黑白二次分配问题

江 贺[1),2)] 张宪超[1)] 陈国良[2)] 李明楚[1)]

[1)](大连理工大学软件学院 大连 116621)

[2)](中国科技大学计算机科学与技术系 合肥 230027)

摘 要 二次分配问题 QAP(quadratic assignment problem)的变种问题是当前的研究热点.实际应用中存在一类不能用 QAP 及其现有变种描述的问题,该类问题在 QAP 问题的基础上增加了额外的约束条件:将设备分为黑白两色,其中白色设备要求与至少一个黑色设备的距离不超过预定阈值.文章将之定义为黑白二次分配问题 BWQAP(Black and White QAP).文章首先分析了它的计算复杂性,指出该问题是 NP-难解问题,不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法(ε>0).同时证明了其可行解的存在性与黑白图上的支配集问题等价,也属于 NP-难解问题.为了能在可接受的时间内得到大规模实例质量可接受的近似解,提出了一种求解 BWQAP 的启发式算法 GFO.该算法利用 QAP 现有算法得到初始解,然后利用局部搜索策略完成解的可行化和优化.大量实验表明,该启发式算法能够有效地求解 BWQAP 问题的实例.

关键词 黑白二次分配问题;NP-难解;启发式算法;黑白图;支配集

中图法分类号 TP301

Black and White Quadratic Assignment Problem

JIANG He[1),2)] ZHANG Xian-Chao[1)] CHEN Guo-Liang[2)] LI Ming-Chu[1)]

[1)](*School of Software, Dalian University of Technology, Dalian* 116621)

[2)](*Department of Computer Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027)

Abstract Research on variants of the QAP (Quadratic Assignment Problem) has become a hot line in this area. There exists a new kind of problem in applications which can't be modeled as a QAP or its variants. The facility set is partitioned into sets of black and white facilities, and extra constraints are added to the QAP: Every white facility must be less than a predefined distance away from at least one black facility. The new problem is modeled as the black and white QAP (BWQAP) in this paper. It is indicated that the BWQAP is NP-Hard and there is no ε-approximation algorithm for it (ε>0), furthermore, it is that it is also NP-Hard to determine whether a feasible solution exists by proving its equivalence to dominating sets on black and white graph. A new heuristics—GFO is then presented to obtain high quality solutions for large scale instances in reasonable time. The GFO employs existing algorithms for the QAP to obtain an initial solution, then applies local search to gain feasibility and optimization. Experiments on a great number of instances had shown that the new heuristic was effective and efficient to solve the BWQAP.

Keywords black and white quadratic assignment problem; NP-hard; heuristics; black and white graph; dominating set

---

收稿日期:2006-05-12;修改稿收到日期:2006-09-18.本课题得到国家自然科学基金重大项目(90412007)、国家自然科学基金(60503003)、辽宁省自然科学基金(20051082)和大连理工大学青年教师培养基金资助.**江 贺**,男,1980 年生,博士,讲师,研究方向为算法设计与分析、组合优化等.E-mail: jianghe@dlut.edu.cn. **张宪超**,男,1971 年生,博士,副教授,研究方向为算法设计与分析、组合优化、网络优化及应用. **陈国良**,男,1938 年生,教授,博士生导师,中国科学院院士,研究领域为并行算法、高性能计算及其应用. **李明楚**,男,1963 年生,教授,博士生导师,研究领域为 NP-难解问题算法设计、网络安全.

1 引　言

二次分配问题 QAP(Quadratic Assignment Problem)属于经典的组合优化问题，在医院布局、键盘安排、VLSI 设计等领域具有广泛的应用背景. 给定 n 个设备 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 和 n 个位置 $L=\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}$，记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为设备之间的流量矩阵(a_{ij} 表示设备 f_i,f_j 之间的流量)，记 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 为位置的距离矩阵(b_{ij} 表示位置 l_i,l_j 之间的距离)，QAP 问题的目标是寻求一种设备分配方法 $\pi:\{1,2,\cdots,n\}\rightarrow\{1,2,\cdots,n\}$，使得设备之间的总费用(cost)$c_\pi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}b_{\pi(i)\pi(j)}$ 最小，即 $\min_{\pi\in\Pi}(c_\pi)$，其中 Π 是$\{1,2,\cdots,n\}$全体排列的集合. Sahni 等[1]在 1976 年证明了该问题不仅是 NP-难解的而且不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法($\varepsilon>0$).

在各类应用需求的驱动下，QAP 问题的诸多变种成为该领域的研究热点. Burkard 等[2-3]在 1994 年提出了双二次分配问题 BiQAP(BiQuadratic Assignment Problem)；Knowles 和 Corne 等[4-5]在 2002 年提出了多目标二次分配问题 mQAP(multiobjective QAP)；Lee Chi-Guhn 等[6]在 2003 年提出了允许在同一个位置放置多个设备的 GQAP (Generalized QAP)问题；Billionnet 等[7]研究了二次半分配问题 QSAP(Quadratic Semi-Assignment Problem)；Hahn 等[8]研究了二次三维分配问题 Q3AP(Quadratic 3-dimensional Assignment Problem). 关于 QAP 及其变种的最新研究进展，请参考文献[9].

然而，在 QAP 相关应用背景中还存在大量不能用经典 QAP 及已有变种描述的新问题[10-11]. 例如在社区医疗机构安排问题上，城市计划在若干个地点设立社区医疗机构，这些医疗机构包括各种专科医院(例如肺科医院、肿瘤医院等)和综合性医院，在各个医院之间存在病人转院(流量)，目标是使得总的费用最小. 由于专科医院内部科室数目和能力有限，遇到其无法处理的病例时转院到综合性医院总是更加保险的. 故此通常要求任意的一家专科医院至少离一家综合性医院的距离不超过预定阈值. 上述应用问题，既不属于经典的 QAP 问题，也不是其已有变种. 同时，这种情况并不是孤立存在的，公交车站安排、无线传感器网络节点部署中也存在类似问题. 如在无线传感器网络中，经常需要在一些固定位置安置不同传感器节点(如温度传感器、湿度传感器、气体传感器等)用于探测周围环境，节点之间存在信息(流量)交互的要求. 由于造价的原因，大部分普通节点的通信能力有限，仅少部分节点(即执行节点)的通信能力较强，为了方便地把传感器的信息传给远方的基站，也经常要求通信能力较弱的节点距离至少一个执行节点较近[12-13].

由于上述问题源自于多种重要行业应用，因此有必要专门研究它们. 容易发现，上述问题具有共同特征，均将设备划分成两类，对于其中一类设备(如专科医院、普通传感器节点)而言，必须距离另外一类设备(如综合性医院、执行节点)中某一个较近(距离小于等于预定阈值). 这类问题可以归结为一种新的带约束的 QAP 问题变种，本文将之定义为黑白二次分配问题 BWQAP(Black and White QAP). 在给出形式化定义的基础上，本文首先分析了其计算复杂性，指出该问题是 NP-难解问题，且不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法($\varepsilon>0$). 同时，证明了 BWQAP 可行解的存在性问题与图上的最小支配集相关，因此 BWQAP 可行解的存在性本身就是一个 NP-难解问题. 作为一个新的 NP-难解问题，本文给出了一种求解 BWQAP 的启发式算法 GFO(Generator Feasible Optimizer)，该算法利用 QAP 现有算法获得初始解，然后利用局部搜索对其进行可行化和优化. 参照现有 QAP 问题变种的实验方法，本文利用 QAP 标准测试实例库 QAPLIB[14]生成了 80 个 BWQAP 问题的实例，并应用新启发式算法对其求解. 实验结果表明，该启发式算法能够有效地求解 BWQAP 问题的实例.

本文的工作较为完善地解决了这类新出现的 BWQAP 问题. 一方面，通过理论上计算复杂性的分析，为未来 BWQAP 问题的算法设计指明了方向：除非 P=NP，否则人们寻求多项式时间的 BWQAP 完全算法是没有意义的，甚至不存在完全算法可以在多项式时间内判定 BWQAP 是否存在可行解. 另一方面，BWQAP 作为组合与优化结合的问题，本文给出的启发式算法 GFO 对其他组合与优化结合问题的算法设计亦具有一定参考价值.

2 相关定义及性质

本节首先给出 BWQAP 的形式化定义，同时为了方便分析 BWQAP 问题可行解存在性的计算复杂性，给出了最小支配集等的定义.

定义 1. BWQAP 将 QAP 问题中的设备划分为黑色设备和白色设备，分别记为 F_B 和 F_W，满足 $F=F_B\cup F_W$，$F_B\cap F_W=\varnothing$. BWQAP 的可行解是一个排列 $\pi_{BW}:\{1,2,\cdots,n\}\rightarrow\{1,2,\cdots,n\}$，满足距离约束：$\forall f_i\in F_W$，$\exists f_j\in F_B$，s. t. $b_{\pi_{BW}(i)\pi_{BW}(j)}\leq\ell$，其中 ℓ 被称为距离阈值. 记全体可行解的集合为 Π_{BW}，BWQAP 的目标是寻求一个可行解，使得设备之间的总费用最小，即 $\min_{\pi_{BW}\in\Pi_{BW}}(c_{\pi_{BW}})$.

根据上述定义可知，社区医疗机构中专科医院属于白色设备，综合医院属于黑色设备，而医院之间的转院病人就是流量. 专科医院要求到至少一个综合医院的距离小于距离阈值. 在无线传感器网络中，普通传感器节点属于白色设备，而执行传感器节点属于黑色设备.

当距离阈值 $\ell=+\infty$ 时，BWQAP 退化为经典的 QAP 问题. 而在 1976 年 Sahni 等[1] 已经证明 QAP 问题不仅是 NP-难解的而且不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法，故由计算复杂性理论[3] 有如下性质：

性质 1. BWQAP 问题是 NP-难解问题，不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法（$\varepsilon>0$）.

为了本文后面分析 BWQAP 计算复杂性的方便，下面给出支配集、极小支配集、最小支配集等概念的定义.

定义 2. 对于图 $G=\{V(G),E(G),\psi_G\}$，$D\subseteq V(G)$，若 $\forall u\in V(G)$，要么 $u\in D$，要么 u 与 D 内某顶点相邻，则称 D 是图 G 的一个支配集，集合内的顶点规模记为 $|D|$. 对于支配集 D，若它的任意真子集均不是支配集，则称 D 为极小支配集. D_0 是一个支配集，但无支配集 D_1，使得 $|D_1|<|D_0|$，则称 D_0 为最小支配集.

定义 3. 给定一个 BWQAP 实例的 n 个位置 $L=\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}$ 和距离矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，定义黑白图为一个有序三重集合 $G_{BW}=\{V(G_{BW}),E(G_{BW}),\psi_{G_{BW}}\}$，其中顶点集 $V(G_{BW})=\{l_i\mid l_i\in L\}$，边集 $E(G_{BW})=\{l_il_j\mid b_{ij}\leq\ell\}$，$\psi_{G_{BW}}$ 是关联函数.

3 BWQAP 计算复杂性

本节通过证明 BWQAP 问题可行解的存在性与黑白图上的支配集问题相关，从而说明 BWQAP 可行解的存在性本身也是 NP-难解的.

引理 1. BWQAP 的可行解存在的充要条件是黑白图 G_{BW} 存在规模等于 $|F_B|$ 的支配集.

证明. 首先证明必要性：若 BWQAP 存在可行解，则至少存在一个排列 $\pi^*_{BW}:\{1,2,\cdots,n\}\rightarrow\{1,2,\cdots,n\}$，满足 $\forall f_i\in F_W$，$\exists f_j\in F_B$，s. t. $b_{\pi^*_{BW}(i)\pi^*_{BW}(j)}\leq\ell$. 记 $V(F_B)=\{l_i\mid i=\pi^*_{BW}(i^*),f_{i^*}\in F_B\}$ 表示全体黑色设备所分配到的位置集合，记 $V(F_W)=\{l_i\mid i=\pi^*_{BW}(i^*),f_{i^*}\in F_W\}$ 表示全体白色设备所分配到的位置集合，有 $V(G_{BW})=V(F_B)\cup V(F_W)$ 成立. 那么 $V(F_B)$ 就是黑白图上的支配集，这是因为 $\forall l_i\in V(F_W)$，存在 $f_{i^*}\in F_W$ 使得 $\pi^*_{BW}(i^*)=i$ 成立，又根据 π^*_{BW} 的性质，$\exists f_{j^*}\in F_B$，s. t. $b_{i\pi^*_{BW}(j^*)}\leq\ell$，故 $l_il_{\pi^*_{BW}(j^*)}\in E(G_{BW})$，即 l_i 与 $l_{\pi^*_{BW}(j^*)}\in V(F_B)$ 相邻. 故此，$V(G_{BW})$ 中的顶点要么属于 $V(F_B)$，要么与 $V(F_B)$ 中某点相邻，必要性得证.

充分性证明：若黑白图 G_{BW} 存在规模等于 $|F_B|$ 的支配集 $V^*(F_B)$，那么可以如下构造 BWQAP 可行解：首先将 F_B 中的全部黑色设备按照任意排列方式分别分配在 $V^*(F_B)$ 的某个位置上（即 $V^*(F_B)$ 中每个位置恰好分配一个不同黑色设备），然后将 F_W 中的白色设备按任意方式分别分配在 $V(G_{BW})\setminus V^*(F_B)$ 中某个位置上（$V(G_{BW})\setminus V^*(F_B)$ 的每个位置恰好分配一个不同的白色设备）. 显然，容易验证这种分配方法就是一个可行解. 证毕.

引理 2. 黑白图 G_{BW} 的最小支配集问题是 NP-难解问题.

证明. 由于图 $G=\{V(G),E(G),\psi_G\}$ 上的最小支配集问题为 NP-难解问题，只要证明黑白图 G_{BW} 与图 G 的最小支配问题等价，则原命题就成立.

给定任意图 $G=\{V(G),E(G),\psi_G\}$，按照定义 3 容易找到一个 BWQAP 实例使得它对应的黑白图 $G_{BW}=\{V(G_{BW}),E(G_{BW}),\psi_{G_{BW}}\}$ 满足 $V(G_{BW})=V(G)$，$E(G_{BW})=V(G)$，$\psi_{G_{BW}}=\psi_G$. 而另一方面，给定 $G_{BW}=\{V(G_{BW}),E(G_{BW}),\psi_{G_{BW}}\}$，可以构造图 $G=\{V(G)=V(G_{BW}),E(G)=E(G_{BW}),\psi_G=\psi_{G_{BW}}\}$. 故此黑白图 G_{BW} 与图 G 的最小支配问题等价，原命题成立. 证毕.

引理 3. 判断黑白图 G_{BW} 是否存在规模等于常数 K 的支配集属于 NP-难解问题.

证明. 采用反证法，假设判定黑白图 G_{BW} 是否存在规模等于 K 的支配集属于多项式时间可解的（时间复杂度记为 $O_K(\cdot)$），则可以构造黑白图 G_{BW} 上的最小支配集算法如下：首先判断黑白图 G_{BW} 是否存在规模为 1 的支配集（时间复杂度为 $O_1(\cdot)$），若存在则算法中止，此时所得支配集即是最小支配集；否则，判断是否存在规模为 2 的支配集（时间复

杂度为 $O_2(\cdot)$)，若存在则得到最小支配集，否则判断是否存在规模为 3 的支配集，依次类推，直到找到支配集为止. 显然，最多在 $O_1(\cdot)+O_2(\cdot)+\cdots+O_n(\cdot)$时间复杂度内就能保证找到最小支配集，从而推导出黑白图 G_{BW}上最小支配集问题是多项式时间可解的. 这显然与引理 2 矛盾，故此假设不成立，原命题成立.　　证毕.

根据引理 3 可知，判断 G_{BW}上是否存在规模为 $|F_B|$的支配集属于 NP-难解问题，又由引理 1，可知以下定理成立.

定理 1.　BWQAP 可行解的存在性属于 NP-难解问题.

根据定理 1 可知，除非 P＝NP，否则不存在完全算法可以在多项式时间内判断 BWQAP 是否存在可行解.

4　BWQAP 启发式算法

与单纯的组合问题(如可满足性问题 SAT(the satisfiability problem)问题)和单纯的优化问题(如 TSP 问题)均不同，BWQAP 问题属于组合与优化结合问题，其启发式算法通常由三个算子构成：(1)初始解生成；(2)解的可行化；(3)解的优化. 其中，初始解生成算子首先对原始问题进行松弛，以得到原问题的退化形式，然后再调用已有的算法求解. 例如，通过令 BWQAP 中的距离阈值 $\ell=+\infty$，可以将 BWQAP 问题退化为经典的 QAP 问题，从而可以调用现有的各种求解 QAP 问题的算法[15-25]求解. 解的可行化步骤主要是针对问题的组合特性，将初始解调整为满足约束条件的可行解. 而解的优化步骤则是针对问题的优化特性，在可行解的基础上，进一步地优化解，降低目标函数值(对于 BWQAP 问题而言，总费用即是目标函数值).

根据以上分析，可以给出求解 BWQAP 问题的启发式算法 GFO(Generator Feasible Optimizer). 该算法由 4 步构成，其中步 2 对所使用的求解 QAP 问题的启发式算法没有任何限制，可以是现有的任意算法. 步 3 中的可行化算子和步 4 中的优化算子将在后面的两个小节内分别介绍.

算法 1.　GFO.

输入：BWQAP 问题实例 I

输出：解 π_{BW}

begin

1. 令 I 中距离阈值 $\ell=+\infty$，得到实例 I 的退化形式 I_0；
2. 调用现有的求解 QAP 问题的启发式算法，求得 I_0 的解 π_0；
3. 以解 π_0 作为初始解，调用可行化算子对 π_0 进行可行化处理，如果成功则得到实例 I 的可行解 π_f；否则退出算法，提示未得到可行解；
4. 以可行解 π_f 为初始解，调用优化算子得到最终解 π_{BW}；

end

4.1　可行化算子

本文已经由定理 1 证明：除非 P＝NP，否则不存在多项式时间的 BWQAP 可行解构造完全算法. 故此，BWQAP 可行化算子的设计也应采用启发式方法. 局部搜索是普遍使用且性能高效的方法，是目前求解诸如 TSP 问题和 SAT 问题等组合优化问题最有效的方法之一. 故本文采取局部搜索策略来设计可行化算子，给出基于局部搜索的可行化算子 LSF(Local Search Feasible). 为了描述的方便，对于任意解 π，算子中记 $\delta(\pi)$为解中违反距离约束的白色设备总数.

基于局部搜索的可行化算子 LSF 的基本思想是：首先判断初始解是否为可行解，如果不是可行解则对其进行调整，使之成为可行解. 具体做法是：每次从白色设备集合中随机取出一个白色设备，与随机选取的黑色设备交换位置，如果交换后违反距离约束的白色设备数目下降了，那么就执行这个操作，否则不执行该操作. 重复这一过程，直到违反距离约束的白色设备的数目为 0 或者循环次数达到预定的值为止.

算子 1.　LSF.

输入：BWQAP 问题实例 I，初始解 π_0

输出：可行解 π_f

begin

1. $i\leftarrow 0$，$\pi_1\leftarrow\pi_0$；　　//初始化
2. while $i<T$ and $\delta(\pi_1)>0$ do //循环至当前解为可
   //行解或者循环次数达到阈值
   2.1 随机挑出一个白色 $f_i\in F_W$ 和一个黑色设备 $f_j\in F_B$；
   2.2 $\pi_1(i)\leftrightarrow\pi_1(j)$后得到新解 π_2；
   //若新的解违反距离约束的设备更少，则令
   //新解为当前解
   2.3 if $\delta(\pi_2)<\delta(\pi_1)$ then $\pi_1\leftarrow\pi_2$；
   2.4 $i\leftarrow i+1$；

   end while
3. if $\delta(\pi_1)=0$ then $\pi_f\leftarrow\pi_1$ else $\pi_f\leftarrow\varnothing$；

end

算子 LSF 的时间复杂度分析如下：步 1 的时间

复杂度为 $O(1)$；步 2.1，2.2 和 2.4 的时间复杂度均为 $O(1)$，步 2.3 的时间复杂度为 $O(n^2)$，故此步 2 的时间复杂度为 $O(Tn^2)$；在使用链表保存解的情况下，步 3 的时间复杂度为 $O(1)$. 综上可知，算子 LSF 的时间复杂度为 $O(Tn^2)$.

4.2 优化算子

优化算子是在可行解的基础上，对解进行优化得到目标函数值更优的新解. 本文给出一种基于局部搜索的优化算子 LSO(Local Search Optimizer)，其基本步骤是：取可行解作为当前解，然后对当前解的白色设备集合、黑色设备集合分别进行集合内设备的位置交换，如果交换后的新解的目标函数值更优，则保留这次交换，将交换后的解作为当前解，重复交换操作直至循环中止条件达到为止(即循环次数达到预定阈值). 算法中解 π_1 交换设备 f_i 和 f_j 的位置后得到解 π_2，为描述方便，将 π_2 与 π_1 的目标函数值差值记为 $\Delta(\pi_2,\pi_1)$. 从优化算子 LSO 的步骤上可以发现，算子在优化过程中始终保持了解的可行性. 这是利用了以下性质：对于一个可行解 π_f 而言，交换任意两个白色设备的位置后所得的解依然是可行的；可行解的黑色设备之间的任意位置交换也不会违反距离约束.

算子 2. LSO.

输入：BWQAP 问题实例 I，可行解 π_f

输出：解 π_{BW}

begin

1. $i \leftarrow 0, \pi_1 \leftarrow \pi_f$； //初始化
2. while $i < R$ do //循环至循环次数达到阈值
   - 2.1 随机挑出两个白色设备 $f_i, f_j \in F_W$，记 $\pi_1(i) \leftrightarrow \pi_1(j)$ 后所得解为 π_2；
   - 2.2 if $\Delta(\pi_2,\pi_1) < 0$ then $\pi_1 \leftarrow \pi_2$；
   - 2.3 随机挑出两个黑色设备 $f_k, f_l \in F_B$，记 $\pi_1(k) \leftrightarrow \pi_1(l)$ 后所得解为 π_3；
   - 2.4 if $\Delta(\pi_3,\pi_1) < 0$ then $\pi_1 \leftarrow \pi_3$；
   - 2.5 $i \leftarrow i+1$；

   end while
3. $\pi_{BW} \leftarrow \pi_1$；

end

算子的 LSO 的时间复杂度分析如下：步 1 的时间复杂度为 $O(1)$；步 2.1，2.3 和步 2.5 的时间复杂度为 $O(1)$，步 2.2 和步 2.4 的时间复杂度为 $O(n)$，故此步 2 的时间复杂度为 $O(Rn)$；在使用链表保存解的情况下，步 3 的时间复杂度为 $O(1)$. 综上可知，算子 LSO 的时间复杂度为 $O(Rn)$.

综上所述，若算法 GFO 中采用时间复杂度为 $O(\cdot)$ 的 QAP 算法作为初始解生成算子，利用 LSF 作为可行化算子，利用 LSO 作为优化算子，则 GFO 的算法复杂度为 $O(\cdot)+O(Tn^2)+O(Rn)$.

5 实验及分析

BWQAP 问题作为 QAP 问题的推广形式，不存在 ε-近似度的多项式时间近似算法. 故理论分析对于 BWQAP 的启发式算法并不适用. 本文采取实验方法来评价算法的性能，首先给出实验所用实例的生成方法，然后给出算法 GFO 在这些实例上的运行结果.

与经典的 QAP 问题不同，BWQAP 问题尚不存在广泛使用的测试实例库. 为了评价 GFO 算法的实验性能，本文按照以下方法生成实验所用实例. 对于 QAPLIB[14] 中实例的设备集合 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，随机选取其中的 $\lceil n/5 \rceil$、$\lceil n/4 \rceil$ 作为黑色设备，其余作为白色设备；同时记 $M=\sum_{i\neq j} b_{ij}/n(n-1)$，分别取 $\ell=\lceil M \rceil$，$\ell=\lceil 2M \rceil$. 这样，每一个 QAP 实例可以得到 4 个 BWQAP 实例. 本文以 QAPLIB 中 20 个典型测试实例为基础，按照上述方法对 QAP 实例进行处理，得到共计 80 个 BWQAP 实例.

本文使用 C 语言实现了 GFO 算法，并在上述 BWQAP 实例上测试了算法性能(每个实例分别运行 10 次). 本实验利用 Tabu 算法[24] 作为初始解生成算法，实验环境是 P4 2.4GHz 微处理机，512MB 内存，Redhat Linux 9.0 操作系统. 表 1、表 2、表 3 分别给出了小规模实例、中等规模实例、大规模实例的实验结果. 其中 QAP，$|F_B|/n$，ℓ 分别表示原始 QAP 实例名称、黑色设备比例、距离阈值；z 表示利用已知 QAP 实例的最优解目标函数值；n_{fea}，$t_{\min}$，$t_{\max}$，t_{mean}，$c_{\min}$，$c_{\max}$，c_{mean} 分别表示可行解的数目、最少运行时间/s、最大运行时间/s、平均运行时间/s、可行解的最小目标函数值、最大目标函数值、平均目标函数值.

实验结果表明 GFO 对于绝大部分 BWQAP 实例均可以获得它的可行解. 对于其中 els19 和 nug24 实例中 $\ell=\lceil M \rceil$ 值的情形，GFO 算法不能获得可行解(表 1 中以“—”标注)，其中的原因可能是距离阈值过小的缘故，因为当 $\ell=\lceil 2M \rceil$ 的时候，GFO 算法又得到了可行解. 从可行解的数目上，可以发现算法 GFO 要么可以得到全部的可行解(10 个)，要么一个也得不到. 这说明算法的稳定性非常好，对于未得

表 1　小规模($n<50$)BWQAP 实例的实验结果

QAP	z	$\lvert F_B\rvert/n$	ℓ	n_{fea}	$t_{\max}$	$t_{\min}$	t_{mean}	$c_{\max}$	$c_{\min}$	c_{mean}
chr15a	9896	1/4	10	10	16	0	3.2	9896	9896	9896.0
		1/4	19	10	16	0	1.3	9896	9896	9896.0
		1/5	10	10	16	0	1.4	9896	9896	9896.0
		1/5	19	10	16	0	1.5	9896	9896	9896.0
els19	17212548	1/4	46	—	—	—	—	—	—	—
		1/4	92	10	16	0	3.6	17212548	17212548	17212548.0
		1/5	46	—	—	—	—	—	—	—
		1/5	92	10	16	0	3.6	17212548	17212548	17212548.0
Had20	6922	1/4	2	10	16	0	3.7	7142	6928	6994.6
		1/4	4	10	16	0	3.6	7072	7072	7072.0
		1/5	2	10	16	0	3.4	7142	6928	7006.8
		1/5	4	10	16	0	3.6	7074	7064	7068.5
Nug24	3488	1/4	2	—	—	—	—	—	—	—
		1/4	3	10	16	0	4.2	3710	3640	3680.4
		1/5	2	—	—	—	—	—	—	—
		1/5	3	10	16	0	4.1	3656	3656	3656.0
tai35b	283315445	1/4	250	10	16	0	9.2	283611793	283610685	283611164.7
		1/4	499	10	16	0	9.2	283611584	283610271	283611203.5
		1/5	250	10	16	0	9.1	283602783	283501556	283548764.6
		1/5	499	10	16	0	9.6	283599563	283501234	283542341.8
ste36b	15852	1/4	11	10	16	0	9.3	15892	15862	15874.6
		1/4	22	10	16	0	9.7	15892	15862	15876.2
		1/5	11	10	16	0	7.0	20074	19940	19960.2
		1/5	22	10	16	0	9.8	15892	15892	15892.0
Lipa40b	476581	1/4	10	10	16	0	10.2	489058	487215	488314.0
		1/4	21	10	16	0	9.9	476581	476581	476581.0
		1/5	10	10	16	0	9.6	489939	488764	489213.6
		1/5	21	10	16	0	9.2	476581	476581	476581.0
Sko49		1/4	2	10	16	15	15.8	24406	24196	24270.3
		1/4	5	10	31	0	15.1	23440	23440	23440.0
		1/5	2	10	16	15	15.8	24484	23494	24029.6
		1/5	5	10	16	15	15.7	23440	23440	23440.0

表 2　中等规模($50<n<100$)BWQAP 实例的实验结果

QAP	z	$\lvert F_B\rvert/n$	ℓ	n_{fea}	$t_{\max}$	$t_{\min}$	t_{mean}	$c_{\max}$	$c_{\min}$	c_{mean}
Sko56		1/4	2	10	32	15	20.0	35130	34930	35112.4
		1/4	5	10	32	15	20.2	34546	34546	34546.0
		1/5	2	10	32	15	20.3	35270	34638	35097.0
		1/5	5	10	31	15	21.4	34546	34546	34546.0
tai60a	7205962	1/4	28	10	32	15	23.2	7320060	7301462	7313545.8
		1/4	56	10	32	15	23.4	7317560	7305691	7312466.9
		1/5	28	10	32	15	25.6	7510112	7480762	7497543.1
		1/5	56	10	32	15	23.1	7340060	7304569	7321343.6
Lipa60b	2520135	1/4	17	10	32	15	25.1	2555879	2538763	2544691.2
		1/4	34	10	32	15	25.2	2520135	2520135	2520135.0
		1/5	17	10	32	15	23.5	2595530	2579876	2589766.7
		1/5	34	10	31	15	23.4	2520135	2520135	2520135.0
Lipa70b	4603200	1/4	20	10	47	31	34.2	4688815	4609896	4638892.4
		1/4	39	10	47	31	34.0	4603200	4603200	4603200.0
		1/5	20	10	47	31	34.2	4678984	4662365	4669954.3
		1/5	39	10	47	31	35.3	4603200	4603200	4603200.0
Lipa80b	7763962	1/4	22	10	47	46	46.8	7763962	7763962	7763962.0
		1/4	45	10	62	46	48.9	7763962	7763962	7763962.0
		1/5	22	10	62	46	48.7	7763962	7763962	7763962.0
		1/5	45	10	47	46	46.2	7763962	7763962	7763962.0
Lipa90b	12490441	1/4	26	10	78	62	67.8	12490441	12490441	12490441.0
		1/4	51	10	79	62	64.4	12490441	12490441	12490441.0
		1/5	26	10	78	62	68.5	12490441	12490441	12490441.0
		1/5	51	10	79	62	68.0	12490441	12490441	12490441.0

到可行解的 els19 和 nug24 的情况，通过穷举的方式发现确实不存在可行解. 同时从解的质量来看，GFO 所获得可行解的质量比较稳定，可行解的最小值、最大值与平均值差别很小. 另外，在小规模实例中，chr15a 和 els19 对应的 BWQAP 实例的可行解均与原始 QAP 实例的最优解相同，说明对于这两个实例而言，在距离阈值 ℓ 较大的情况下其可行解的数目非常多(当 $\ell=46$ 时 els19 实例没有可行解)，几乎每个解都是可行解，这时实际上就退化为经典的 QAP 问题了. 这种现象在中等规模的实例中也体现得比较明显，比如 lipa80b，lipa90b. 而实例 lipa60b 和 lipa70b 均是在距离阈值 ℓ 较大的情况下取到原始 QAP 实例的最优解，对于距离阈值 ℓ 较小的情况下则未得到原始 QAP 实例的最优解(其原因是原始 QAP 实例的最优解可能违反了距离约束).

表 3 大规模($n>=100$)BWQAP 实例的实验结果

QAP	z	$\|F_B\|/n$	ℓ	n_{fea}	t_{max}	t_{min}	t_{mean}	c_{max}	c_{min}	c_{mean}
Sko100a	152002	1/4	4	10	110	78	90.5	152600	152540	152570.4
		1/4	7	10	110	78	92.6	152954	152089	152607.6
		1/5	4	10	94	78	92.3	153138	152897	153102.2
		1/5	7	10	94	78	92.0	152887	152435	152681.6
tai100a	21075842	1/4	28	10	94	93	93.3	21359120	21280432	21319832.6
		1/4	57	10	94	78	92.4	21328763	21263611	21291871.7
		1/5	28	10	109	93	95.1	21358621	21311264	21327854.8
		1/5	57	10	109	93	95.9	21331238	21248567	21297643.5
wil100	273038	1/4	4	10	109	93	95.4	273898	273128	273496.1
		1/4	7	10	110	93	95.0	273677	273102	273347.9
		1/5	4	10	110	93	98.2	273544	273226	273317.4
		1/5	7	10	110	93	96.4	273425	273169	273219.2
esc128	64	1/4	1	10	328	265	281.3	96	72	79.0
		1/4	2	10	328	266	281.6	72	72	72.0
		1/5	1	10	328	281	290.0	82	72	76.6
		1/5	2	10	343	281	300.6	72	72	72.0
tai150b	498896643	1/4	44	10	719	657	679.8	511965309	506747646	510966452.8
		1/4	87	10	735	671	678.9	510896757	510343431	510458621.2
		1/5	44	10	766	703	718.4	510964843	499867546	509845343.5
		1/5	87	10	766	703	714.5	510765464	499966452	507865664.8
tho150	8133398	1/4	46	10	687	640	648.7	8213524	8203875	8207865.9
		1/4	93	10	704	640	653.2	8211446	8200572	8206856.6
		1/5	46	10	719	671	681.1	8191858	8169684	8174926.7
		1/5	93	10	735	671	681.2	8182124	8157765	8175656.0

6 结 论

本文研究了实际应用中出现的一类 QAP 问题的新变种 BWQAP. 本文证明不仅该问题本身是 NP-难解问题，而且其可行解的存在性也属于 NP-难解问题. 为了能在多项式时间内得到质量可接受的近似解，本文给出了一种由初始解生成、可行化和优化等三个算子组成的启发式算法 GFO. 大量实验表明，该启发式算法能够有效地求解 BWQAP 问题的实例.

参 考 文 献

[1] Sahni S, Gonzalez T. P-complete approximation problems. Journal of the ACM, 1976, 23(3): 555-565

[2] Burkard R E, Çela E, Klinz B. On the biquadratic assignment problem//Pardalos PM et al. Proceedings of the Quadratic Assignment and Related Problems, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. AMS, Rhode Island, 1994, 16: 117-146

[3] Burkard R E. Selected topics on assignment problems. Discrete Applied Mathematics, 2002, 123(3): 257-302

[4] Knowles J D, Corne D W. Towards landscape analyses to inform the design of a hybrid local search for the multiobjective quadratic assignment problem//Abraham A et al. Proceedings of the Soft Computing Systems: Design, Management and Applications. Amsterdam: IOS Press, 2002: 271-279

[5] Knowles J D, Corne D W. Instance generators and test suites for the multiobjective quadratic assignment problem//Fonseca C M et al. Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference, EMO 2003. Faro, Portugal. LNCS 2632, 2003: 295-310

[6] Lee Chi-Guhn, Zhong M. The generalized quadratic assignment problem. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, Working Paper, 2003

[7] Billionnet A, Elloumi S. Best reduction of the quadratic semi-assignment problem. Discrete Applied Mathematics,

2001，109(3)：197-213

[8] Hahn P M，Kim B J，Hightower W L，Stützle T，Kanthak S，Samra H，Ding Z，Guignard M. The quadratic three-dimensional assignment problem：Exact and heuristic solution methods. The Wharton School，University of Pennsylvania，Philadelphia，Pennsylvania，USA：OPIM Working Report No. 04-08-02，2004

[9] Eliane M L，Nair M M A，Paulo O B N，Peter H，Tania Q. An analytical survey for the quadratic assignment problem. European Journal Operational Research，2007，176(2)：657-690

[10] Eiselt H A，Laporte G. A combinatorial optimization problem arising in dartboard design. Journal of the Operational Research Society，1991，42(2)：113-118

[11] Christian S，Karl D，Axel F，Kurt H. Determining location and size of medical departments in a hospital network：A multiobjective decision support approach. Health Care Management Science，2004，7(1)：63-71

[12] Potte J G，Kaiser J W. Wireless integrated network sensors//Proceedings of the Communications of the ACM. New York，USA，2000：551-558

[13] Akyildiz I F，Kasimoglu I H. Wireless sensor and actor networks：Research challenges. Ad Hoc Networks，2004，2(4)：351-367

[14] Burkard R E，Karisch S，Rendl F. QAPLIB—A quadratic assignment problem library. Journal of Global Optimization，1997，10(4)：391-403

[15] Zou Peng，Zhou Zhi，Chen Guo-Liang，Jiang He，Gu Jun. Approximate-Backbone guided fast ant algorithms to QAP. Journal of Software，2005，16(10)：1691-1698(in Chinese)
(邹　鹏，周　智，陈国良，江　贺，顾　钧. 求解 QAP 问题的近似骨架导向快速蚁群算法(英). 软件学报，2005，16(10)：1691-1698)

[16] Gambardella L，Taillard E D，Dorigo M. Ant colonies for the QAP. Journal of the Operations Research Society，1999，50(2)：167-176

[17] Middendorf M，Reischle F，Schmeck H. Multi colony ant algorithms. Journal of Heuristics，2002，8(3)：305-320

[18] Taillard E D，Gambardella L. Adaptive memories for the quadratic assignment problems. IDSIA，Lugano，Switzerland：Technical Report IDSIA-87-97，1997

[19] Nissen V. Solving the quadratic assignment problem with clues from nature. IEEE Transactions on Neural Networks，1994，5(1)：66-72

[20] Drezner Z. A new genetic algorithm for the quadratic assignment problem. Informs Journal on Computing，2003，15(3)：320-330

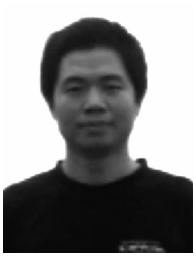
[21] Tsuchiya K，Nishiyama T，Tsujita K. A deterministic annealing algorithm for a combinatorial optimization problem using replicator equations. Physica D：Nonlinear Phenomena，2002，149(3)：161-173

[22] Ishii S，Sato M. Doubly constrained network for combinatorial optimization. Neurocomputing，2002，43(4)：239-257

[23] Misevicius A. A modification of tabu search and its applications to the quadratic assignment problem. Information Technology and Control，2003，27(2)：12-20

[24] Drezner Z. The extended concentric tabu for the quadratic assignment problem. European Journal of Operational Research，2005，160(2)：416-422

[25] Oliveira C A S，Pardalos P M，Resende M G C. GRASP with path-relinking for the QAP//Proceedings of the Experiment and Efficient Algorithms：3rd International Workshop. Brazil，LNCS 3059，2004：356-368



JIANG He，born in 1980，Ph. D.，assistant professor. His research interests include algorithm design and analysis，combinatorial optimization.

ZHANG Xian-Chao，born in 1971，Ph. D.，associate professor. His research interests include algorithm design and analysis，combinatorial optimization，network optimization and its applications.

CHEN Guo-Liang，born in 1938，professor，Ph. D. supervisor，member of Chinese Academy of Science. His research interests include parallel algorithms，high performance computing and its applications.

LI Ming-Chu，born in 1963，professor，Ph. D. supervisor. His research interests include NP-hard problem algorithm design，network security.

Background

This project is supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China under grant No. 90412007，the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60503003，the Natural Science Foundation of LiaoNing Province under grant No. 20051082，and the Gifted Young Foundation of Dalian University of Technology. It focuses on the efficient heuristics for classic NP-Hard problems (such as SAT，TSP，Bin-Packing and Max-Flow).

The group has presented some fast algorithms and theoretic results of NP-Hard problems and published some papers on Journal of Combinatorial Optimization，Discrete Mathematics，Information Processing Letters，Journal of Computer Science and Technology，Journal of Advanced Software，Chinese Journal of Computers(in Chinese)，Journal of Software (in Chinese)，etc. And being a part of this project，this paper mainly focuses on the algorithm design of the quadratic assignment problem.