

# 三值逻辑函数 RDSOP 形式的代数理论和 T 门实现

姜恩华 姜文彬

(淮北煤炭师范学院物理系 安徽 淮北 235000)

**摘 要** 三值逻辑函数简化的不相交 SOP(RDSOP)形式是一种很有用的代数形式,研究表明,它在 T 门网络的设计和化简方面有重要应用.利用三值格代数的基本运算和主要性质,讨论了三值函数 RDSOP 形式的代数理论和算法,并给出了应用实例.利用以三值 T 门网络可以实现任意三值逻辑函数的原理,提出了基于 RDSOP 形式的三值 T 门网络最小化设计的一种方法,并给出了实例.从给出的实例可以看出,该方法是有有效且可行的.

**关键词** 多值逻辑;T 门网络;RDSOP 形式;最小化;逻辑设计;计算机辅助设计

**中图法分类号** TP302

## Algebra Theory of RDSOP Forms of Ternary Logic Functions and Its Implementation with T-Gates

JIANG En-Hua JIANG Wen-Bin

(Department of Physics, Huaibei Coal Industry Teachers College, Huaibei, Anhui 235000, China)

**Abstract** Reduced disjoint SOP (RDSOP) forms of ternary logic functions are one type of very useful algebraic forms. The study in the paper shows that it has important applications in the field of designing and simplifying T-gate networks. This paper discusses algebra theory and algorithm of RDSOP forms of ternary logic functions by using fundamental operations and main properties of ternary lattice algebra, and gives the example using the algorithm. By using principle realizing any ternary logic function with ternary T-gate network, this paper presents a minimization design method of ternary T-gate networks based on the RDSOP forms, and gives the example using the method. From the examples given in the paper, it is seen that the methods are effective and realizable.

**Keywords** multiple-valued logic; T-gate networks; RDSOP forms; minimization; logic design; computer aided design (CAD)

## 1 引 言

与二值逻辑系统相比,多值逻辑系统传输和处理的信息密度高,这对于减少系统的连线,节省芯片面积,提高工作可靠性具有重要意义.因此,多值逻辑的理论和应用研究,一直受到国际上的重视,是信息科学的前沿领域之一.近 20 余年来,多值逻辑的理论研究及多值逻辑器件的研制均取得了较大进

展<sup>[1-4]</sup>.在神经网络理论和应用研究的背景下,出现了具有学习功能的新一代多值逻辑网络的理论和应用研究<sup>[1]</sup>.多值逻辑函数的最小化的积之和(Minimization Sum-of-products, MISOP)形式是设计(化简)多值逻辑电路和系统的理论基础,一直受到国内外学者的重视,取得了许多研究成果<sup>[2,4]</sup>.但是,对于多值逻辑函数的最小化的不相交积之和(Minimization Disjoint Sum-of-products, MIDSOP)形式则研究较少.本文的研究表明,它在 T 门网络的设计

(化简)等方面有重要的应用。

T 门亦称选择器,是一种多功能逻辑器件(模块),已研制出三值 T 门集成电路器件<sup>[3]</sup>. T 门实现的 T 运算和逻辑值一起构成一个代数完备系统(T 算子代数),因此利用 T 门网络可以实现任意的多值逻辑函数.然而,当用 T 门组成待实现函数的 T 门网络时,各级网络控制变量的配置(分配)将影响网络实现的复杂度.如果在 T 门网络中所用的 T 门数目最小,则称此网络为最小化的 T 门网络,相应的各级网络控制变量的配置称为最佳配置.对于 T 门网络的化简(最小化),目前有三种方法<sup>[4-5]</sup>,即固定控制变量化简法、混合控制变量化简法和用子函数作控制变量化简法.三种化简方法各有一定的适用范围(条件).Fang 等人提出了多值组合电路的模块分解方法<sup>[5]</sup>,使得求取 T 门网络中每个 T 门的控制变量(或控制函数)的合适的配置的搜索次数减少.通过对三值 T 门网络的研究看到,一个各级网络以混合控制变量配置的最小化的三值 T 门网络实现的三值函数的表达式是一种简化(即最小化或接近最小化)的不相交积之和(Reduced Disjoint Sum-Of-products, RDSOP)形式.基于这种考虑,我们先求出待实现函数的 RDSOP 形式,然后选取一个合适的划分,使该函数按此划分分解后所产生的非平凡子函数的类型的数目达到最小值.这种方法也能使求取 T 门网络中每个 T 门的控制变量的合适的配置的搜索次数减少。

本文第 2 节讨论三值函数的 RDSOP 形式的代数理论和算法,并给出实例;第 3 节提出基于 RDSOP 形式的三值 T 门网络设计(化简)的混合控制变量化简法的一种算法,并给出实例;第 4 节为结论。

## 2 三值逻辑函数 RDSOP 形式的代数理论

设逻辑值集合  $L=\{0,1,2\}$ ,其有序关系为: $0<1<2$ .对于变量  $x,y\in L$  及常量  $b\in L$ ,引进三值格代数(Post 代数)系统关于“与”(取小)、“或”(取大)和“阈”(文字)三种基本运算的定义<sup>[2,4]</sup>,分别为

$$\begin{cases} x \cdot y \triangleq \min(x, y) \\ x + y \triangleq \max(x, y) \\ x^b \triangleq \begin{cases} 2, & x = b \\ 0, & x \neq b \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

上述三种基本运算已构成代数完备系统.由上述三种基本运算易证下述性质<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} x^i \cdot x^j = 0 (i \neq j; i, j \in L); \\ x^0 + x^1 + x^2 = 2 \\ x = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 = 1 \cdot x^1 + x^2 \end{cases} \quad (2)$$

考虑三值  $n$  变量函数  $f(X)$ ,其中  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \{0,1,2\}, 1 \leq i \leq n$ .函数  $f(X)$  用上述三种基本运算表示的最小项展开式为

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{3^n-1} a_k \cdot m_k \quad (3)$$

式中,  $m_k = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}, j_i \in \{0,1,2\}, 1 \leq i \leq n, k = (j_1 j_2 \dots j_n)_3$ ,即  $k$  为  $n$  重组  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  的取值组成的三进制码的十进制表示,  $a_k = f(j_1, j_2, \dots, j_n)$  为与最小项  $m_k$  相对应的函数值.若  $a_k \in \{0,1,2\}$ ,此时相应的三值  $n$  变量函数为完全描述的三值函数.本文仅讨论完全描述的三值函数。

**引理.** 对于三值  $n$  变量最小项集合:

$m_k = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}, k = (j_1 j_2 \dots j_n)_3, 0 \leq k \leq 3^n - 1$ , 有下述结论:

(i) 当且仅当  $(x_1 x_2 \dots x_n) = (j_1 j_2 \dots j_n)$  时,  $m_k = 2$ , 否则  $m_k = 0, \forall k$ ;

(ii)  $m_k \cdot m_g = 0 (k \neq g, k, g \in \{0,1, \dots, 3^n - 1\})$ ;

(iii)  $\sum_{k=0}^{3^n-1} m_k = 2$ .

证明. 由式(1)~(3),可证明该引理成立。

对于一个定义在变量集  $X$  上的三值  $n$  变量函数  $f$  以及变量集上的一个划分

$$\Pi_{i_2 \dots i_n} = \{x_{i_1}; x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\} = \{B_1; B_2\} \quad (4)$$

式中,  $i_s \in \{1,2, \dots, n\}, 1 \leq s \leq n$ ,变量集  $X$  的子集  $B_1$  和  $B_2$  称为划分块,它们满足  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  且  $B_1 \cup B_2 = X$ .将二值代数中的 Shannon 展开定理<sup>[6]</sup>推广到上述三值代数中,对于函数  $f$  及划分(4),则得

$$f = x_{i_1}^0 \cdot f_{x_{i_1}^0} + x_{i_1}^1 \cdot f_{x_{i_1}^1} + x_{i_1}^2 \cdot f_{x_{i_1}^2} \quad (5)$$

式中  $f_{x_{i_1}^0}, f_{x_{i_1}^1}, f_{x_{i_1}^2}$  分别称为函数  $f$  关于  $x_{i_1}^0, x_{i_1}^1, x_{i_1}^2$  的限制<sup>[6]</sup>(剩余子函数),  $x_{i_1}$  称为限制变量.  $f_{x_{i_1}^0}, f_{x_{i_1}^1}, f_{x_{i_1}^2}$  为函数  $f$  中的限制变量  $x_{i_1}$  被分别赋值 0,1,2 时,所得到的函数  $f$  的结果,即

$$f_{x_{i_1}^0} = f|_{x_{i_1}=0}, f_{x_{i_1}^1} = f|_{x_{i_1}=1}, f_{x_{i_1}^2} = f|_{x_{i_1}=2} \quad (6)$$

**定义 1.** 对于一个定义在变量集  $X$  上的三值  $n$  变量函数  $f$  及  $X$  的子集上的某个积项  $p = x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}}$ ,其中  $j_{i_s} \in \{0,1,2\}, i_1 \leq i_s \leq i_l$ ,求函数  $f$  关于  $p$  的函数限制的运算,称为限制运算,被定义为

$$f_p = f_{x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}}} = f|_{x_{i_1}=j_{i_1} x_{i_2}=j_{i_2} \dots x_{i_l}=j_{i_l}} \quad (7)$$

**定义 2.** 对于一个定义在变量集  $X$  上的三值

$n$  变量函数  $f$  及  $X$  的子集上的某个  $a$  值积项  $a \cdot p$  的尺度(大小)为该积项中所包含的  $a$  值最小项的数目,记为  $\|(a \cdot p)\|$ ,其中  $a \in \{0, 1, 2\}$ .

**定理 1.** 对于一个定义在变量集  $X$  上的三值  $n$  变量函数  $f$  及  $X$  上的一个划分

$$\Pi_{i_{l+1} \dots i_n} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}; x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_n}\} = \{B_1; B_2\} \quad (8)$$

函数  $f$  关于乘积项  $p$  的函数限制  $f_p$  (如式(7)所示)为常量  $a \in \{0, 1, 2\}$  的充分必要条件是乘积项在  $f$  的  $a$  值最小项集合中出现  $3^{n-l}$  次,即  $\|(a \cdot p)\| = 3^{n-l}$ .

证明. 必要性. 由式(7)可知,函数限制  $f_p$  中仅含有子集  $B_2$  中的变量,即  $x_{i_{l+1}}, x_{i_{l+2}}, \dots, x_{i_n}$ , 共有  $n-l$  个. 它们共组成  $3^{n-l}$  个子最小项,即  $x_{i_{l+1}}^0 \dots x_{i_{l+2}}^0 \dots x_{i_n}^0, x_{i_{l+1}}^0 x_{i_{l+2}}^0 \dots x_{i_n}^1, \dots, x_{i_{l+1}}^2 x_{i_{l+2}}^2 \dots x_{i_n}^2$ . 由引理中的(iii)知它们全体之和为 2. 若  $f_p = a$ , 则得函数  $f$  关于  $p$  的  $a$  值最小项之和为

$$\begin{aligned} f_p \cdot p &= a \cdot p \cdot 2 \\ &= a \cdot (x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}} \cdot x_{i_{l+1}}^0 x_{i_{l+2}}^0 \dots x_{i_n}^0) + \\ &\quad a \cdot (x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}} \cdot x_{i_{l+1}}^0 x_{i_{l+2}}^0 \dots x_{i_n}^1) + \dots + \\ &\quad a \cdot (x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}} \cdot x_{i_{l+1}}^2 x_{i_{l+2}}^2 \dots x_{i_n}^2) \quad (9) \end{aligned}$$

上式中共有  $3^{n-l}$  个  $a$  值最小项,故得  $\|(a \cdot p)\| = 3^{n-l}$ .

充分性. 若  $\|(a \cdot p)\| = 3^{n-l}$ , 则由式(9)知  $3^{n-l}$  个  $a$  值最小项之和为  $a \cdot p \cdot 2 = a \cdot p = f_p \cdot p$ , 故得  $f_p = a$ . 证毕.

**定理 2.** 对于一个定义在变量集  $X$  上的三值  $n$  变量函数  $f$  及  $X$  上的一个划分式(8), 函数  $f$  关于乘积项  $p$  的函数限制  $f_p$  (如式(7)所示)为单变量  $x_g \in B_2$ , 其充分必要条件是乘积项分别在  $f$  的 0 值最小项集合中, 1 值最小项集合中, 2 值最小项集合中各出现  $3^{n-l-1}$  次, 即  $\|(a \cdot p \cdot x_g^a)\| = 3^{n-l-1}$ ,  $0 \leq a \leq 2$ .

证明. 必要性. 对于函数  $f$  的变量集取划分  $\{B'_1; B'_2\}$ , 其中  $B'_1 = \{B_1, x_g\}$ ,  $B'_2$  为  $B_2$  中除变量  $x_g$  外其余的所有变量组成的集合, 故函数  $f$  关于积项  $p \cdot x_g^0$ ,  $p \cdot x_g^1$  和  $p \cdot x_g^2$  的函数限制  $f_{p \cdot x_g^0}$ ,  $f_{p \cdot x_g^1}$  和  $f_{p \cdot x_g^2}$  中均仅含有集合  $B'_2$  中变量, 共有  $n-l-1$  个, 它们组成  $3^{n-l-1}$  个子最小项, 由引理中的(iii)知它们全体之和为 2. 若  $f_p = x_g$ , 则得函数  $f$  关于  $p$  的最小项之和为

$$\begin{aligned} f_p \cdot p &= x_g \cdot p \cdot 2 \\ &= 0 \cdot (p \cdot x_g^0) \cdot 2 + 1 \cdot (p \cdot x_g^1) \cdot 2 + \end{aligned}$$

$$2 \cdot (p \cdot x_g^2) \cdot 2 \quad (10)$$

将集合  $B'_2$  中的变量组成的  $3^{n-l-1}$  个子最小项之和代替式(10)中的逻辑值 2, 即可看出式(10)中的积项  $p \cdot x_g^0$ ,  $p \cdot x_g^1$ ,  $p \cdot x_g^2$  分别在  $f$  的 0 值最小项集合、1 值最小项集合、2 值最小项集合中各出现  $3^{n-l-1}$  次, 故得  $\|(a \cdot p \cdot x_g^a)\| = 3^{n-l-1}$ ,  $0 \leq a \leq 2$ .

充分性. 若  $\|(a \cdot p \cdot x_g^a)\| = 3^{n-l-1}$ ,  $0 \leq a \leq 2$ , 则由式(10)可知, 将分别含有积项  $p \cdot x_g^0$ ,  $p \cdot x_g^1$ ,  $p \cdot x_g^2$  的函数  $f$  的相应的 0 值、1 值、2 值各  $3^{n-l-1}$  个最小项, 进行逻辑“或”运算后, 可简化为

$$\begin{aligned} 0 \cdot p \cdot x_g^0 \cdot 2 + 1 \cdot p \cdot x_g^1 \cdot 2 + 2 \cdot p \cdot x_g^2 \cdot 2 &= \\ (0 \cdot x_g^0 + 1 \cdot x_g^1 + 2 \cdot x_g^2) \cdot p &= \\ x_g \cdot p &= f_p \cdot p \quad (11) \end{aligned}$$

故得  $f_p = x_g$ .

证毕.

**推论.** 对于一个定义在变量集  $X$  上的三值  $n$  变量函数  $f$  及  $X$  上的一个划分如式(8)所示, 若对于函数  $f$  的某个积项  $p$ , 有  $\|(1 \cdot p)\| = 0$  且  $\|(2 \cdot p)\| = 0$ , 则得  $f_p = 0$ .

证明. 由式(3)和定理 1, 可推得该推论成立.

这样, 可得上述三值  $n$  变量函数  $f$  按照划分式(8)的展开式为

$$f = \sum_{r=0}^{3^l-1} f_{p_r} \cdot p_r \quad (12)$$

式中积项  $p_r = x_{i_1}^{j_{i_1}} x_{i_2}^{j_{i_2}} \dots x_{i_l}^{j_{i_l}}$ ,  $f_{p_r}$  为函数  $f$  关于积项  $p_r$  的剩余子函数(函数限制).  $r$  为  $l$  重组  $(j_{i_1} j_{i_2} \dots j_{i_l})$  的取值组成的三进制码的十进制表示. 把具备条件  $f_{p_r} \in \{0, 1, 2, x_g\}$ ,  $x_g \in B_2$  这样的剩余子函数称为平凡子函数. 显然, 在式(12)中, 这样的平凡子函数越多, 函数  $f$  关于式(12)的展开(分解)越简单.

在本文讨论的三值  $n$  变量函数  $f$  的积之和(SOP)形式中, 一个积项被定义为  $d \cdot p_l$ , 其中  $p_l$  为  $l$  个不相同的文字之乘积,  $d \in \{1, 2, x_g\}$ ,  $x_g \in B_2$ ,  $B_2$  为变量集  $X$  中除  $p_l$  中  $l$  个文字对应的变量之外的变量组成的子集合. 并将这样的 SOP 形式记作 dSOP 形式. 该积项  $p_l$  也可以用它所包含的最小项集合以及用立方的概念表示. 显然, 一个 1 值(或 2 值)最小项是一个积项, 其中  $d=1$ (或 2),  $l=n$ . 最小项也称为 0 维立方. 一个文字  $x_i^b$ ,  $b \in \{0, 1, 2\}$  表示一个最小项集合, 该集合的每个最小项相对应的顶点的第  $i$  个坐标为  $b$ , 它是一个  $(n-1)$  维立方. 一个积项  $p_l$  表示为该积项中  $l$  个文字分别表示的相应的最小项集合的交集, 它是一个  $(n-l)$  维立方. 一个积项  $p_l$  被包含于另一个积项  $Q_h$  中, 当  $p_l$  的最小项集合被包含于  $Q_h$  的最小项集合中. 若两个积项分别表示的最小项集合不相交, 则称该两个积项是不相交的.

函数  $f$  的不能被其它积项包含的且不相交的积项,称为  $f$  的不相交质蕴涵(Disjoint Prime Implicant, DPI)项。

**定义 3.** 三值函数  $f$  的 dSOP 形式被称为简化(最小化或接近最小化)的不相交 dSOP 形式,记作 RDdSOP(简记为 RDSOP)形式,若它满足下述两个条件:

- (a) 该 dSOP 形式中的各文字积项均为  $f$  的 DPI 项;
- (b) 该 dSOP 形式中的各积项在满足(a)的条件下,该式中积项的数目最小或接近最小。

由上述定义可以看出,在函数  $f$  的 RDSOP 形式中,各积项表示的最小项集合是互不相交的。由定理 1 和定理 2 以及推论,可得求一个三值  $n$  变量函数  $f$  的 RDSOP 形式的算法如下。

**算法 1.**

1. 列出待化简的三值  $n$  变量函数  $f$  的 1 值和 2 值最小项集合(最小项表),表中  $x_i=0,1,2$ ,分别表示文字  $x_i^0, x_i^1, x_i^2, 1 \leq i \leq n$ 。

2. 按照定理 1 中的条件(即规则 I),进行消变量化简,得到各 DPI 项(在用立方形式表示中,被消去的变量用“—”或“ $x$ ”表示),并列出函数  $f$  的 DPI 项表。

规则 I. 若积项  $f_{p_l} \cdot p_l$  中的积项  $p_l$  满足:

$$\|(a \cdot p_l)\| = 3^{n-l},$$

则  $f_{p_l}=a \in \{1,2\}$ ,  $l$  为该积项  $p_l$  中的文字的个数,即该  $3^{n-l}$  个最小项中公共文字的个数。

3. 按照定理 2 中的条件(即规则 II)及推论,对  $f$  的 DPI 项表进行消文字化简。对可以消去文字进行合并的积项,应在  $f$  的 DPI 项表中该积项的位置旁边打“ $\surd$ ”,表示它们在 DPI 项表中已被注销。

规则 II. 对于积项  $p_l$  及变量  $x_g(x_g \in B_2)$ ,若函数  $f$  的 1 值和 2 值 DPI 项表中的  $p_l$  分别满足:

$$\|(1 \cdot x_g^1 \cdot p_l)\| = 3^{n-l-1} \text{ 且 } \|(1 \cdot x_g^0 \cdot p_l)\| = 0,$$

$$\|(2 \cdot x_g^2 \cdot p_l)\| = 3^{n-l-1} \text{ 且 } \|(2 \cdot x_g^0 \cdot p_l)\| = 0.$$

则此两个积项  $(1 \cdot x_g^1 \cdot p_l)$  和  $(2 \cdot x_g^2 \cdot p_l)$  可以消去文字  $x_g^1$  和  $x_g^2$  合并为一个积项  $x_g \cdot p_l$ 。

4. 由函数  $f$  的 DPI 项表中未被注销的各积项及消文字化简得到的各积项,进行逻辑“或”运算,求出该函数的简化的不相交积之和(RDSOP)形式。

**例 1.** 试求下式所示的三值 4 变量函数  $f$  的 RDSOP 形式

$$f=1 \cdot \Sigma(1,12,13,14,15,16,17,25,28,30,39,42,43,44,45,46,48,50,52,54,55,58,69,70,71,72,76,79)+2 \cdot \Sigma(6,7,8,21,22,23,26,27,32,33,34,35,53,59,60,61,62,66,67,68,73,77).$$

算法执行过程如下。

1. 列出已知三值 4 变量函数  $f$  的 1 值和 2 值最小项

表,如表 1. 表 1 中  $x_i=0,1,2$ ,分别表示文字  $x_i^0, x_i^1, x_i^2, 1 \leq i \leq 4$ 。

2. 按照规则 I 进行消变量化简。对表 1 中 1 值最小项依次进行检查,有积项  $1 \cdot x_2^1 x_3^2$ ,满足  $\|(1 \cdot x_2^1 x_3^2)\| = 3^{4-2} = 9$ ,故合并,它表示的最小项集合为  $\{15,16,17,42,43,44,69,70,71\}$ ,并在该集合的各最小项的备注栏标一字母,表示可合并。同理,1 值最小项集合  $\{12,13,14\}$  可合并为积项  $1 \cdot x_1^0 x_2^1 x_3^1$  等。同样对 2 值最小项依次进行检查可得,2 值最小项集合  $\{6,7,8,33,34,35,60,61,62\}$  可合并为积项  $2 \cdot x_2^0 x_3^2$ ,2 值最小项集合  $\{21,22,23\}$  可合并为积项  $2 \cdot x_1^0 x_2^2 x_3^1$  等。最后可列出函数  $f$  的 DPI 项表,如表 2 所示。

3. 按照规则 II 进行消文字化简。对表 2 中各积项依次进行检查,有积项  $1 \cdot x_1^0 x_2^1 x_3^1$  和  $2 \cdot x_1^0 x_2^2 x_3^1$  可合并为  $x_2 \cdot x_1^0 x_3^1$ ,并在表 2 中上述可合并的积项旁边打“ $\surd$ ”,并在其备注栏标一字母,表示它们在表 2 中被注销。同样可得出消去文字的合并项分别为  $x_1 \cdot x_2^0 x_3^1, x_3 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^2, x_4 \cdot x_1^2 x_2^2 x_3^1$  和  $x_4 \cdot x_1^2 x_2^0 x_3^1$ 。

4. 由表 2 中未被注销的各积项及消文字合并得到的各积项,进行逻辑“或”运算,求出该函数  $f$  的 RDSOP 形式为

$$f=1 \cdot x_2^1 x_3^2+2 \cdot x_2^0 x_3^2+x_2 \cdot x_1^0 x_3^1+1 \cdot x_2^0 x_3^0 x_4^1+1 \cdot x_2^2 x_3^1 x_4^1+1 \cdot x_1^1 x_3^1 x_4^0+2 \cdot x_1^2 x_2^1 x_3^1+x_1 \cdot x_2^2 x_3^0 x_4^1+x_3 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^2+x_4 \cdot x_1^2 x_2^0 x_3^1+x_4 \cdot x_1^2 x_2^2 x_3^1+1 \cdot x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^0+1 \cdot x_1^2 x_2^0 x_3^0 x_4^0+1 \cdot x_1^2 x_2^2 x_3^0 x_4^0+2 \cdot x_1^0 x_2^2 x_3^2 x_4^2+2 \cdot x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0+2 \cdot x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 \quad (13)$$

表 1 函数  $f$  的最小项表

1 值							2 值						
No.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	备注		No.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	备注	
1	0	0	0	1	$d$		6	0	0	2	0	$g$	
12	0	1	1	0	$a$		7	0	0	2	1	$g$	
13	0	1	1	1	$a$		8	0	0	2	2	$g$	
14	0	1	1	2	$a$		21	0	2	1	0	$h$	
15	0	1	2	0	$b$		22	0	2	1	1	$h$	
16	0	1	2	1	$b$		23	0	2	1	2	$h$	
17	0	1	2	2	$b$		26	0	2	2	2		
25	0	2	2	1	$c$		27	1	0	0	0		
28	1	0	0	1	$d$		32	1	0	1	2		
30	1	0	1	0	$e$		33	1	0	2	0	$g$	
39	1	1	1	0	$e$		34	1	0	2	1	$g$	
42	1	1	2	0	$b$		35	1	0	2	2	$g$	
43	1	1	2	1	$b$		53	1	2	2	2		
44	1	1	2	2	$b$		59	2	0	1	2		
45	1	2	0	0			60	2	0	2	0	$g$	
46	1	2	0	1			61	2	0	2	1	$g$	
48	1	2	1	0	$e$		62	2	0	2	2	$g$	
50	1	2	1	2			66	2	1	1	0	$i$	
52	1	2	2	1	$c$		67	2	1	1	1	$i$	
54	2	0	0	0			68	2	1	1	2	$i$	
55	2	0	0	1	$d$		73	2	2	0	1		
58	2	0	1	1			77	2	2	1	2		
69	2	1	2	0	$b$								
70	2	1	2	1	$b$								
71	2	1	2	2	$b$								
72	2	2	0	0									
76	2	2	1	1									
79	2	2	2	1	$c$								

表 2 函数  $f$  的 DPI 项表

1 值						2 值					
No.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	备注	No.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	备注
1,28,55	—	0	0	1		6~8	}	—	0	2	—
√12~14	0	1	1	—	$a$	33~35					
15~17	}	—	1	2	—	60~62					
42~44						√21~23	0	2	1	—	$a$
69~71						26	0	2	2	2	
25,52,79	—	2	2	1		27	1	0	0	0	
30,39,48	1	—	1	0		32	1	0	1	2	
45	1	2	0	0		√53	1	2	2	2	$c$
√46	1	2	0	1	$b$	√59	2	0	1	2	$d$
√50	1	2	1	2	$c$	66~68	2	1	1	—	
54	2	0	0	0		√73	2	2	0	1	$b$
√58	2	0	1	1	$d$	√77	2	2	1	2	$e$
72	2	2	0	0							
√76	2	2	1	1	$e$						

3 三值逻辑函数 RDSOP 形式的 T 门实现

T 门(也称为选择器)是一种重要的多功能通用逻辑器件(模块),三值 T 门实现的 T 运算(T 算子)定义为<sup>[5]</sup>

$$T(f_0, f_1, f_2; x) = f_i, \text{ 当 } x = i \quad (14)$$

式中  $x, f_i \in \{0, 1, 2\}$ , 其中  $x$  为 T 门的控制(地址)变量,  $f_i, 0 \leq i \leq 2$  为 T 门的数据输入. 式(14)所示的 T 运算与逻辑常量 0, 1, 2 一起构成一个代数完备系统. 因此利用三值 T 门网络可以实现任意的三值逻辑函数.

利用上述三值代数中的基本运算, 可将三值 T 运算式(14)表示为

$$T(f_0, f_1, f_2; x) = f_0 \cdot x^0 + f_1 \cdot x^1 + f_2 \cdot x^2 \quad (15)$$

三值 T 门网络化简(最小化)的基本原理是基于三值函数按变量(划分)的展开(分解), 即式(5)或

式(12). 可以看出, 一个三值逻辑函数  $f$  的简化的不相交积之和(RDSOP)形式, 一般就对应着一个最小化的三值 T 门网络. 基于这种观点, 三值函数  $f$  的 T 门实现及三值 T 门网络化简的算法如下.

算法 2.

- 1. 将待实现的函数  $f$  化为 RDSOP 形式.
- 2. 求取函数  $f$  的变量集  $X$  上的合适的划分, 使得关于此划分, 将函数按式(12)展开后得到的非平凡子函数的类型的数目达最小.
- 3. 利用限制运算(或利用比较系数的方法), 按照所选划分, 求出各个函数限制.
- 4. 对于求出的函数限制中, 若有不能用单个 T 门实现的非平凡子函数, 则重复步 2~步 3, 直到各个函数限制或者为平凡子函数, 或者为可用单个 T 门实现的非平凡子函数为止.

例 2. 求例 1 所给的三值函数  $f$  用 T 门网络实现的最小化网络.

算法的执行过程如下:

- 1. 将待实现的函数  $f$  化为 RDSOP 形式. 利用算法 1 化简结果如式(13)所示.
  - 2. 由最小化目标, 求函数  $f$  的变量集上的划分. 由式(13), 可以看出: 若选取划分  $\{x_2, x_3; x_1, x_4\}$ , 可得  $f_{x_2^1 x_3^2} = 1$ ,  $f_{x_2^0 x_3^2} = 2$ ; 若选取划分  $\{x_1, x_3; x_2, x_4\}$ , 可得  $f_{x_1^0 x_3^1} = x_2$ ; 若选取划分  $\{x_4, x_3; x_1, x_2\}$ , 可得  $f_{x_3^0 x_4^2} = 0$ . 可见应选择的划分为  $\{x_3; x_1, x_2, x_4\}$ .
  - 3. 利用限制运算求函数限制  $f_{x_3^0}, f_{x_3^1}$  和  $f_{x_3^2}$ . 由式(13)得
- $$\begin{aligned} f_{x_3^0} &= 1 \cdot x_2^0 x_4^1 + x_1 \cdot x_2^2 x_4^1 + 1 \cdot x_1^1 x_2^0 x_4^0 + 1 \cdot x_1^2 x_2^0 x_4^0 + \\ &\quad 1 \cdot x_1^2 x_2^2 x_4^0 + 2 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^0; \\ f_{x_3^1} &= x_2 x_1^0 + 1 \cdot x_1^1 x_4^0 + 2 \cdot x_1^2 x_1^2 + x_4 x_1^1 x_2^0 + x_4 x_1^2 x_2^2 + \\ &\quad 1 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^2 + 2 \cdot x_1^1 x_2^0 x_4^1; \\ f_{x_3^2} &= 1 \cdot x_2^1 + 2 \cdot x_2^0 + 1 \cdot x_2^2 x_4^1 + 2 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^2 + 2 \cdot x_1^1 x_2^2 x_4^2. \end{aligned}$$
- 4. 由于  $f_{x_3^0}, f_{x_3^1}$  和  $f_{x_3^2}$  均为不能用单个 T 门实现的非平凡子函数, 则重复步 2~步 3, 求得:

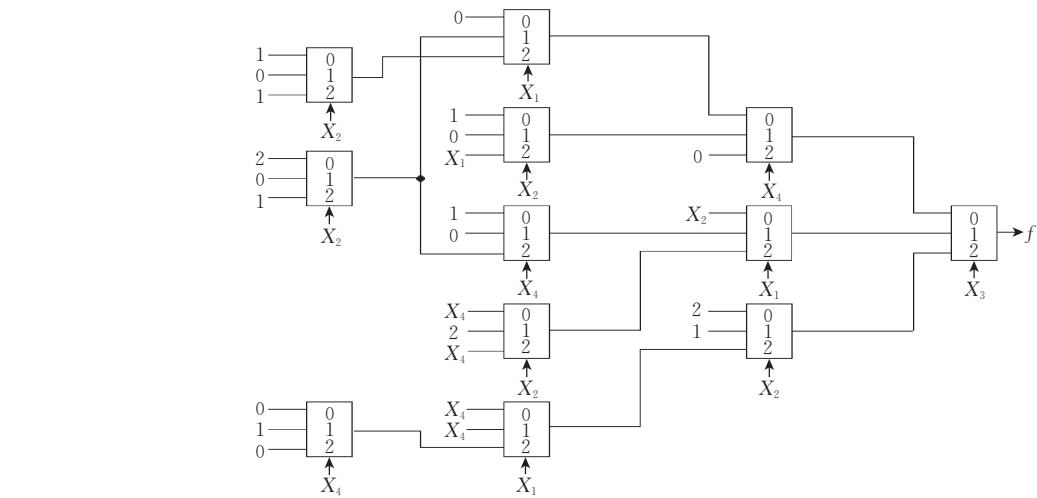


图 1 函数  $f$  的最小化 T 门网络

$$\begin{aligned}
f_{x_3 x_4}^0 &= 1 \cdot x_1^1 x_2^2 + 1 \cdot x_2^2 x_2^2 + 1 \cdot x_1^1 x_2^0 + 2 \cdot x_1^1 x_2^0, \\
f_{x_3 x_4}^0 &= 1 \cdot x_2^0 + x_1 \cdot x_2^2, f_{x_3 x_4}^0 = 0; \\
f_{x_3 x_1}^1 &= x_2, f_{x_3 x_1}^1 = 1 \cdot x_4^0 + 1 \cdot x_2^2 x_4^2 + 2 \cdot x_2^0 x_4^2, \\
f_{x_3 x_1}^1 &= 2 \cdot x_2^1 + x_4 \cdot x_2^0 + x_4 \cdot x_2^2; \\
f_{x_3 x_2}^1 &= 2, f_{x_3 x_2}^1 = 1, \\
f_{x_3 x_2}^2 &= 1 \cdot x_4^1 + 2 \cdot x_1^1 x_4^1 + 2 \cdot x_0^0 x_4^1.
\end{aligned}$$

5. 由于  $f_{x_3 x_4}^0, f_{x_3 x_1}^1, f_{x_3 x_2}^2$  均为不能用单个 T 门实现的非平凡子函数,则重复步 2~步 3,求得:

$$\begin{aligned}
f_{x_3 x_4 x_1}^0 &= 0, f_{x_3 x_4 x_1}^0 = 1 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2^0, f_{x_3 x_4 x_1}^0 = 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_2^0; \\
f_{x_3 x_1 x_4}^1 &= 1, f_{x_3 x_1 x_4}^1 = 0, f_{x_3 x_1 x_4}^1 = 1 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2^0; \\
f_{x_3 x_2 x_1}^2 &= x_4, f_{x_3 x_2 x_1}^2 = x_4, f_{x_3 x_2 x_1}^2 = 1 \cdot x_4^1.
\end{aligned}$$

6. 由于得到的函数限制,或为平凡子函数,或为可用单个 T 门实现的非平凡子函数,故算法结束。

由上述求得的各个函数限制作出待实现函数  $f$  的 T 门网络如图 1 所示。

## 4 结 论

本文利用三值格代数的基本运算和性质,讨论了三值逻辑函数的 RDSOP 形式的代数理论和算法,提出了基于 RDSOP 形式的 T 门网络设计(化简)的混合控制变量化简法。这种方法可以使待实现的三值 T 门网络化简到最小化,而且容易编程,上

机操作。当三值函数所含变量较少时,利用手算操作,也很方便。

## 参 考 文 献

- [1] Tang Z, Ishizuka O. A learning multiple-valued logic network: Algebra, algorithm, and applications. *IEEE Transactions on Computers*, 1998, C-47(2): 247-251
- [2] Rine D C ed. *Computer Science and Multiple-Valued Logic: Theory and Applications*. Second (Revised) Edition. New York: North-Holland, 1984
- [3] Liu Bai-Yong, Zheng Xue-Ren, Huang Zhao-Jun et al. Implementation of three valued logic threshold gate and T gate integrated circuits. *Acta Electronica Sinica*, 1985, 13(3): 77-81 (in Chinese)  
(刘百勇,郑学仁,黄兆俊等. 三值阈值和 T 门集成电路的实现. 电子学报, 1985, 13(3): 77-81)
- [4] Wu Xun-Wei. *Design principles of multivalued logic circuits*. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1994 (in Chinese)  
(吴训威. 多值逻辑电路设计原理. 杭州: 杭州大学出版社, 1994)
- [5] Fang K Y, Wejcik A S. Modular decomposition of combinational multiple-valued circuits. *IEEE Transactions on Computers*, 1988, C-37(10): 1293-1301
- [6] Wang Y, McCrocky C. Solving Boolean equations using ROSOP forms. *IEEE Transactions on Computers*, 1998, C-47(2): 171-177



**JIANG En-Hua**, born in 1974, master, lecturer. His research interests include digital circuits, logic design, and computer networks.

**JIANG Wen-Bin**, born in 1941, professor. His research interests include integrated circuits design, multiple-valued logic, and neural networks.

## Background

In recent years, great progresses have been made in the research fields of multiple-valued logic theory and its applications. The algebra theory for minimization sun-of-products (MISOP) forms of ternary logic functions is fundamental theory of designing and simplifying ternary logic circuits and systems, which has been all through received widespread attentions in the field of science in the world, and some achievements have been obtained in the field. However, the research for minimization disjoint sun-of-products (MIDSOP) forms of ternary logic functions is less. The study in the paper shows that it has important applications in the field of designing and simplifying ternary T-gate networks. A T-gate is a multi-function general logic component (module). As early as 1985, three valued logic T-gate integrated circuit has been made. By using ternary T-gate network, any ternary logic function can be realized. In the design of the ternary T-gate logic network, different ways of assignment for control varia-

ble of every T-gate at each level network of the network being designed will result in different structural T-gate network. If the number of T-gates by which a T-gate network is constituted is the smallest, then the network is called minimization T-gate network. The simplify (minimization) of ternary T-gate networks and its computer algorithm are an important research subject in the field of ternary logic circuits and systems.

This paper studies algebra theory and algorithm for reduced (minimization or near minimization) disjoint sun-of-products (RDSOP) forms of ternary logic functions. The algorithm is easily accomplished on a computer. The study in the paper finds that in general, a ternary logic function RDSOP form corresponds to a minimization ternary T-gate network. Based on the thought, the paper presents a minimization design (simplify) method of ternary T-gate networks based on the RDSOP forms. The method is suitable for computer aided design of ternary T-gate networks.