

# 在 $MM^*$ 比较模型下 Möbius 立方体的 一个快速诊断算法

阳 惠 杨小帆

(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

**摘 要** 基于比较的诊断是多计算机故障诊断的一种实用方法. Möbius 立方体是超立方体结构的一种变形, 具有并行处理所需的某些性质. 文章在  $MM^*$  比较模型下研究了 Möbius 立方体的诊断问题. 利用 Möbius 立方体中圈的分布特性, 提出了一个新的诊断算法. 通过数据的适当组织, 该算法的运行时间为  $O(N \log_2^2 N)$ , 其中  $N$  表示处理器总数. 而经典的 Sengupta-Dahbura 诊断算法所需时间为  $O(N^5)$ . 因此, 新算法在诊断时间方面明显优于 Sengupta-Dahbura 算法.

**关键词** 多计算机系统; 系统级故障诊断; 基于比较的诊断算法; Möbius 立方体

**中图法分类号** TP306

## A Fast Diagnosis Algorithm on Möbius Cube Under the $MM^*$ Comparison Model

YANG Hui YANG Xiao-Fan

(College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract** Comparison-based diagnosis is a practical approach to the system-level fault diagnosis of multicomputers. The Möbius cube is a variant of the hypercube, which possesses some features desirable for parallel processing. This paper addresses the fault diagnosis of the Möbius cube under the  $MM^*$  comparison model. By employing the distributed property of cycles over a Möbius cube, the authors present a new diagnosis algorithm. With elaborately organized data, this algorithm can operate in  $O(N \log_2^2 N)$  time, where  $N$  stands for the total number of nodes. In comparison, the classical Sengupta-Dahbura diagnosis algorithm takes as much as  $O(N^5)$  time to achieve the same goal. As a consequence, the proposed algorithm is remarkably superior to the Sengupta-Dahbura algorithm in terms of the time overhead.

**Keywords** multicomputer; system-level diagnosis; comparison-based diagnosis algorithm; Möbius cube

## 1 引 言

随着多计算机规模的扩大, 尤其是大规模系统和网络应用的日益广泛, 系统与网络的安全性和稳

定性问题变得十分重要. 系统级故障诊断是保证网络和多机系统可靠性的一种重要手段<sup>[1]</sup>. 系统级故障诊断的基本思想是: 让系统中的处理器相互测试, 通过对测试结果进行逻辑分析来确定系统中的故障处理器.

收稿日期: 2006-01-24; 修改稿收到日期: 2007-01-16. 本课题得到教育部新世纪人才计划(NCET-05-0759)、教育部博士点基金(20050611001)、重庆市自然科学基金 CSTC(2006BB2231, 2005BB2191)以及重庆大学研究生科技创新基金(200701Y1A0050191)资助.  
阳 惠, 女, 1982 年生, 博士研究生, 主要研究方向为系统级故障诊断、容错计算等. E-mail: yanghui\_cqu@126.com; yanghui\_cqu@163.com. 杨小帆, 男, 1964 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为系统级故障诊断、容错计算、差分方程、神经网络、生物计算等.

系统级故障诊断有两种基本方法：一种是基于测试的诊断<sup>[2]</sup>，规定每个处理器测试与它有直接相连的某些处理器，通过分析测试结果来定位故障处理器。另一种是基于比较的诊断<sup>[3]</sup>，规定某些处理器执行同一任务，通过结果的一致性来识别故障。Maeng 和 Malek<sup>[3]</sup>提出了一种具有实用价值的比较诊断模型（称为 MM\* 模型），规定每个处理器对任意两个与它直接相连的处理器进行比较。在 MM\* 模型下，Sengupta 和 Dahbura<sup>[4]</sup>提出了一个  $O(N^5)$  时间的诊断算法，其中  $N$  表示处理器个数。当  $N$  较大时，这个算法是很费时的。

超立方体结构是广泛采用的多计算机互连拓扑。近年来，又提出了某些立方体变形结构，Möbius 立方体就是其中之一<sup>[5]</sup>。 $n$  维 Möbius 立方体具有与  $n$  维立方体相同的结点数和边数，其直径却只有后者的一半。因此，Möbius 立方体引起了学术界的广泛关注<sup>[6-13]</sup>。最近，Chang 等人<sup>[6]</sup>证明：在 MM\* 模型下，如果故障处理器数不超过  $n$ ，一个  $n$  维 Möbius 立方体中的故障处理器可以被正确诊断。就我们所知，目前还没有一个在 MM\* 模型下针对 Möbius 立方体的高效率诊断算法。若把 Sengupta-Dahbura 诊断算法应用于 Möbius 立方体，其时间复杂度较高。

文献[14-17]运用所谓的圈分解技术开发了若干高效率的故障诊断算法。受此启发，本文研究 MM\* 模型下 Möbius 立方体的诊断问题，提出了一个基于圈分解思想的诊断算法。通过选择适当的数据结构，该算法的时间复杂度为  $O(N\log_2^2 N)$ ，明显优于 Sengupta-Dahbura 诊断算法。

2 定义和符号

就诊断这一目标而言，可以用无向图  $G=(V,E)$  表示一个多计算机，图中结点表示处理器，边表示通信链路。图  $G$  的哈密尔顿圈或  $H$  圈是经过图  $G$  的每个结点恰好一次的圈。 $G[S]$  表示  $G$  的由结点集  $S$  导出的子图。图论的有关术语和符号见文献[18]。

比较模型可表示为一个加权图  $M=(V,C)$ ，其中  $V$  为结点集， $C$  为加权边的集合。如果边  $(u,v)_w \in C$ ，则边上的权为  $w$ ，表示比较器  $w$  对处理器  $u,v$  进行比较。比较结果表示为  $r((u,v)_w)$ ，其中若  $u$  和  $v$  的结果一致，则  $r((u,v)_w)=0$ ，否则  $r((u,v)_w)=1$ 。比较结果的汇总称为症候，记为  $r$ 。

MM\* 模型是一种特殊的比较模型。在 MM\* 模

型中，满足  $\{w,u\} \in E$  以及  $\{w,v\} \in E$  的结点  $w$  都可以作为  $u,v$  的比较器，因此一对结点的比较器可以有多个，其比较模型  $M$  可以用一个多权值的图来表示。MM\* 模型作了以下假定：(1) 系统中所有故障都是永久故障；(2) 无故障结点总能给出正确的比较结果，而故障结点给出的比较结果是不可信的（见表 1）。

表 1 MM\* 模型

被测试者 $u$ 和 $v$ 的状态	比较器 $w$ 的状态	$r((u,v)_w)$
均无故障	无故障	0
至少一个有故障	无故障	1
任何情况	有故障	0 或 1

**定义 1.** 给定图  $G$  上的一个症候  $r$  和  $G$  中的一个圈  $C$ 。如果对  $C$  上任意结点  $u$  和  $w$  的两个  $C$  上相邻结点  $u,v$ ，有  $r((u,v)_w)=0$ ，则称  $C$  为  $r$ -零圈；否则称  $C$  为  $r$ -非零圈。 $r$ -零圈上的所有结点称为  $r$ -零点，而  $r$ -非零圈上的所有结点称为  $r$ -非零点。

由 MM\* 模型的假定，容易证明以下引理。

**引理 1.** 给定图  $G$  上的一个症候  $r$ ，设  $C$  是图  $G$  上的一个圈。

(1) 如果  $C$  是一个  $r$ -零圈，那么  $C$  上的所有结点具有相同的状态，即它们或者全为无故障结点或者全为故障结点。

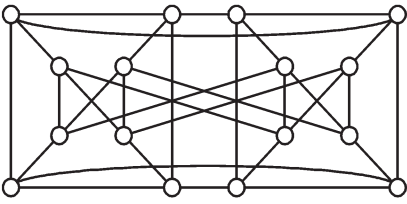
(2) 如果  $C$  是一个  $r$ -非零圈，那么  $C$  上至少有一个故障结点。

**定义 2**<sup>[5]</sup>. 设  $\{0,1\}^n$  表示长为  $n$  的所有二进制字符串的集合。一个  $n$  维的 Möbius 立方体记为  $MQ_n$ ， $MQ_n$  中的每一结点用一个二元字符串表示。两个结点  $x=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ ， $y=y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1y_0$  相邻当且仅当存在  $k(0\leq k\leq n-1)$  满足：

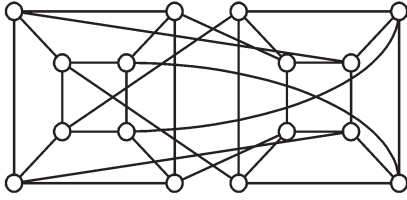
- (1)  $x_i=y_i$ ， $k+1\leq i\leq n-1$ ；
- (2) 根据  $x_{k+1}=0$  或  $1$ ， $x_kx_{k-1}\cdots x_0=\bar{y}_ky_{k-1}\cdots y_0$  或  $x_kx_{k-1}\cdots x_0=\bar{y}_k\bar{y}_{k-1}\cdots \bar{y}_0$ ，其中  $\bar{y}_i$  表示求补。

如果上述条件成立，那么结点  $y$  就是结点  $x$  的第  $k$  维邻点，反之亦然。我们可以假设虚拟最高维  $x_n$  等于 0 或 1，而得到稍微不同的拓扑结构。如果我们假设  $x_n=0(x_n=1)$ ，那么所得到的互连网络称为“0-Möbius 立方体”(1-Möbius 立方体)。以下将两类 Möbius 立方体统一记为  $MQ_n$ 。图 1 给出了两个 4 维 Möbius 立方体。

**引理 2**<sup>[5]</sup>.  $MQ_n(n\geq 2)$  中存在一个  $H$  圈（此  $H$  圈可以递归构造得到）。



(a) 4 维 0-Möbius 立方体



(b) 4 维 1-Möbius 立方体

图 1

3 Möbius 立方体的圈分解特性

这一章主要研究 Möbius 立方体的圈分解特性. 对于二进制串  $x$  和  $y$ , 用  $xy$  表示它们的拼接.

设  $n \geq 3, c(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ . 显然  $c(n) \geq 2$ . 对每个  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$ , 令  $V(x) = \{xy : y \in \{0, 1\}^{c(n)}\}$  表示  $MQ_n$  的一个含  $2^{c(n)}$  个结点的集合, 在该结点子集中, 所有的结点都具有相同的前缀  $x$ . 令  $MQ_n[V(x)]$  表示  $MQ_n$  的由结点集  $V(x)$  导出的子图, 显然  $MQ_n[V(x)]$  同构于  $MQ_{c(n)}$ . 为方便起见, 将  $MQ_n[V(x)]$  简记为  $MQ_n(x)$ .

根据引理 2, 令  $HC$  表示  $MQ_{c(n)}$  中的一个  $H$  圈. 对每个  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$ , 我们定义一个映射  $f_x: V(MQ_{c(n)}) \rightarrow V(x)$ , 对每个  $y \in \{0, 1\}^{c(n)}$ , 满足  $f_x(y) = xy$ . 那么  $HC$  就被映射到  $MQ_n(x)$  中的一个  $H$  圈, 它也是  $MQ_n$  中的圈, 称该圈为由  $HC$  产生的关于  $x$  的圈, 记为  $HC(x)$ . 于是,  $MQ_n$  中包含了  $2^{n-c(n)}$  个长度为  $2^{c(n)}$  的互不相交的圈. 由此, 我们引入下面的概念.

**定义 3.** 对任一整数  $n \geq 3$ , 令  $c(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ , 设  $HC$  是  $MQ_{c(n)}$  中的一个  $H$  圈. 那么  $MQ_n$  中所有由  $HC$  产生的关于  $x$  的圈  $HC(x)$  所组成的集合, 就称为  $MQ_n$  的一个由  $HC$  产生的圈分解, 记为  $CD(HC)$ , 即  $CD(HC) = \{HC(x) : x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}\}$ .  $CD(HC)$  中的两个圈  $HC(x)$  和  $HC(y)$  相邻, 当且仅当  $HC(x)$  中有一个结点与  $HC(y)$  中的某个结点相邻.

由定义 3 可知, 如果所选择的  $HC$  不同, 那么所产生的圈分解也不同. 因此,  $MQ_n$  可以有多种不同的圈分解, 我们把用于产生圈分解的  $HC$  称为基圈.

将  $CD(HC)$  中的每个圈视为一个结点, 两个结点相邻当且仅当  $CD(HC)$  中的两个圈相邻, 那么就可以构造一个图  $T = (V(T), E(T))$ , 其中  $V(T) = \{0, 1\}^{n-c(n)}$ .

**引理 3.**  $T$  同构于  $MQ_{n-c(n)}$ .

**证明.** 我们分别对 0-Möbius 立方体和 1-Möbius 立方体来证明该结论.

(1) 对于 0-Möbius 立方体, 设  $x = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{c(n)}$  和  $y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_{c(n)}$  是  $T$  中两个相邻结点. 由定义 3,  $MQ_n(x)$  中存在结点  $xx_{c(n)-1} \cdots x_0$  与  $MQ_n(y)$  中结点  $yy_{c(n)-1} \cdots y_0$  相邻. 因为  $x \neq y$ , 所以存在一个整数  $c(n) \leq k \leq n-1$ , 使得  $x_i = y_i (k+1 \leq i \leq n-1)$ ,  $x_k \neq y_k$ , 且根据  $x_{k+1} = 0$  或  $1, x_kx_{k-1} \cdots x_0 = \bar{y}_k y_{k-1} \cdots y_0$  或  $x_kx_{k-1} \cdots x_0 = \bar{y}_k \bar{y}_{k-1} \cdots \bar{y}_0$ . 于是, 根据  $x_{k+1} = 0$  或  $1, x_kx_{k-1} \cdots x_{c(n)} = \bar{y}_k y_{k-1} \cdots y_{c(n)}$  或  $x_kx_{k-1} \cdots x_{c(n)} = \bar{y}_k \bar{y}_{k-1} \cdots \bar{y}_{c(n)}$ . 因此  $x$  和  $y$  在  $MQ_{n-c(n)}$  中也相邻. 类似地, 可证若  $x$  和  $y$  在  $MQ_{n-c(n)}$  中相邻, 那么它们在  $T$  中也相邻.

(2) 对于 1-Möbius 立方体, 同理可证. 证毕.

**引理 4.**  $MQ_n$  的圈分解  $CD(HC)$  中的每个圈邻接到同一圈分解中的  $n-c(n)$  个其它的圈.

**证明.** 由引理 3,  $CD(HC)$  中的圈与  $MQ_{n-c(n)}$  中的结点存在一一对应,  $CD(HC)$  中的两个圈相邻当且仅当对应的  $MQ_{n-c(n)}$  中的两个结点相邻. 因此, 命题成立. 证毕.

**引理 5.** 设  $C_1, C_2$  是  $MQ_n$  的圈分解  $CD(HC)$  中的任意两个圈, 则它们至少与该圈分解中的  $2(n-c(n))-2$  个其它的圈相邻.

**证明.** 由  $MQ_n$  的拓扑结构,  $MQ_n$  中任意两个结点至少与  $2n-2$  个其它结点相邻. 由引理 3,  $CD(HC)$  中的任意两个圈至少与  $2(n-c(n))-2$  个其它的圈相邻. 证毕.

4 一个新的诊断算法

4.1 概念

**定义 4.** 给定  $MQ_n$  上的一个症候  $r$ , 设  $C$  是  $MQ_n$  的圈分解  $CD(HC)$  中的一个圈.

(1) 若  $C$  是  $r$ -非零圈, 并且与某个  $r$ -零圈相邻, 则称  $C$  为  $r$ -保护圈.  $r$ -保护圈上的所有结点都称为  $r$ -保护点.

(2) 若  $C$  是  $r$ -非零圈, 并且不与任何一个  $r$ -零圈相邻, 则称  $C$  为  $r$ -未保护圈.  $r$ -未保护圈上的所有结点都称为  $r$ -未保护点.

我们的圈分解诊断算法主要是基于下面的定理.

**定理 1.** 设  $n \geq 11$ ,  $MQ_n$  中的故障结点数不超过  $n$ ,  $CD(HC)$  是  $MQ_n$  的一个圈分解,  $r$  是一个给定的症候. 那么下列结论成立:

- (1)  $CD(HC)$  中, 每个  $r$ -零圈上的结点都是正常结点.
- (2)  $CD(HC)$  中存在  $r$ -零圈.
- (3)  $CD(HC)$  中最多只有一个  $r$ -未保护圈.
- (4) 如果  $CD(HC)$  中存在一个  $r$ -未保护圈, 则在此圈上最多只有一个结点, 所有与它相邻的  $r$ -保护点都是故障点.
- (5) 如果  $CD(HC)$  中存在一个  $r$ -未保护圈, 且该圈上有一个结点满足下面两个条件: (a) 所有与它相邻的  $r$ -保护点都是故障点; (b) 所有与它相邻的  $r$ -未保护点或者为故障点, 或者不与任何一个正常的  $r$ -保护点相邻. 那么该结点无故障.

证明.

(1)  $CD(HC)$  中的每个圈由  $2^{c(n)} = 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}$  ( $\geq n+1$ ) 个结点构成. 由引理 1,  $r$ -零圈上的所有结点具有相同的状态(故障或正常), 因此结论成立.

(2)  $CD(HC)$  中共有  $2^{n-c(n)} = 2^{n-\lceil \log_2(n+1) \rceil}$  ( $\geq n+1$ ) 个圈. 由引理 1, 每个  $r$ -非零圈上至少有一个故障点, 因此  $CD(HC)$  中至少存在一个圈, 该圈上的所有结点均正常, 这个圈必然是  $r$ -零圈.

(3) 假设  $CD(HC)$  中有两个不同的  $r$ -未保护圈, 记为  $C_1, C_2$ . 由引理 5,  $CD(HC)$  中至少有  $2(n-c(n))-2=2(n-\lceil \log_2(n+1) \rceil)-2(\geq n+1)$  个其它的  $r$ -非零圈与  $C_1$  或  $C_2$  相邻, 且由引理 1, 每个  $r$ -非零圈上至少有一个故障点, 则至少有  $n+1$  个故障点, 与已知条件相矛盾.

(4) 假设在  $r$ -未保护圈上有两个不同的结点  $p, q$ , 所有与它们相邻的  $r$ -保护点都是故障点. 由引理 3, 每个  $r$ -未保护点与  $n-c(n)$  个  $r$ -保护点相邻, 而同一个  $r$ -未保护圈上的任意两个  $r$ -未保护点没有共同的  $r$ -保护邻点, 因此至少有  $2(n-c(n))=2(n-\lceil \log_2(n+1) \rceil)(\geq n+1)$  个故障点, 与已知条件相矛盾.

(5) 如果满足这两个条件的结点是故障点, 那么故障结点的数目将会大于  $n$ , 与已知条件相矛盾.

证毕.

#### 4.2 算法框架

算法的主要思想如下.

**算法 1.** DIAGNOSIS.

输入: 整数  $n \geq 11$ ,  $MQ_n$  的一个圈分解  $CD(HC)$ ,  $MQ_n$

上的一个症候  $r$

输出: 诊断出的故障结点集  $F$

- 1. 确定  $CD(HC)$  上的所有  $r$ -零圈和  $r$ -非零圈, 诊断所有  $r$ -零点为正常点.
- 2. 对每个  $r$ -保护点  $p$ , 设  $q$  是与  $p$  相邻的  $r$ -零点,  $w$  是与  $q$  相邻的  $r$ -零点, 根据比较结果  $r((p, w)_q) = 0$  (或 1) 诊断  $p$  为正常点(或故障点).
- 3. 对每个  $r$ -未保护点  $p$ , 设  $q$  是与  $p$  相邻的  $r$ -保护点,  $w$  是  $q$  的邻接点,  $q$  和  $w$  均正常, 则根据比较结果  $r((p, w)_q) = 0$  (或 1) 诊断  $p$  为正常点(或故障点).
- 4. 对每个尚未被诊断的  $r$ -未保护点  $p$ , 设  $q$  是与  $p$  相邻的  $r$ -未保护点,  $w$  是与  $q$  相邻的  $r$ -保护点, 且  $q$  和  $w$  在前面几步中已被诊断为正常点, 那么根据比较结果  $r((p, w)_q) = 0$  (或 1) 诊断  $p$  为正常点(或故障点).
- 5. 令  $F$  是所有被诊断为故障结点的集合. 返回  $F$ .

作为定理 1 的推论, 如下定理保证了算法 DIAGNOSIS 的正确性.

**定理 2.** 设  $n \geq 11$ ,  $MQ_n$  中的故障结点数不超过  $n$ ,  $r$  是一个给定的症候, 则算法 DIAGNOSIS 返回的故障集  $F$  与症候  $r$  是一致的.

#### 4.3 数据的组织

为了使算法 DIAGNOSIS 能达到最佳性能, 尽可能地降低时间复杂度, 需要设计合适的数据结构. 算法中所用到的数据结构如下.

(1) 一个 3 维数组 SYNDROME, 大小为  $2^n \times n \times n$ , 用于记录  $MQ_n$  上的一个症候  $r$ . SYNDROME 的第 1 维下标取值范围是  $\{0, 1\}^n$ , 第 2、3 维下标取值范围是  $0 \sim n-1$  之间的整数. 对每个  $x \in \{0, 1\}^n, 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1, i \neq j$ , SYNDROME $[x][i][j]$  记录了一个比较结果  $r((y, z)_x)$ , 其中  $y$  和  $z$  分别是  $x$  的  $i$  维和  $j$  维邻点.

(2) 一个 1 维数组 BCYCLE, 大小为  $2^{c(n)}$ , 用于记录  $MQ_{c(n)}$  中的一个基圈  $HC: (y^0 \rightarrow y^1 \rightarrow \dots \rightarrow y^{2^{c(n)}-1} \rightarrow y^0)$ . 对每个下标  $0 \leq i \leq 2^{c(n)}-1$ , BCYCLE $[i] = y^i$ .

(3) 一个 1 维数组 ZCYCLE, 大小为  $2^{n-c(n)}$ , 用于记录圈分解  $CD(HC)$  中的  $r$ -零圈和  $r$ -非零圈. ZCYCLE 的下标取值范围是  $\{0, 1\}^{n-c(n)}$ , 对每个  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$ , ZCYCLE $[x] = 0$  或 1, 分别表示  $HC(x)$  是  $r$ -零圈或  $r$ -非零圈. 初始化时, ZCYCLE 中的所有元素都被赋值为 0.

(4) 一个 1 维数组 DIAG, 大小为  $2^n$ , 用于记录诊断结果. DIAG 的下标取值范围是  $\{0, 1\}^n$ , 对每个  $x \in \{0, 1\}^n$ , DIAG $[x]$  记录了  $x$  的诊断结果.

$DIAG[x]$ 取值 $\{-1, 0, 1\}$ , 分别表示结点  $x$  的三种状态: 未被诊断, 正常, 故障. 初始化时,  $DIAG$  中的所有元素都被赋值为  $-1$ .

基于如上所描述的数据结构, 圈分解诊断算法的形式化描述如下:

输入: 整数  $n \geq 11$ , 一个 3 维数组  $SYNDROME$ , 一个 1 维数组  $BCYCLE$ , 一个 1 维数组  $ZCYCLE$ , 一个 1 维数组  $DIAG$ , 各数组的含义同上.

输出: 一个被诊断为故障结点的集合  $F$ .

/\* 初始化 \*/

1. for each  $x \in \{0, 1\}^n$   $DIAG[x] = -1$ ;
2. for each  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$   $ZCYCLE[x] = 0$ ;
- /\* 确定所有的  $r$ -零圈和  $r$ -非零圈 \*/
3. for each  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$ 
  - for each  $i = 0$  to  $2^{c(n)} - 1$
4.  $p = \text{bit position where } BCYCLE[i] \neq BCYCLE[i-1]$ ;
5.  $q = \text{bit position where } BCYCLE[i] \neq BCYCLE[i+1]$ ;
6. if  $(SYNDROME[xBCYCLE[i]] [p] [q] == 1)$ 
  - then  $ZCYCLE[x] = 1$ ; break;

/\* 诊断所有的  $r$ -零点为正常点 \*/

7. for each  $x \in \{0, 1\}^{n-c(n)}$  if  $(ZCYCLE[x] == 0)$ 
  - then for each  $y \in \{0, 1\}^{c(n)}$   $DIAG[xy] = 0$ ;

/\* 算法的以下部分由 3 个循环构成. 第 1 个循环诊断所有的  $r$ -保护点; 第 2 个循环诊断所有具有正常的  $r$ -保护邻点的  $r$ -未保护点; 第 3 个循环诊断所有  $r$ -保护邻点都是故障的  $r$ -未保护点, 它们具有正常的

$r$ -未保护邻点, 该正常的  $r$ -未保护邻点又与正常的  $r$ -保护点相邻接 \*/

8. for  $i = 1$  to 3
9. for each  $x \in \{0, 1\}^n$
10. if  $(DIAG[x] == -1)$  then
11. for  $p = 0$  to  $n - 1$
12.  $y = \text{the } p\text{th dimensional neighbor of } x$ ;
13. if  $(DIAG[y] == 0)$  then
14. for  $q = 0$  to  $n - 1$  except  $p$
15.  $z = \text{the } q\text{th dimensional neighbor of } y$ ;
16. if  $(DIAG[z] == 0)$  then
17. if  $(SYNDROME[y][p][q] == 0)$  then
  - $DIAG[x] = 0$ ; goto 9;
18. else  $DIAG[x] = 1$ ; goto 9;
- /\* 若还有结点未被诊断, 则诊断其为正常结点 \*/
19. for each  $x \in \{0, 1\}^n$  if  $(DIAG[x] == -1)$  then
  - $DIAG[x] = 0$ ;
- /\* 输出所有被诊断为故障结点的集合  $F$  \*/
20.  $F = \text{empty set}$ ;
21. for each  $x \in \{0, 1\}^n$  if  $(DIAG[x] == 1)$  then
  - $F = F \cup \{x\}$ ;
22. output  $(F)$ .

为了更好地理解算法 DIAGNOSIS 的执行过程, 我们给出一个图例来说明(图 2). 算法输入为  $MQ_n$  的一个圈分解, 图中以 4 个方框表示; 图中的灰色、空心 and 黑色圆圈分别表示结点的三种状态: 未被诊断、正常、故障.

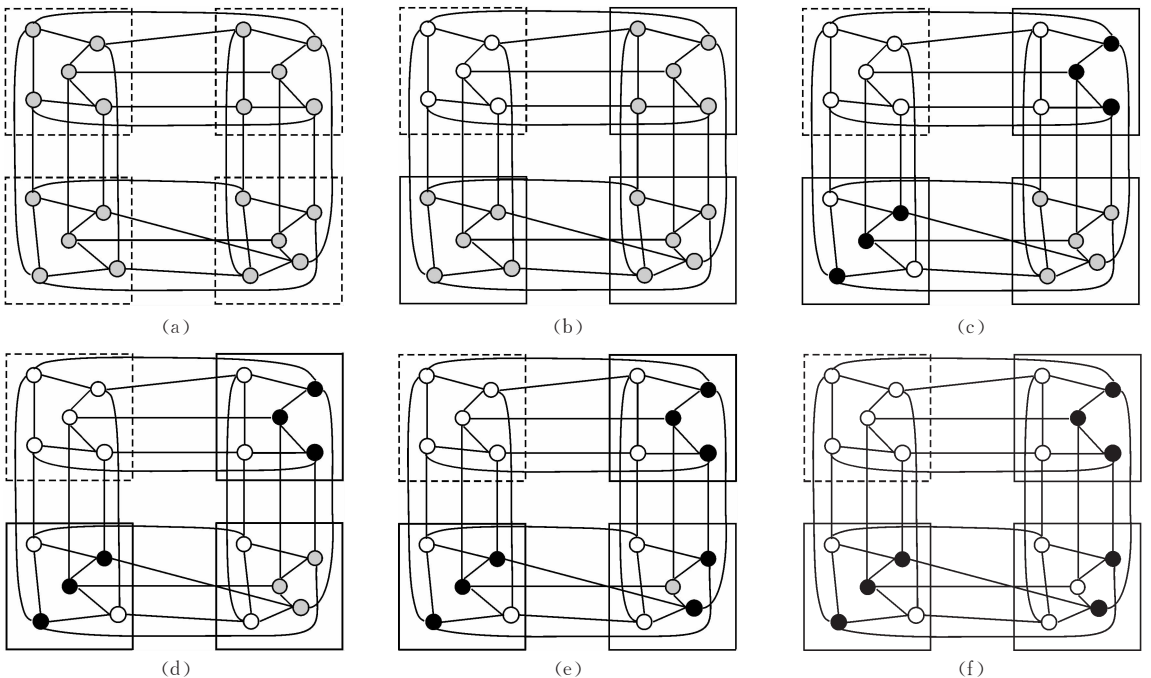


图 2 算法 DIAGNOSIS 的执行过程

图 2(a)说明,算法的初始化阶段,圈分解中的所有圈都被初始化为零圈(以虚线框表示),所有结点的状态都为未诊断(见算法语句 1,2).

图 2(b)确定了所有的  $r$ -零圈和  $r$ -非零圈(以实线框表示),并诊断所有的  $r$ -零点为正常点(见算法语句 3~7).

图 2(c),(d),(e)分别是算法中 3 个循环(见语句 9~18)执行后的结果.其中图 2(c)诊断所有的  $r$ -保护点.图 2(d)诊断所有具有正常的  $r$ -保护邻点的  $r$ -未保护点.图 2(e)诊断所有  $r$ -保护邻点都是故障的  $r$ -未保护点,它们具有正常的  $r$ -未保护邻点,该正常的  $r$ -未保护邻点又与正常的  $r$ -保护点相邻接.

图 2(f)诊断剩余的未诊断结点,由定理 1(5)可知,该结点为正常的(见算法语句 19).

**定理 3.** 算法 DIAGNOSIS 的时间复杂度是  $O(N\log_2^2 N)$ ,其中  $N=2^n$  是  $MQ_n$  的结点数.

证明. 语句 1,2 需要的时间为  $O(2^n)$ ;语句 3~6 需要  $O(n2^n)$ ;语句 7 需要  $O(2^n)$ ;语句 8~18 需要  $O(n^2 2^n)$ ;语句 19 需要  $O(2^n)$ ;语句 20~21 需要  $O(2^n)$ .因此,算法 DIAGNOSIS 的时间复杂度是  $O(n^2 2^n)=O(N\log_2^2 N)$ .注意,算法输入数据量为  $O(n^2 2^n)$ ,因此,该算法的时间复杂度与输入数据量具有相同的数量级. 证毕.

当  $n \leq 5$  时,算法 DIAGNOSIS 不能正常工作,因为此时圈分解  $CD(HC)$  中可能不包含  $r$ -零圈.而当  $n \leq 10$  时,该算法也不能正常工作,因为此时圈分解  $CD(HC)$  中可能包含多于一个的  $r$ -未保护圈.在这种情形下,我们可以调用 Sengupta-Dahbura 算法来诊断系统中的故障结点.这个混合算法的时间复杂度仍为  $O(N\log_2^2 N)$ .

## 5 结束语

在  $MM^*$  模型下,我们提出了一个针对 Möbius 立方体的圈分解诊断算法 DIAGNOSIS,并对算法的正确性进行了论证.通过设计合适的数据结构,该算法的时间复杂度为  $O(N\log_2^2 N)$ .与 Sengupta-Dahbura 算法(其时间复杂度为  $O(N^5)$ )相比,新算法具有明显的优越性.

**致 谢** 匿名审稿人对论文初稿进行了认真审阅,并提出了若干宝贵建议.作者在此表示感谢!

## 参 考 文 献

- [1] Somani A K. System level diagnosis: A review. Iowa State University, Dependable Computing Laboratory: Technical Report, 1997
- [2] Preparata F, Metze G, Chien R. On the connection assignment problem of diagnosable systems. IEEE Transactions on Electronic Computers, 1967, EC-16(6): 848-854
- [3] Maeng J, Malek M. A comparison connection assignment for self-diagnosis of multiprocessor systems//Proceedings of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing. Portland, Maine, USA, 1981: 173-175
- [4] Sengupta A, Dahbura A T. On self-diagnosable multiprocessor systems: Diagnosis by the comparison approach. IEEE Transactions on Computers, 1992, 41(11): 1386-1396
- [5] Cull P, Larson S M. The Möbius cubes. IEEE Transactions on Computers, 1995, 44(5): 647-659
- [6] Chang G Y, Chang G J, Chen G H. Diagnosabilities of regular networks. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16(4): 314-323
- [7] Fan J. Hamilton-connectivity and cycle-embedding of the Möbius cubes. Information Processing Letters, 2002, 82(2): 113-117
- [8] Hsieh S Y, Chen C H. Pancyclicity on Möbius cubes with maximal edge faults. Parallel Computing, 2004, 30(3): 407-421
- [9] Xu J M, Deng Z G. Wide diameter of Möbius cubes. Journal of Interconnection Networks, 2005, 6(1): 51-62
- [10] Xu J M, Ma M, Lü M. Paths in Möbius cubes and crossed cubes. Information Processing Letters, 2006, 97(3): 94-97
- [11] Xu M, Xu J M. Edge-pancyclicity of Möbius cubes. Information Processing Letters, 2005, 96(4): 136-140
- [12] Yang X F, Megson G M. Fault tolerance of Möbius cubes under two forbidden fault set models. International Journal of Computer Mathematics, 2004, 81(8): 909-916
- [13] Yang X F, Megson G M, Evans D J. Pancyclicity of Möbius cubes with faulty nodes. Microprocessors and Microsystems, 2006, 30(3): 165-172
- [14] Khanna S, Fuchs W K. A graph partitioning approach to sequential diagnosis. IEEE Transactions on Computers, 1997, 46(1): 39-47
- [15] Kranakis E, Pelc A. Better adaptive diagnosis of hypercubes. IEEE Transactions on Computers, 2000, 49(10): 1013-1020
- [16] Yang X F. A fast pessimistic one-step diagnosis algorithm for hypercube multicomputer systems. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2004, 64(4): 546-553
- [17] Yang X F, Megson G M, Evans D J. A comparison-based diagnosis algorithm tailored for crossed cube multiprocessor systems. Microprocessors and Microsystems, 2005, 29(4): 169-175
- [18] Harary F. Graph Theory. Reading: Addison-Wesley, 1969



**YANG Hui**, born in 1982, Ph. D. candidate. Her research interests include system-level fault diagnosis and fault-tolerant computing, etc.

**YANG Xiao-Fan**, born in 1964, professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include system-level fault diagnosis, fault-tolerant computing, difference equations, neural networks and biological computing, etc.

Background

The system-level diagnosis of multicomputers, which is aimed at identifying faulty processors by conducting tests on processors and interpreting the test outcomes, is an important topic of research from fault-tolerant computing. The central task of system-level diagnosis is to develop efficient diagnosis algorithms. As a result, many diagnosis algorithms tailored for various interconnection network architectures have been proposed. However, to our knowledge, there is no known efficient diagnosis algorithm on Möbius cube network under the MM\* comparison model.

By employing the distributed property of cycles over a Möbius cube, the authors present a new diagnosis algorithm. With elaborately organized data, this algorithm can operate in  $O(N\log_2^2 N)$  time, where  $N$  stands for the total number of nodes. In comparison, the classical Sengupta-Dahbura diag-

nosis algorithm takes as much as  $O(N^5)$  time to achieve the same goal. Therefore, the diagnosis algorithm is remarkably superior.

The work of this paper is a constituent part of a large project entitled "Parallel Computing and Fault Tolerance", which is supported by Program of Educational Ministry of China for New Century Excellent Talents (Grant No. NCET-05-0759), Doctorate Foundation of Educational Ministry of China (20050611001), Natural Science Foundation of Chongqing CSTC (2006BB2231, 2005BB2191), and Chongqing University Postgraduates' Science and Innovation Fund (200701Y1A0050191).

The research group has published more than 20 academic papers in distinguished international journals towards this direction of research.