应用(Ⅱ)

洪 龙^{1),2)} 肖奚安³⁾ 朱梧楨²⁾

¹⁾(南京邮电大学计算机学院 南京 210003)

²⁾(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

³⁾(中国人民解放军理工大学理学院 南京 210016)

摘 要 结合中介逻辑中的模糊否定词和真值程度词的语义,论述了研究中介真值程度的度量对于应用的必要性;在对个体研究的基础之上,从离散型和连续型两个方面讨论了集合的真值程度的度量;在建立中介标准度后,提出模糊程度概念,提出中介熵定义,并讨论了中介熵的最大值.针对反对对立强调两个概念之间存在“最大的差异”,提出弱化“两极”,突出“过渡”的观点.在对过渡与对立进行了一般性讨论后,建立了标准数值化映射和广义数值化映射概念,构造性地证明了过渡情形能转换为反对对立情形的充分条件.这表明在处理工程实践和科学研究中的模糊现象时,可以把所有存在过渡的情形作为反对对立处理,从而使中介真值程度的度量可以在更加广阔的领域得到应用.

关键词 真值程度;集合;度量;模糊程度;中介熵;过渡

中图法分类号 TP18

Measure of Medium Truth Scale and Its Application (Ⅱ)

HONG Long^{1),2)} XIAO Xi-An³⁾ ZHU Wu-Jia²⁾

¹⁾(College of Computer, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003)

²⁾(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

³⁾(College of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210016)

Abstract It is introduced concisely that researching measure of medium truth scale (MMTS) for application is essential after analyzing the characteristics of semantics of fuzzy negation and truth-value degree. The MMTS of sets is discussed from both discrete and continuous based on MMTS of individual. After establishing medium standard pointer, fuzzy scale and medium entropy are proposed, and the greatest value of medium entropy is discussed. In accordance with de-emphasizing "maximum difference" between concepts with opposite properties, the idea of weakening polarization and strengthening transition are presented. After a general discussion on transition and polarization, normal numerical quantification mapping and generalized numerical quantification mapping are constructed, and the sufficient condition for converting transition to opposing polarization is established. This shows all cases existed transition may be process as object opposites while processing vague phenomenon in engineering and scientific research, so that MMTS can find wide application in more fields.

Keywords truth scale; set; measure; fuzzy scale; medium entropy; transition

收稿日期:2007-09-18;最终修改稿收到日期:2007-07-10. 本课题得到国家“九七三”重点基础研究发展规划项目基金(G1999032701)、国家自然科学基金(60273037)和南京邮电大学攀登项目基金(NY206010)资助. 洪 龙,男,1952年生,博士,高级工程师,主要研究方向为人工智能、计算机系统结构、计算机系统基础. E-mail: hongl@njupt.edu.cn. 肖奚安,男,1945年生,教授,博士生导师,主要研究领域为数学基础、数理逻辑、模糊数学. 朱梧楨,男,1935年生,教授,博士生导师,主要研究领域为数学基础、非经典逻辑、人工智能.

1 引 言

中介逻辑演算系统 (Medium Logic system, ML) 是依三值语义进行推演的^[1], 第三值是基于对反对对立面的中介状态的肯定而引入, 记为 M, 这样 ML 的真值的集合就是 {T, M, F}. ML 中的对立否定词“¬”、模糊否定词“~”和真值程度词“<”的语义由表 1 描述. 其中模糊否定词“~”的语义深刻地反映了模糊性, 即对立物在转化过程中的“非此非彼”或“亦此亦彼”的中介状态^[2]; 真值程度词“<”的语义定性地刻画了两个命题词之间的差异^[3]. 已建立的中介公理集合论表明: 用对立否定词“¬”、模糊否定词“~”和真值程度词“<”进行纯粹数学基础理论研究是充分的^[4].

表 1 ML 的联结词真值表

A	B	¬A	~A	A<B
T	T	F	M	T
T	M	F	M	M
T	F	F	M	F
M	T	M	T	T
M	M	M	T	T
M	F	M	T	M
F	T	T	M	T
F	M	T	M	T
F	F	T	M	T

但是, 中介数学系统没有描述模糊否定词和真值程度词的数值化方法, 以致中介系统理论很难在广阔而实际的应用领域开辟和发展其应用性研究. 例如: 给定谓词 P , $\sim P(x)$ 只表示对象 x 部分地具有性质 P , 但不知道 x 具有性质 P 的程度; 又如, $A<B$ 虽然定性地指出 A 的真值程度不强于 B , 却无法定量地知道它们的真值程度相差多少; 对于 $A<C, B<C$ 的情形, 就更无法对 A 与 B 定量区分. 因此, 从应用角度考虑, 对中介真值程度的数值化度量方法进行研究是非常必要的. 我们已在文献[5]中论述了个体的中介真值程度的数值化度量方法, 本文以其为基础, 论述集合的真值程度的度量方法. 除新的定义外, 文中出现的符号含义请参阅文献[5]. 本文还描述了模糊程度和中介熵, 并证明了过渡转换为反对对立的充分条件.

2 集合的真值程度的度量

我们就离散型情形和连续区间情形分别对集合

的真值程度进行描述.

2.1 离散型的真值程度的度量

2.1.1 加性真值度

定义 1. $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, A_T(x)=\sum_{i=1}^n g_T(x_i)$

称作集合 X 对于 P 的加性真值度, $\frac{A_T(x)}{n}$ 称作集合 X 对于 P 的平均加性真值度, 简记为 $A_{TM}(X)$; $A_F(x)=\sum_{i=1}^n g_F(x_i)$ 称作集合 X 对于 $\neg P$ 的加性真值度, $\frac{A_F(x)}{n}$ 称作集合 X 对于 $\neg P$ 的平均加性真值度, 简记为 $A_{FM}(X)$.

2.1.2 乘性真值度

定义 2. 记素数的集合是 Pri, p_i 是第 i 个素数, 集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 设 $g_T(x_1)\leq g_T(x_2)\leq \cdots \leq g_T(x_n)$, 建立映射 $\varphi_T: g_T(X)\rightarrow Pri, \varphi_T(g_T(x_i))=p_i$, 称 $\varphi_T(g_T(x_i))$ 是 $g_T(x_i)$ 的素数表示, $\varphi_T(g_T(x_i))$ 的全体所构成的集合简记为 $\varphi_T(X)$; 设 $g_F(x_1)\leq g_F(x_2)\leq \cdots \leq g_F(x_n)$, 建立映射 $\varphi_F: g_F(X)\rightarrow Pri$, 即 $\varphi_F(g_F(x_i))=p_i$, 则称 $\varphi_F(g_F(x_i))$ 是 $g_F(x_i)$ 的素数表示, $\varphi_F(g_F(x_i))$ 的全体所构成的集合记为 $\varphi_F(X)$.

定义 3. $M_T(X)$ 是 X 对于 P 的乘性真值度, 如果 $M_T(x)=\prod_{i=1}^n \varphi_T(g_T(x_i))$; $M_F(X)$ 是 X 对于 $\neg P$ 的乘性真值度, 如果 $M_F(x)=\prod_{i=1}^n \varphi_F(g_F(x_i))$.

定义 4. $V\subseteq R$. 若 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 则 $\prod V=v_1\times v_2\times \cdots\times v_n$.

定义 5. 设 $X_1\subseteq X$. 若记 $V=\{v\mid \exists x\in X_1, v=\varphi_T(g_T(x)), v\in\varphi_T(X)\}$, 则称 $D_T(X_1)=\prod V$ 是集合 X_1 对于 P 的真值度; 若记 $V=\{v\mid \exists x\in X_1, v=\varphi_F(g_F(x)), v\in\varphi_F(X)\}$, 则称 $D_F(X_1)=\prod V$ 是集合 X_1 对于 $\neg P$ 的真值度.

定义 6. 设 $X_1\subseteq X, X_2\subseteq X$, 并记 $\delta=D_T(X_1)/D_T(X_2)$. 当 $\delta\in I$, 即 $D_T(X_2)\leq D_T(X_1)$, 则称 $D_T(X_2)<D_T(X_1)$.

容易证明以下定理.

定理 1. 设 $X_1\subseteq X, X_2\subseteq X$, 并记 $\delta=D_T(X_1)/D_T(X_2)$. 对于 P ,

- (1) $\delta^{-1}\in I\iff D_T(X_1)<D_T(X_2)$;
- (2) $\delta=1\iff D_T(X_1)<D_T(X_2)\ \&\ D_T(X_2)<D_T(X_1)$, 即 $D_T(X_1)$ 等度于 $D_T(X_2)$, 记为 $D_T(X_1)><$

$D_T(X_2)$.

推论 1. $D_T(X_1) \succ \prec D_T(X_2) \Leftrightarrow X_1 = X_2$.

推论 2. $D_T(X_1) \prec D_T(X_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2$.

定理 2. 若 $D_T(X_1) \prec D_T(X_2)$, 则 $A_T(X_1) \leq A_T(X_2)$.

证明. 若 $D_T(X_1) \prec D_T(X_2)$, 则 $X_1 \subseteq X_2$, 因而有 $A_T(X_2) = A_T(X_1) + m$. 当 $m = 0$, $A_T(X_2) = A_T(X_1)$; 当 $m > 0$, $A_T(X_2) > A_T(X_1)$. 证毕.

对于 $\neg P$, 可以有类似定理 1, 推论 1, 2 及定理 2 的定理.

例 1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是某校学生成绩的集合, $f(X)$ 是每个学生百分制成绩的集合. 该校规定考试成绩 90 分~95 分为高分档, 60 分~65 分为低分档, 记谓词 $E(x)$ 表示 x 属高分档, 则 $\neg E(x)$ 表示 x 是低分档. A 组、B 组各有 6 人, A 组各人的成绩分别是 91, 93, 95, 87, 78, 75; B 组各人的成绩分别是 88, 97, 87, 75, 80, 91. A 组、B 组的总分分别为 520 分和 518 分, 单从总分看 A 组成绩较好. 若采用加性真值度概念对 A 组与 B 组进行比较, 就有 $A_T(A) = 1 + 1 + 1 + 0.88 + 0.52 + 0.4 = 4.8$; $A_T(B) = 0.92 + 1.07 + 0.88 + 0.4 + 0.6 + 1 = 4.87$, 这表明 B 组属高分档的真值度比 A 组高, 即 $A_T(A) \prec A_T(B)$, 显然这更符合全面发展的要求. 如果各组人数不等, 可采用平均加性真值度进行比较.

2.2 连续区间的真值程度的度量

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 在 $f(X)$ 的 $[\alpha_F - \epsilon_F, \alpha_T + \epsilon_T]$ 区域, 若设对应谓词 P 的数值区域为 a , 根据中介公理集合论^[6], 显然有对应 $\neg P$ 的数值区域是外集 a^- , 对应 $\sim P$ 的数值区域是中介集 a^\sim . 如此, $[\alpha_F - \epsilon_F, \alpha_T + \epsilon_T]$ 就是 $f(x)$ 中对应谓词 P 的恰集 a 的数值空间^[6], 记其为 Ξ .

为了便于讨论, 我们对 a, a^\sim, a^- 清晰化处理, 使其均为清晰化集^[7], 即有

$$\Xi = [\alpha_F - \epsilon_F, \alpha_T + \epsilon_T] = a^\circ \cup a^\sim \cup a^-;$$

又记在 $[\alpha_F - \epsilon_F, \alpha_T + \epsilon_T]$ 的 h 函数为 h_\sim , 相应的真值程度函数记为 g_\sim .

定义 7. f 是非空对象集合 X 的一维数值化映射, h_\sim 是连续的, 且设 $y = f(x)$. 若 $(a, b) \subseteq \Xi$, 称

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b h_\sim(y) dy$$

为区间 (a, b) 相对于相应谓词的真值程度; y 称作中介变量.

在 h_\sim 是连续的情形下, $\int_a^b h_\sim(y) dy$ 是曲线 $y =$

$a, y = b, h_\sim(y) = 0$ 和 $h_\sim(y)$ 所围成的面积, 因此存在 $\iota \in (a, b)$, $f(\iota) = \mu_L$, 使得

$$\int_a^b h_\sim(y) dy = (b-a) \times \mu_L,$$

所以 μ_L 正是对应区间 (a, b) 的 $h_\sim(y)$ 的均值, 它反映了区间 (a, b) 的真值程度.

定理 3.

① 若 $[a, b] \subseteq \Xi$, 则 $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b h_T(y) dy = 1$;

② 若 $(a, b] \subseteq \Xi$, 则 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b h_F(y) dy = 1$.

证明. ①

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b h_T(y) dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \left(\int_a^{\alpha_F + \epsilon_F} 0 dy + \int_{\alpha_T - \epsilon_T}^b dy \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{2} y^2 - (\alpha_F + \epsilon_F) y}{(b-a)(\alpha_T - \epsilon_T) - (\alpha_F + \epsilon_F)} \right]_{\alpha_F + \epsilon_F}^{\alpha_T - \epsilon_T} + \\ &\quad \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{y}{b-a} \right]_{\alpha_T - \epsilon_T}^b \\ &= 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

② 证明与①类似, 略.

证毕.

3 模糊程度的度量

我们知道, $h(f(x)) = 1/2$ 表明 x 对于 P 或 $\neg P$ 的真值程度都是一样的, 即此时的模糊性最大, 我们以此为基点讨论模糊程度的度量.

3.1 模糊程度

定义 8. f 是非空对象集合 X 的一维数值化映射, 即 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$. 若 $h(\alpha_\sim) = 1/2$, 或 α_\sim 是可移去断点且 $\lim_{y \rightarrow \alpha_\sim} h(y) = 1/2$, 则称 α_\sim 为 $\sim P$ 的 $1/2$ 标准度, 或称作中介标准度.

定义 9. 具有中介标准度的数值化映射 $f(x)$ 称作正规数值化映射. 记正规数值化映射的集合为 F_N .

定义 10. 集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 并设 $f \in F_N$, $y = f(x)$, 并称之为中介变量. 若映射 $v: f(X) \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下列条件:

- ① v 是连续函数;
- ② $h(y) = 0 \vee h(y) = 1 \Leftrightarrow v(y) = 0$;
- ③ $h(y) = 1/2 \vee \lim_{y \rightarrow \alpha_\sim} h(y) = 1/2 \Leftrightarrow v(y) = 1$;
- ④ $h(y_1) \leq h(y_2) \leq 1/2 \vee h(y_1) \geq h(y_2) \geq 1/2 \Leftrightarrow v(y_1) \leq v(y_2)$,

则称 v 为相对于 $\sim P$ 的真值程度函数,亦即对应中介标准度的模糊程度,简称模糊程度.

显然,对应谓词 P 的真数值区域 \mathbb{T} 和假数值区域 \mathbb{F} 的模糊程度均为 0,这表示它们是清晰的.当 P 是正谓词时,若 $h(y) < 1/2$,则 $v(y)$ 偏假,亦即含 $\neg P$ 的成分多;若 $h(y) > 1/2$,则 $v(y)$ 偏真,亦即含 P 的成分多.若 $v(y) < 0$,则表示更清晰,即 y 对应了 $+P$ 或 \neg^+P .根据定义,可以容易证明以下定理.

定理 4. $v(y)$ 的最大值为 1.

由于程度是度量的结果,所以定理 4 保证了 v 作为模糊程度的合理性.

定理 5. $(a, b) \subseteq \mathbb{M}$. 当 $\frac{1}{b-a} \int_a^b h(y) dy$ 具有最大的模糊性时, $a+b = (\alpha_T - \epsilon_T) + (\alpha_F + \epsilon_F)$.

证明. 若 $\frac{1}{b-a} \int_a^b h(y) dy$ 具有最大的模糊性,则 $v(y) = 1$. 根据定义 10, 知此时 $h(y) = 1/2$. 下面应从 $h_T(y)$ 和 $h_F(y)$ 两方面证明.

① $h(y) = h_T(y)$. 令

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b h_T(y) dy = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b \frac{y - (\alpha_F + \epsilon_F)}{(\alpha_T - \epsilon_T) - (\alpha_F + \epsilon_F)} dy \right) = \frac{1}{2},$$

解得

$$b + a - 2(\alpha_F + \epsilon_F) = (\alpha_T - \epsilon_T) - (\alpha_F + \epsilon_F);$$
$$b + a = (\alpha_T - \epsilon_T) + (\alpha_F + \epsilon_F);$$

② $h(y) = h_F(y)$. 证明与①类似,略.

综合①,②,定理得证. 证毕.

定理 6. 设 $y = f(x) \in F_N$.

$$v_1(y) = \begin{cases} 2(h(y)), & -\infty \leq h(y) \leq 1/2 \\ 2(1-h(y)), & 1/2 \leq h(y) \leq \infty \end{cases},$$

则 v_1 是对应中介标准度的模糊程度.

定理 6 的证明是显然的, v_1 的变化如图 1 所示.

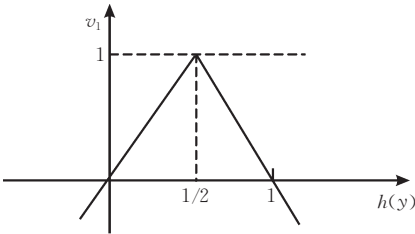


图 1 v_1 的变化

3.2 中介熵

3.2.1 离散型中介熵

令 $0 \log 0 = 0$. 在 $x \in [0, 1]$ 区间,著名的熵函数^[8]

$S(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$ 的变化如图 2 所示.

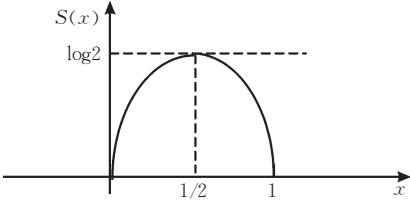


图 2 $S(x)$ 的变化

定义 11. 设 $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in \mathbb{E}$, 称

$$H^-(b) = \sum_{i=1}^n S(h_{\sim}(y_i))$$

为 b 的离散中介熵.

定理 7. $b \in \mathbb{E} \wedge c \in \mathbb{E} \Rightarrow$

$$H^-(b) + H^-(c) = H^-(b \cup c) + H^-(b \cap c).$$

定理 8. $\exists b \exists c (b \in \mathbb{E} \wedge c \in \mathbb{E} \wedge b \neq c \Rightarrow H^-(b) - H^-(c) = 0)$.

在物理学中,只有熵变化才有实际意义.但定理 8 表明处理模糊现象时,熵变是 0 也有意义.

3.2.2 连续型中介熵

定义 12. 设连续型中介变量 ρ 的真值程度函数为 $h_{\sim}(y)$, 则称

$$H^-(\rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\sim}(y) \ln h_{\sim}(y) dy$$

为连续型中介变量 ρ 的中介熵.

3.3 中介熵表示的模糊程度

定义 13. 中介熵的最大值称为模糊标准度,记作 α_M .

容易证明以下定理.

定理 9. 集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 并设 $f \in F_N, y = f(x)$. 记 E_M 为中介熵, 则 $E_M / \alpha_M \in v(y)$.

定理 10. 离散中介熵 $H^-(b) = \sum_{i=1}^n S(h_{\sim}(y_i))$ 的最大值为 $n \log 2$.

推论 3. $\frac{1}{n \log 2} H^-(b) \in v$.

记 $\frac{1}{n \log 2} H^-(b)$ 为 v_D , 并称之为中介熵表示的离散模糊程度,简称离散模糊程度.

容易验证离散模糊程度是一种描述集合所含模糊性的量度.

例 2. 天气的冷热是反对对立的两个方面.若规定温度不小于 28°C 为热,温度小于 8°C 为冷,则温度在 $[8, 28]$ 区域为暖和, $\alpha_{\sim} = 18$. A 地某周的日气温用向量 $T_A = (12, 14, 12, 16, 18, 18, 20)$ 表示,则

向量 $\boldsymbol{h}_T = (4/20, 6/20, 4/20, 8/20, 10/20, 10/20, 12/20)$,

$$\begin{aligned} v_D(T_A) &= \frac{1}{7\ln 2} \sum_{i=1}^7 S(h_{\sim}(y_i)) \\ &= \frac{1}{7\ln 2} (S(0.2) + S(0.3) + S(0.2) + \\ &\quad S(0.4) + S(0.5) + S(0.5) + S(0.6)) \\ &= \frac{1}{7\ln 2} (0.6109 + 2(0.5004 + 0.6729 + 0.6881)) \\ &= 0.8932. \end{aligned}$$

此值表明 A 地某周的气温暖和(以 18°C 为参照点)的程度;又因 $A_{\text{TM}}(X)=0.3857$, 所以 A 地某周的气温偏冷. 若 B 地某周的日气温用向量 $\boldsymbol{T}_B=(16, 18, 16, 18, 22, 24, 24)$ 表示, 则向量 $\boldsymbol{h}_T=(8/20, 10/20, 8/20, 10/20, 14/20, 16/20, 16/20)$,

$$\begin{aligned} v_D(T_B) &= \frac{1}{7\ln 2} \sum_{i=1}^7 S(h_{\sim}(y_i)) \\ &= \frac{1}{7\ln 2} (S(0.4) + S(0.5) + S(0.4) + \\ &\quad S(0.5) + S(0.7) + S(0.8) + S(0.8)) \\ &= \frac{1}{7\ln 2} (0.6109 + 2(0.5004 + 0.6729 + 0.6881)) \\ &= 0.8932. \end{aligned}$$

虽然 B 地某周的气温为暖和的程度与 A 地相同, 但因 $A_{\text{TM}}(X)=0.5857$, 所以 B 地某周的气温偏热.

定理 11. 连续型中介熵 $H^{\sim}(\rho)=-\int_{-\infty}^{\infty} h_{\sim}(y) \cdot \ln h_{\sim}(y) dy$ 的最大值为 $\frac{B-A}{4}$, 其中 $B=\alpha_T-\epsilon_T, A=\alpha_F+\epsilon_F$.

证明. 因为 h_{\sim} 是在 $[\alpha_F-\epsilon_F, \alpha_T+\epsilon_T]$ 的 h 函数, 所以 $H^{\sim}(\rho)$ 应在 $h_T(y)$ 和 $h_F(y)$ 的情形下分别讨论.

$$\begin{aligned} &\textcircled{1} h(y)=h_T(y). \\ H^{\sim}(\rho) &= -\int_{-\infty}^{\infty} h_T(y) \ln h_T(y) dy \\ &= -\int_{-\infty}^A h_T(y) \ln h_T(y) dy - \int_A^B h_T(y) \ln h_T(y) dy - \\ &\quad \int_B^{\infty} h_T(y) \ln h_T(y) dy \\ &= -\int_{-\infty}^A 0 \ln 0 dy - \int_A^B h_T(y) \ln h_T(y) dy - \int_B^{\infty} 1 \ln 1 dy \\ &= -\int_A^B h_T(y) \ln h_T(y) dy = -\int_A^B \frac{y-A}{B-A} \ln \frac{y-A}{B-A} dy \\ &\text{令 } \frac{y-A}{B-A}=z, \text{ 则 } dy=(B-A)dz, \text{ 且当 } y=A \text{ 时, } z= \\ &0; \text{ 当 } y=B \text{ 时, } z=1. \text{ 于是} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\int_A^B \frac{y-A}{B-A} \ln \frac{y-A}{B-A} dy = -(B-A) \int_0^1 z \ln z dz \\ &= -(B-A) \left[z^2 \left(\frac{\ln z}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{B-A}{4}; \end{aligned}$$

② $h(y)=h_F(y)$. 证明与①类似, 略.
综合①、②, 定理得证. 证毕.

推论 4. $\frac{4}{B-A} H^{\sim}(\rho) \in v$.
记 $\frac{4}{B-A} H^{\sim}(\rho)$ 为 v_c , 并称之为中介熵表示的连续模糊程度, 简称连续模糊程度.

定理 11 和推论 4 是在 ξ 为恒等变换, 即 $g=\xi \circ h \circ f=h \circ f$ 的情形下得到的. 下面对 ξ 为非恒等变换情形进行简单的讨论.

定理 12. 设 $\xi(h(y))=(h(y))^k$, 则连续型中介熵

$$\begin{aligned} H^{\sim \xi}(\rho) &= -\int_{-\infty}^{\infty} (h_{\sim}(y))^k \ln (h_{\sim}(y))^k dy \\ \text{的最大值为 } &\frac{B-A}{4}, \text{ 其中 } k>0, B=\alpha_T-\epsilon_T, A= \\ &\alpha_F+\epsilon_F. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{证明.} \\ H^{\sim \xi}(\rho) &= -\int_{-\infty}^{\infty} (h_{\sim}(y))^k \ln (h_{\sim}(y))^k dy \\ &= -\int_{-\infty}^A (h_T(y))^k \ln (h_T(y))^k dy - \\ &\quad \int_A^B (h_T(y))^k \ln (h_T(y))^k dy - \\ &\quad \int_B^{\infty} (h_T(y))^k \ln (h_T(y))^k dy \\ &= -\int_A^B \left(\frac{y-A}{B-A} \right)^k \ln \left(\frac{y-A}{B-A} \right)^k dy, \end{aligned}$$

令 $\frac{y-A}{B-A}=z$, 则 $dy=(B-A)dz$, 且当 $y=A$ 时, $z=0$; 当 $y=B$ 时, $z=1$. 于是

$$\begin{aligned} &-\int_A^B \left(\frac{y-A}{B-A} \right)^k \ln \left(\frac{y-A}{B-A} \right)^k dy = \\ &-(B-A) \int_0^1 z^k \ln(z^k) dz = \frac{k(B-A)}{(k+1)^2}. \\ &\text{令 } g(k)=\frac{k(B-A)}{(k+1)^2}, \text{ 则 } g'(k)=\frac{(1-k^2)(B-A)}{(k+1)^4}. \end{aligned}$$

在 $k<0$ 时, $g''(k)>0$; 在 $k>0$ 时, $g''(k)<0$. 所以上述积分的最大值是 $\frac{B-A}{4}$ (在 $k=1$ 时得到). 证毕.

4 过渡转换为反对对立的条件

中介逻辑的反对对立概念要求: “两个概念都有

其自身肯定的内容”,并强调“在同一内涵的一个更为高级的概念中,二者之间存在着最大的差异”^[2]. 概念描述中所要求的“最大的差异(两极)”的条件太强,显然限制了中介系统的应用范围. 是否既能弱化“两极”、突出“过渡”,即注重存在差异的状态之间的变化过程,又能以中介数学系统作为理论基础,这成为能否在更宽广的范围可靠地应用中中介真值度量方法所必须回答的问题.

对立被认为是两种事物或一种事物中的两个方面之间的相互排斥、相互矛盾和相互斗争^[9]. Cohen 在深入研究后总结指出:像直接的与间接的、单一的与大量的、理想的与现实的这些成对出现的对立概念仅能以相互之间的差异进行理解^[10]. 差异往往与过渡有关联. 过渡是指从一种状态逐渐地变为另一种状态^[9]. 有过渡必存在差异;有差异未必存在过渡. 以有否过渡为准,我们可以把对立分为存在过渡的对立与不存在过渡的对立. 在中介逻辑中,矛盾对立是不存在过渡的对立,反对对立是指存在过渡的并强调两极的对立.

定义 14. X 是非空对象集合, f 是 X 的数值化映射. 对于 $x \in X, y = f(x), f(X)$ 若满足

$$\begin{aligned} P(x) &\vdash \vdash y \in a^{\circ}; \\ \sim P(x) &\vdash \vdash y \in a^{\sim\circ}; \\ \neg P(x) &\vdash \vdash y \in a^{-\circ}; \\ f(X) &= a^{\circ} \cup a^{\sim\circ} \cup a^{-\circ}, \end{aligned}$$

则称 f 是与谓词 P 对应的标准映射;称 P 是与数值化映射 f 对应的标准模糊谓词.

定义 14 中, $a^{\circ}, a^{\sim\circ}, a^{-\circ}$ 表示不同的清晰化集^[6]. 谓词 P 与 f 的对应关系如图 3 所示.

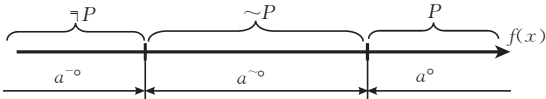


图 3 定义 14 中的谓词 P 与 f 的对应关系

定义 15. Q_0, Q_1 是清晰(二值)谓词, X 是非空对象集合, f 是 X 的数值化映射. 对于 $x \in X, y = f(x), f(X)$ 若满足

$$\begin{aligned} Q_0(x) &\vdash \vdash y \in b_0; \\ Q_1(x) &\vdash \vdash y \in b_1; \\ \neg Q_0(x) \wedge \neg Q_1(x) &\vdash \vdash y \in b_2; \\ \forall u \forall v \forall w (u \in b_0 \wedge v \in b_2 \wedge w \in b_1) &\vdash w < v < u; \\ f(X) &= b_0 \cup b_1 \cup b_2, \end{aligned}$$

则称 f 是与谓词 Q_0, Q_1 对应的广义映射, 简称广义映射;称 $\neg Q_0 \wedge \neg Q_1$ 是 Q_0, Q_1 之间的过渡.

定义 15 中的谓词 Q_0, Q_1, Q_2 与 f 的对应关系如图 4 所示.

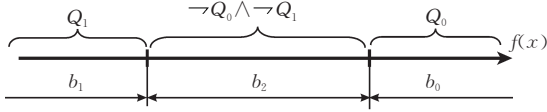


图 4 定义 15 中的谓词 Q_0, Q_1 与 f 的对应关系

根据定义 15 容易证明下面的定理和推论.

定理 13. 若 Q_0, Q_1 是对应广义映射的清晰谓词, 则

- ① $Q_0 \vdash \neg Q_1$;
- ② $Q_1 \vdash \neg Q_0$.

推论 5. 若 Q_0, Q_1 是清晰谓词, 且它们之间存在过渡, 则

- ① $Q_0 \vdash \neg Q_1$;
- ② $Q_1 \vdash \neg Q_0$.

定理 14. 若 Q_0, Q_1 是广义映射中的清晰谓词, 令映射

$$\begin{aligned} P: \{T, F\}^2 &\rightarrow \{T, M, F\} \text{ 为 } P = (Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee \\ &((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)), \end{aligned}$$

则有

- ① $P \vdash \vdash Q_0$;
- ② $\sim P \vdash \vdash \neg Q_0 \wedge \neg Q_1$;
- ③ $\neg P \vdash \vdash Q_1$.

证明.

① \vdash

若 $Q_0 = T$, 有 $Q_1 = F$;

$$\begin{aligned} (Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) \\ = (T \wedge T) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) \\ = T, \end{aligned}$$

所以 $P \vdash Q_0$;

\vdash

若 $P = T$, 即

$$\begin{aligned} (Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) \\ \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) = T, \end{aligned}$$

则

$$(Q_0 \wedge \neg Q_1) = T$$

或

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) = T.$$

然而 $A = T$ 或 $A = F$ 时, $\neg \sim A$ 之值均为 M ,

所以

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \sim (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)$$

之值不可能为 T . 因此, 只能是

$$Q_0 \wedge \neg Q_1 = T.$$

此时有 $Q_0 = T$ 和 $Q_1 = F$, 所以 $P \vdash Q_0$.

② \vdash

若 $\neg Q_0 \wedge \neg Q_1 = T$, 则有 $Q_0 = Q_1 = F$.

$$(Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) \\ = (F \wedge T) \vee (T \wedge \neg \neg (T)) = F \vee M = M,$$

所以 $\sim P \vdash \neg Q_0 \wedge \neg Q_1$;

\vdash

若 $\sim P = T$, 则 $P = M$, 即

$$(Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) = M.$$

则因

$$Q_0 \wedge \neg Q_1 = F,$$

故只有

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) = M.$$

又因

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) = T,$$

所以

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \\ = T \wedge \neg \neg (T) = T \wedge M = M.$$

于是 $\sim P \vdash \neg Q_0 \wedge \neg Q_1$.

③ \vdash

若 $Q_1 = T$, 有 $Q_0 = F$; 因

$$(Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) \\ = (F \wedge F) \vee ((T \wedge F) \wedge \neg \neg (T \wedge F)) \\ = F \vee (F \wedge M) = F \vee F = F,$$

故 $P = F$, 所以 $\neg P = T$, 于是 $\neg P \vdash Q_1$;

\vdash

若 $\neg P = T$, 则 $P = F$, 即

$$(Q_0 \wedge \neg Q_1) \vee ((\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1)) = F.$$

则

$$Q_0 \wedge \neg Q_1 = F,$$

且

$$(\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) \wedge \neg \neg (\neg Q_0 \wedge \neg Q_1) = F.$$

然而 $A = T$ 或 $A = F$ 时, $\neg \neg A$ 之值均为 M , 故只有 $A = \neg Q_0 \wedge \neg Q_1 = F$. 又因 $Q_0 = F, Q_1 = T$ 时, $P = F$ (虽然 $Q_0 = T, Q_1 = T$ 时, 也有 $P = F$, 但与条件矛盾), 所以 $\neg P \vdash Q_1$. 证毕.

上面的 3 个互推关系的证明虽然清楚, 但须指出, 完全可以用其它方法简化证明. 例如: 只证① \vdash , ② \vdash 和③ \vdash ; 或只证① \vdash , ③ \vdash .

5 结束语

本文是文献[5]的继续, 所讨论问题的要点如下:

(1) 以个体的真值程度的度量为基础, 论述了离散型和连续区间群体(集合)的真值程度的度量;

(2) 提出模糊程度概念;

(3) 在提出中介熵的概念后, 讨论了中介熵的最大值, 从而可以用中介熵描述模糊程度;

(4) 针对反对对立概念中强调“最大的差异”, 而限制了中介真值程度的度量方法的应用范围的问题, 提出弱化“两极”, 突出“过渡”的观点;

(5) 在建立标准数值化映射和广义数值化映射概念后, 用谓词映射的方法把二值逻辑变换为三值逻辑, 构造性证明了过渡情形能转换为反对对立情形的充分条件, 这表明我们可以把所有存在过渡的情形作为反对对立的情形处理, 从而使得中介真值程度度量方法可以在更加宽广的领域中得到可靠的、有效的应用.

面向应用是本文的目的, 有关中介数学系统的纯数学理论可参阅文献[2]. 文献[5]和本文较系统地形成了一种有别于模糊数学和粗集理论的数值化处理模糊现象的方法, 这些工作旨在为进一步的应用研究打下了基础. 鉴于模糊数学应用的现状, 相信中介真值程度的数值量化方法也将在涉及处理模糊现象的各个领域得到广泛的、有效的应用.

注记 比率是度量的根据^[11]. 这里所说的比率是指被测量的对象与单位之间的比, “只要我们能利用它”作为比率的分母, “它就是单位”^[11]. 文献[5]和本文中的度量都是根据这种概念描述的.

参 考 文 献

- [1] Zhu Wu-Jia, Xiao Xi-An. Propositional calculus system of medium logic (I). Nature Magazine, 1985, (8): 315-319 (in Chinese)
(朱梧楦, 肖奚安. 中介逻辑的命题演算系统(I). 自然杂志, 1985, (8): 315-319)
- [2] Zhu Wu-Jia, Xiao Xi-An. Essentials of mathematical foundation. Nanjing: Nanjing University Press, 1996 (in Chinese)
(朱梧楦, 肖奚安. 数学基础概论[M]. 南京: 南京大学出版社, 1996)
- [3] Zhu Wu-Jia, Xiao Xi-An. An extension of the propositional calculus system of medium logic (I). Journal of Nanjing University, 1990, 4: 564-574
- [4] Zhang Dong-Mo, Xiao Xi-An. Inclusion relationship between classical axiomatic set theory and medium axiomatic set theory. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1997, 17(3): 475-478 (in Chinese)
(张东摩, 肖奚安. 经典公理集合论系统与中介公理集合论系统之间的包含关系. 数学研究与评论, 1997, 17(3): 475-478)

[5] Hong Long, Xiao Xi-An, Zhu Wu-Jia. Measure of medium truth scale and its application (I). Chinese Journal of Computers, 2006, 29(12): 2186-2194(in Chinese)
(洪龙,肖奚安,朱梧楦. 中介真值程度的度量及其应用(I). 计算机学报, 2006, 29(12): 2186-2194)

[6] Xiao Xi-An, Zhu Wu-Jia. A system of medium axiomatic set theory. Science in China (A), 1988, (11): 1320-1335

[7] Zhu Wu-Jia, Xiao Xi-An. An extension of the propositional calculus system of medium logic (II). Journal of Nanjing University, 1991, 2: 209-221

[8] Shen Shi-Yi, Chen Lu-Sheng. Information Theory and Cod-

ing. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese)
(沈世镡, 陈鲁生. 信息论与编码理论. 北京: 科学出版社, 2002)

[9] Ding Sheng-Shu. Current Chinese Dictionary. Shanghai: The Commercial Press, 2005(in Chinese)
(丁声树. 现代汉语词典. 上海: 商务印书馆, 2005)

[10] Flew A. A Dictionary of Philosophy. New York: St. Martin's Press, 1984

[11] Jin Yue-Lin. Knowledge Theory. Shanghai: The Commercial Press, 2003(in Chinese)
(金岳霖. 知识论. 上海: 商务印书馆, 2003)



HONG Long, born in 1952, Ph. D. , senior engineer. His current research interests include computer architecture and artificial intelligence.

XIAO Xi-An, born in 1945, professor and Ph. D. supervisor. His research interests include foundations of mathematics, mathematical logic and fuzzy mathematics.

ZHU Wu-Jia, born in 1935, professor and Ph. D. supervisor. His research interests include foundations of mathematics, non-classical logics and artificial intelligence.

Background

Vague phenomenon exists widely in natural would and real society, and it is a frequent problem confronting us and having to solve by us in engineering and scientific research. Zadeh L A in 60's of 20th century and Pawlak Z in 80's of 20th century established mathematical methods for processing fuzzy phenomenon respectively.

To lay the mathematics foundation of processing fuzzy phenomenon, Zhu Wu-Jia and Xiao Xi-An, two authors of this paper, proposed medium rule in 80's of 20th century, and they established medium axiomatic set theory using the medium logic created by themselves as inferential tools, which realized the extension of the mathematics study objects from precise quantity objects to fuzzy quantity objects. Since Zhu and Xiao's research is original and interesting, scholars in different disciplines around the world have dedicated tremendous amount of effort to the study of medium mathematics systems. So far, several hundred-influence papers based on medium logic have been published in international confer-

ences and famous journals.

To make medium mathematics theory be use directly on wide and practical applied fields, the authors researched into the quantification of fuzzy negative and truth grad in medium logic recently. The reference [5] and this paper are main reports about the research achievements, in which a quantification method which was based on logics and different from fuzzy set and rough set for processing fuzzy phenomenon was established and the foundation for the study and application in future was set. The group's current research interests are focused on applying MMTS (measure of medium truth scale) to information science, and have got first results in computer architecture, digital image processing, intelligent algorithm, data mining, measuring performance and so on.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60273037 and the National Basic Research Program of China (973 Program) under grant No. 1999032701.