

面向彩色图像恢复与边缘检测的 Mumford-Shah 推广模型研究

肖亮¹⁾ 吴慧中¹⁾ 韦志辉^{1),2)}

¹⁾(南京理工大学计算机科学与技术系 南京 210094)

²⁾(南京理工大学应用数学系 南京 210094)

摘要 将 Ambrosio 和 Tortorelli 提出的 Mumford-Shah 椭圆泛函逼近模型推广到彩色图像情形. 推广模型将彩色图像建模为黎曼流形上的嵌入曲面, 据此将刻画不同颜色通道间方向梯度差异的物理量——向量积项引入能量泛函中目标的正则化部分, 进而建立了新的能量泛函. 从理论上证明了新能量泛函的 Gamma 收敛性, 推导了最优化能量泛函所满足的欧拉-拉格朗日方程. 利用最速下降法, 提出了推广模型的一种有限差分方法. 理论分析和实验结果都表明: 传统的直接将灰度图像的 Mumford-Shah 模型推广到向量图像情形, 往往存在孤立对待每个通道的问题, 而该文推广模型能够精细刻画各通道之间的相关性和相互影响, 在图像恢复和分割效果上都大大优于传统的直接推广的模型.

关键词 向量值图像 Mumford-Shah 模型; 椭圆泛函逼近; 曲面方法; 彩色图像; 图像恢复; 边缘检测
中图法分类号 TP391

Research on Generalized Mumford-Shah Model for Color Image Restoration and Edge Detection

XIAO Liang¹⁾ WU Hui-Zhong¹⁾ WEI Zhi-Hui²⁾

¹⁾(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

²⁾(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract This paper focuses on Mumford-Shah model based approaches for color images restoration and segmentation. The extension of the elliptic functional proposed by Ambrosio and Tortorelli for color image is studied and analyzed. In the generalization model, image is considered as embedded surface in Riemannian manifold. A new physical quantity in the form of vector product, which describes the differences of the gradient between different channels, is introduced into the regularization term of the “object”, then a new energy functional is proposed. The authors give a detailed proof of Gamma convergence result of the generalization energy functional, and Euler-Lagrange equation for optimizing the new energy functional is also proved. Utilizing the steepest descent method and half-point scheme, a finite difference algorithm is proposed. Experimental results and theoretic analysis show that the straightforward generalization Mumford-Shah model for vector-valued image will deal with different channels as the same way, while the generalization model which is in Riemannian manifold framework provides a new mechanism to align

收稿日期: 2004-09-28; 修改稿收到日期: 2005-11-16. 本课题得到高等学校博士学科点专项科研基金项目(20020288024)和南京理工大学青年学者基金(NJUST200401)资助. 肖亮, 男, 1976 年生, 博士, 讲师, 主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用、模式识别、运动估计与跟踪、虚拟现实与系统仿真. E-mail: xtxiaoliang@163.com. 吴慧中, 女, 1942 年生, 教授, 博士生导师, 研究领域为虚拟现实、计算机图形图像理论. 韦志辉, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为变分偏微分方程在图像处理中的应用、小波分析、模式识别.

different channels together, and to measure the cross correlation of orientation between different channels, also the generalization model has better performance than the direct extension model.

Keywords Mumford-Shah model for vector-valued image; approximation by elliptic functional; surface based approach; color image; image restoration; edge detection

1 引言

近 20 年来,计算机视觉与图像处理领域中图像分割、图像恢复、图像修补(image inpainting)与运动跟踪的研究引起了国内外大批数学家和图像学者的极大兴趣,掀起了一股研究基于变分偏微分方程(variational-PDE)模型的图像处理浪潮^[1]。20世纪 80 年代由 Mumford 和 Shah 提出的 Mumford-Shah 模型(简称 M-S 模型)是目前广为关注的图像恢复与分割模型,它在理论上是一类具有体积能量和低维测度的变分问题^[2,3]。M-S 模型认为理想图像应该是由分片均匀的目标与正则的边缘曲线组成,它通过引入图像的保真项控制分割后图像的相似性,图像的正则项保障分割图像一定的光滑性,而几何测度(Haussdorf 测度)项控制边缘的分数维粗糙度。它提供了一种根据能量项叠加的目标函数最小化进行全局优化的双向驱动机制,即在计算机视觉领域低层事件的正确理解依赖于高层知识,由图像数据产生的数据约束(bottom-up)和关于图像高层建模知识(top-down)组成的能力项叠加的目标函数最优化过程可提供高层视觉处理的选择方案。由于 M-S 模型具有结合使用高层知识的能力,支持直观的交互式操作,成为引人注目的图像模型。近 20 年来,国内外将 M-S 模型应用于图像恢复、图像分割和分类、形状匹配、运动跟踪等方面,并取得了大量的成果。

对于 M-S 模型的数值逼近,存在两种处理框架:水平集框架和 Gamma 收敛(Γ -收敛)框架。前者包括 Chan 和 Vese 等人建立的水平集模型^[4],他们讨论了将原始图像视为由不连续集和分片常数图像组成的简单情形,提出了无梯度主动轮廓二相水平集方法(简称 C-V 算法),并推广到多相水平集方法和向量值图像的水平集方法^[5]。后者一个著名的模型是 Ambrosio 和 Tortorelli 等人提出的椭圆泛函逼近模型^[6,7],该模型通过设置辅助变量函数表征图像的跳跃集,本质上可以理解为马尔可夫随机场中线过程(line process)模型的一种“目标-边缘”模型。

目前,国内的研究集中于 M-S 模型的水平集方法及其应用。例如,文献[8]进一步改进了 C-V 方法的偏微分方程并提出了符号距离函数快速计算的源点映射扫描方法,文献[9]提出了融入人脸椭圆性形状约束 M-S 水平集模型,并应用于人脸检测。然而,国内对于基于 Γ -收敛的 M-S 模型的研究鲜有报道,国外的研究尚局限于灰度图像情形,对于彩色图像情形只有数学上的理论结果并且应用例子很少。众所周知,彩色图像的恢复与分割远比灰度图像复杂得多,例如:对灰度图像很有效的恢复与分割算法直接对彩色图像逐通道进行处理往往不能达到很好的效果,因为逐通道方法并没有考虑各通道之间的相关性,也没有考虑人类视觉系统的颜色感知特性。因此逐通道将 M-S 模型直接推广到彩色图像情形,对彩色图像处理并不是十分有效,在图像边缘附近容易产生色彩的抖动效应。本文在椭圆泛函逼近模型的基础上展开工作。首先在黎曼流形的框架下将彩色图像建模为 R^3 空间的嵌入曲面,通过寻找最小曲面应满足的能量泛函得到衡量不同颜色通道间方向梯度差异的物理量——向量积项,并将向量积项引入 M-S 模型中目标的正则化部分,构造了新的推广能量泛函,然后理论证明了推广能量泛函的 Γ -收敛性和最优化能量泛函所满足的欧拉-拉格朗日方程;最后利用最速下降法提出了基于半点格式的数值迭代方法,研究了它们在彩色图像恢复与边缘检测中的性能。理论分析和实验结果都表明该模型精细刻画了彩色图像各通道之间的相关性和相互影响,提高了恢复与分割的鲁棒性。

2 Mumford-Shah 泛函概述

2.1 灰度图像 Mumford-Shah 泛函的逼近形式

Mumford 和 Shah 于 1985 年提出一个图像分割的目标函数,并通过最优化方法进行图像分割^[2]。1989 年,他们提出将图像分割、边缘检测问题归结为如下变分问题^[3]:

$$\min \{G^1(u, \Gamma) : \Gamma \subseteq R^2 \text{ 的闭集}, u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)\},$$

其中,

$$\begin{aligned} G^1(u, \Gamma) = & \beta \cdot \int_{\Omega \setminus \Gamma} |u(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy + \\ & \lambda \cdot \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + H^1(\Gamma) \quad (1) \end{aligned}$$

式中, $u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 为定义在开集 $\Omega \subseteq R^2$ 上的已知函数, 调节参数 $\lambda, \beta > 0$. $u(x, y)$ 为定义于 $\Omega \setminus \Gamma$ 上的正则化函数, 为此能量函数的最小解; $\Gamma \subseteq R^N$ 为闭集; H^1 为 1 维 Hausdorff 测度, 为图像边缘曲线的长度项.

为了解决最优化泛函 G^1 的存在性和正则性问题, 需要为图像函数和边缘曲线构建一个合适的函数空间. De Giorgi 等提出一种新的思路^[10,11]: 将 Γ 解释为函数 u 的 Lebesgue 不连续集, 并且将问题置于一个特殊的函数空间, 这个空间需要具有:(1) 结构性质. 如果 Γ 为函数 u 的 Lebesgue 不连续集, 则 Γ 被解释为一个超曲面, u 在 $\Omega \setminus \Gamma$ 上是“可微的”, 这样取决于 ∇u 的体积能量 (bulk energy) 才能有定义; (2) 紧性性质. 能够应用直接变分法, 得到在能量有限前提下解函数序列的紧性. Rudin 和 Osher 提出的有界变差函数空间 (Bounded Variation functional space) (简称 BV 空间)^[1] 是较为接近的函数空间, 它定义为具有有界全变差的一类函数的集合, 图像的全变差被定义为 u 的向量值 Radon 测度 Du 在 Ω 上的积分. 有界变差函数可以分解为正则部分、跳跃部分和康托集部分, 正则部分代表图像的相对光滑的区域, 跳跃部分对应于图像的边缘曲线, 而康托集部分表征部分纹理. 我们将所有康托集为零的有界变差函数集合称为特殊有界变差函数空间 $SBV(\Omega)$, 它就是严格满足这两个要求的函数空间. 用 u 的跳跃部分 S_u 替代 Γ , 就得到 Mumford-Shah 能量泛函的弱形式 (weak formulation):

$$\begin{aligned} G^2(u, S_u) = & \beta \cdot \int_{\Omega} |u(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy + \\ & \lambda \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + H^1(S_u) \quad (2) \end{aligned}$$

关于弱形式 M-S 泛函 G^2 , Ambrosio 和 Tortorelli^[6,7] 在 SBV 空间中给出了解的存在性和部分正则性证明, 然而从数值观点看, 计算弱形式 M-S 泛函的最优解仍然十分困难, 因为一维未知数不连续集 S_u 的几何测度项 $H^1(S_u)$ 在数值处理中是个棘手的问题. 解决该问题的有效途径是给出泛函 G^2 的某种逼近泛函, 使得逼近泛函可微并且定义在光滑的函数空间上.

研究表明, 处理 M-S 泛函逼近问题的一个有

力工具是 De Giorgi 提出的 Γ 收敛^[6,7,11], 即定义在度量空间 X 上的实值函数簇 $\{F_\epsilon\}$, 当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时 Γ 收敛到 F , 是指如果对于所有 $x \in X$: (1) 若 $x_\epsilon \rightarrow x$, 则 $F(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\epsilon(x_\epsilon)$; (2) 存在 $x_\epsilon \rightarrow x$ 使得 $F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\epsilon(x_\epsilon)$. Γ 收敛的好处在于: 如果 F_ϵ Γ -收敛到 F , 则与 F_ϵ 有关的极小问题的极小值序列相应地收敛到与 F 有关的极小问题的极小值. 在 Γ 收敛的框架下, 已知有四种逼近方式^[10]. 本文关注 Ambrosio 和 Tortorelli 等人的椭圆泛函逼近模型, 他们的思想是通过设置辅助变量函数 $b: \Omega \rightarrow [0, 1]$, 来表征跳跃集 S_u , 定义了松弛泛函 $G^3(u, b)$ ^[6,7].

$$\begin{aligned} G^3(u, b) = & \int_{\Omega} \left\{ \epsilon |\nabla b|^2 + \lambda \left(b^2 |\nabla u|^2 + \frac{(b-1)^2}{4\lambda\epsilon} \right) + \right. \\ & \left. \beta |u - u_0|^2 \right\} dx dy \quad (3) \end{aligned}$$

$G^3(u, b)$ 定义于 $W^{1,2}(\Omega) \times \{b \in W^{1,2}(\Omega); 0 \leq b \leq 1 \text{ a.e.}\}$. 他们在 $GSBV(\Omega)$ (具有有界变差的广义特殊函数空间, 严格的定义参见文献[10]) 上证明了: 如果 $w_\epsilon = (u_\epsilon, b_\epsilon)$ 为目标泛函 $G^3(u, b)$ 的最小序列, 则在 L^2 范数下, u_ϵ 为 u 的近似, $v_\epsilon \rightarrow 1$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$. 这里, b_ϵ 仅在不连续集 S_u 的很小邻域为 1, 其它地方都小于 1.

2.2 向量值图像 Mumford-Shah 模型的已知结果

2001 年, Focardi 将灰度图像的 M-S 泛函 G^2 推广到向量值图像 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 的情形^[12], 得到了正则化项服从线性增长和准凸 (quasiconvex)^[13] 条件下的一般性理论结果, 下面仅引述一个简化结论.

定理 1^[12]. 令 $\varphi: R^{n \times m} \rightarrow [0, +\infty]$ 准凸且满足线性增长条件: $c_1 |z|^p \leq \varphi(z) \leq c_2 |z|^p$, $0 \leq c_1 \leq c_2$, $p > 1$. 能量泛函 $\bar{E}_\epsilon(u, b)$ 定义为

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[(|b|^2 + \eta_\epsilon) \varphi(\nabla u) + \frac{\epsilon^{p-1}}{p} |\nabla b|^p + \frac{(b-1)^p}{a \epsilon p'} \right] dx, \\ \quad \text{当 } u, b \in W^{1,p}, 0 \leq b \leq 1; \\ +\infty, \quad \text{否则.} \end{cases}$$

式中 $p' = \frac{p}{p-1}$, $a = \left(2 \int_0^1 (1-s)^{p-1} ds \right)^{p'}$, $\eta_\epsilon = o(\epsilon^{p-1})$, $\eta_\epsilon > 0$, 则 $E_\epsilon(u, b)$ Γ -逼近于如下能量泛函 $\bar{G}(u, b)$.

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \varphi(\nabla u) dx + H^{n-1}(S_u), \quad \text{当 } u \in GSBV(\Omega, R^m) \text{ 且} \\ \quad b=1, \text{ a.e.}; \\ +\infty, \quad \text{否则.} \end{cases}$$

定理 1 中, 对正则项引入了一个服从线性增长性质且准凸的正则性条件。局部可积函数 $\varphi: R^{n \times m} \rightarrow [0, +\infty]$ 的准凸性是函数凸性的一种弱表现形式, 对任意 $A \in R^{n \times m}$ 和 $\psi \in W_0^{1,\infty}(D, R^m)$, 有界区域 $D \subset R^n$, 准凸函数 φ 满足 $\varphi(A) \leq \frac{1}{|D|} \int_D \varphi(A + \nabla \psi(x)) dx$. 然而, 满足此条件的正函数 $\varphi: R^{n \times m} \rightarrow [0, +\infty]$ 太多了。对于实际的彩色图像恢复与边缘检测处理任务, 应该如何选择特定的正函数 φ 呢? 最简单的例子是取 $\varphi(\nabla u) = \lambda |\nabla u|^2$, 此时得到一种最显而易见的推广情形:

$$\begin{aligned} G^4(u, S_u) = & \beta \cdot \int_{\Omega} |u(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy + \\ & \lambda \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + H^1(S_u) \end{aligned} \quad (4)$$

并且向量值泛函 G^4 具有形如泛函 G^3 的椭圆逼近:

$$\begin{aligned} G^5(u, b) = & \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon |\nabla b|^2 + \lambda \left(b^2 |\nabla u|^2 + \frac{(b-1)^2}{4\lambda\varepsilon} \right) + \right. \\ & \left. \beta |u - u_0|^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

利用变分法, 最优化泛函 G^5 导出的欧拉-拉格朗日方程为

$$\begin{cases} 2\beta(u - u_0) - \lambda \operatorname{div}(b^2 \nabla u) = 0 \\ \frac{1+4\lambda\varepsilon |\nabla u|^2}{4\varepsilon^2} \left(b - \frac{1}{4\lambda\varepsilon |\nabla u|^2} \right) - \Delta b = 0. \end{cases}$$

式(6)中 $|\nabla u| = \sum_{i=1}^n u_{i,x}^2 + \sum_{i=1}^n u_{i,y}^2$, 它构成一个基于目标和边缘的耦合 PDE 系统: 第 1 个 PDE 为向量方程, 对目标的各通道分量实施各向异性扩散; 第 2 个 PDE 指示边缘的位置。当利用最速下降法求解时, 两个 PDE 交错迭代不断交互, 从而达到图像恢复与分割的目的。然而本文的实验结果表明, 上述模型对于彩色图像并不能得到十分理想的效果, 特别是噪声密度较大时, 恢复图像中沿着图像边缘的色彩容易出现讨厌的抖动和斑驳效应, 边缘保持效果不好(见图 2)。分析原因可知, 泛函 G^4 中彩色图像 u 的各通道间相关性仅仅通过共同的跳跃集 S_u 耦合在一起, 导致由逼近泛函 G^5 导出的 PDE 系统孤立地处理每个通道分量, 而各通道分量间仅仅通过边缘指示函数 b 联系在一起, 缺少足够的通信机制。

3 彩色图像 Mumford-Shah 推广模型的建立

本文推广模型的主要思想是将彩色图像建模为

黎曼流形上的嵌入曲面, 将刻画不同颜色通道间梯度方向差异的物理量——向量积项引入目标的正则化部分, 进而构造新的能量泛函。基于曲面的方法(surface-based approach)不再将图像 $u(x)$ 看作是 Ω 到 R 的函数, 而把它看作图像流形到特征空间流形的嵌入曲面, 从而将图像恢复问题归结为寻找面积最小的嵌入曲面问题^[14,15]。例如文献[14]系统地阐述了低层视觉处理中基于曲面的方法的统一几何框架。

对彩色图像 $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$, 将其建模为 R^5 中的嵌入曲面 X :

$$X(x, y) = (x, y, u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) \quad (6)$$

则由微分几何的知识, 该嵌入曲面的面积泛函 $S(u) = \int_{\Omega} \sqrt{g} dx dy$, 其中 g 为该嵌入曲面上的度量且 $g = \det(G)$, G 为对称正定矩阵。

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^3 u_{i,x}^2 & \sum_{i=1}^3 u_{i,x} u_{i,y} \\ \sum_{i=1}^3 u_{i,x} u_{i,y} & 1 + \sum_{i=1}^3 u_{i,y}^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

经计算, G 的行列式为

$$\begin{aligned} g &= \det(G) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^3 u_{i,x}^2 + \sum_{i=1}^3 u_{i,y}^2 + (u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y})^2 + \\ &\quad (u_{1,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{1,y})^2 + (u_{2,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{2,y})^2 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^3 u_{i,x}^2 + \sum_{i=1}^3 u_{i,y}^2 + \\ &\quad \left[\begin{vmatrix} u_{1,x} & u_{2,x} \\ u_{1,y} & u_{2,y} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_{1,x} & u_{3,x} \\ u_{1,y} & u_{3,y} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_{2,x} & u_{3,x} \\ u_{2,y} & u_{3,y} \end{vmatrix} \right]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

由 $u_x = (u_{1,x}, u_{2,x}, u_{3,x})$, $u_y = (u_{1,y}, u_{2,y}, u_{3,y})$, 由向量的数量积和向量积的概念, 则

$$\begin{aligned} g &= \det(G) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^3 |\nabla u_i|^2 + \sum_{i < j} |\nabla u_i \times \nabla u_j|^2 \\ &= 1 + |\nabla u|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

这样, 嵌入曲面的面积泛函表示为

$$S(u) = \int_{\Omega} \sqrt{g} dx = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^2} dx dy \quad (10)$$

如果将式(10)看作彩色图像的几何图像模型, 它与泛函 G^4 中正则项不同的地方是增加了向量积项 $|\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^2$ 。当处理图像为灰度图像时, 该向量积

项为零,该面积泛函等同于图像的全变差公式。向量积项的作用是对不同通道间梯度的方向差异进行刻画;对包含该项的面积泛函最小化,就能够将各通道耦合在一起,使得沿边缘的颜色抖动性较小。因此我们将向量积项 $|\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^m$ 加入泛函 G^5 的正则化部分,得

$$G^6(\mathbf{u}, b) = \int_{\Omega} (b^2 + \eta_{\epsilon}) (\lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^m) dx dy + \int_{\Omega} \left(\frac{(b-1)^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \cdot |\nabla b|^2 \right) dx dy \quad (11)$$

能量泛函(11)中参数 m 如何选取呢?首先从物理意义上讲,某像素通道间梯度的方向差异 $|\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^m$ 的影响不应该超过该像素所有通道内梯度差异 $|\nabla \mathbf{u}|^2$ 的影响;其次由定理 1,此时 $\varphi(\nabla \mathbf{u}) = \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^m$,则 m 的选择首先应该使正函数 φ 服从线性增长性质,又由于 $\lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|^m = \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + [|\mathbf{u}_x| |\mathbf{u}_y| \sin \theta]^m \leq \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + (|\nabla \mathbf{u}|^2/2)^m$,因此 $m \leq 1$ 。本文取 $m=1$, 泛函 G^6 进一步改进为

$$G^7(\mathbf{u}, b) = \int_{\Omega} (b^2 + \eta_{\epsilon}) (\lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|) dx dy + \int_{\Omega} \left(\frac{(b-1)^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \cdot |\nabla b|^2 \right) dx dy \quad (12)$$

接下来检验泛函 G^7 的 Γ -收敛性质。由 $\varphi(\nabla \mathbf{u}) = \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|$ 及定理 1 的成立条件,必须检验正函数 φ 的准凸性质。然而根据准凸的定义来判断 φ 的准凸性非常困难。幸运的是根据文献[13],如果函数 φ 是多凸(polyconvex)的,则该函数肯定是准凸的,而检验函数的多凸性非常容易。因此下面引入函数多凸性的定义以及引理 1。

定义 1^[13]。称 Borel 可测的局部可积函数 $\varphi: R^{n \times m} \rightarrow [0, +\infty]$ 是多凸(polyconvex)的,如果存在凸函数 $g: R^{\tau(n,m)} \rightarrow [0, +\infty]$,使得 $\varphi(\mathbf{A}) = g(\tau(\mathbf{A}))$ 。式中 $\tau: R^{n \times m} \rightarrow R^{\tau(n,m)}$ 定义为 $\tau(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}, adj_2(\mathbf{A}), \dots, adj_{\min(n,m)}(\mathbf{A}))$, $adj_k(\mathbf{A})$ 为矩阵 \mathbf{A} 的 $k \times k$ 阶子式。

引理 1^[13]。Borel 可测的局部可积函数 $\varphi: R^{n \times m} \rightarrow [0, +\infty]$ 多凸,则 φ 是准凸的。

由定义 1 和引理 1,不难证明如下定理 2(详细证明见附录 1)。

定理 2. 能量泛函 $\bar{E}_{new,\epsilon}(\mathbf{u}, b)$ 定义为

$$\bar{E}_{new,\epsilon}(\mathbf{u}, b) = \begin{cases} G^7(\mathbf{u}, b), & \text{当 } \mathbf{u}, b \in W^{1,2}, 0 \leq b \leq 1 \\ +\infty, & \text{否则} \end{cases}$$

则 $\bar{E}_{new,\epsilon}(\mathbf{u}, b)$ Γ -逼近于如下能量泛函 $\bar{G}(\mathbf{u}, b)$:

$$\bar{G}(\mathbf{u}, b) =$$

$$\begin{cases} (\lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|) dx dy + H^1(S_u), \\ \text{当 } \mathbf{u} \in GSBV(\Omega, R^3) \text{ 且 } b=1, a.e. \\ +\infty, \text{ 否则} \end{cases}$$

由于 $\eta_{\epsilon} = O(\epsilon)$, $\eta_{\epsilon} > 0$, 本文忽略该参数,并加入数据约束项,得到基于“目标与边缘”的彩色图像彩色 Mumford-Shah 推广能量泛函:

$$\begin{aligned} G^8(\mathbf{u}, b) = & \beta \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 dx dy + \\ & \int_{\Omega} b^2 (\lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|) dx dy + \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{(b-1)^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \cdot |\nabla b|^2 \right) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

从而,彩色图像的恢复与分割问题转化为能量泛函 $G^8(\mathbf{u}, b)$ 的最优化问题。利用直接变分法,可以得到定理 3 的理论结果,即最优化能量泛函 $G^8(\mathbf{u}, b)$ 应满足式(14)的欧拉-拉格朗日方程(详细证明见附录 2)。

定理 3. 如果最优化能量泛函 $G^8(\mathbf{u}, b)$ 存在最小解,则最小解满足欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{cases} 0 = -\operatorname{div}(b^2 \mathbf{V}) + 2\beta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \\ 0 = \left(\frac{b-1}{\epsilon} - \epsilon \Delta b \right) + 2bW \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left[2\lambda \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}_y \times (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y)}{|\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|}, 2\lambda \mathbf{u}_y - \frac{\mathbf{u}_x \times (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y)}{|\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|} \right], \\ W &= \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y|. \end{aligned}$$

4 推广模型的迭代算法

对于彩色图像 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 的恢复与边缘检测,由定理 3,推广模型可通过建立 (\mathbf{u}, b) 的最速下降法求解。为了陈述简洁及便于数值实现,引入如下记号:

$$\begin{aligned} g_1 &= (u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y}) u_{2,y}, \\ g_2 &= (u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y}) u_{1,x}, \\ g_3 &= -(u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y}) u_{1,y}, \\ g_4 &= -(u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y}) u_{2,x}, \\ g_5 &= (u_{1,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{1,y}) u_{3,y}, \\ g_6 &= (u_{1,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{1,y}) u_{1,x}, \\ g_7 &= -(u_{1,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{1,y}) u_{1,y}, \\ g_8 &= -(u_{1,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{1,y}) u_{3,y}, \\ g_9 &= (u_{2,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{2,y}) u_{3,y}, \\ g_{10} &= (u_{2,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{2,y}) u_{2,x}, \\ g_{11} &= -(u_{2,x} u_{3,y} - u_{3,x} u_{2,y}) u_{2,y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} &= (u_{2,x}u_{3,y} - u_{3,x}u_{2,y})u_{3,x}, \\
S &= |\nabla \mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^3 u_{i,x}^2 + \sum_{i=1}^3 u_{i,y}^2, \\
T &= |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y| = \sqrt{(u_{1,x}u_{2,y} - u_{2,x}u_{1,y})^2 + (u_{1,x}u_{3,y} - u_{3,x}u_{1,y})^2 + (u_{2,x}u_{3,y} - u_{3,x}u_{2,y})^2}, \\
W &= \lambda |\nabla \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y| = \lambda S + T, \\
G_{11} &= \frac{g_1 + g_5}{T}, \quad G_{12} = \frac{g_4 + g_8}{T}, \\
G_{21} &= \frac{g_3 + g_9}{T}, \quad G_{22} = \frac{g_2 + g_{12}}{T}, \\
G_{31} &= \frac{g_7 + g_{11}}{T}, \quad G_{32} = \frac{g_6 + g_{10}}{T}, \\
V_k &= (V_{k,1}, V_{k,2}), \quad V_{k,1} = b^2(2\lambda u_{k,x} + G_{k,1}), \\
V_{k,2} &= b^2(2\lambda u_{k,y} + G_{k,2}).
\end{aligned}$$

由定理 3 的证明过程,对彩色图像的恢复和边缘检测可归结为如下交错 PDE 方程组求解:

$$u_{k,t} = 2\beta(u_k^0 - u_k) + \operatorname{div} \mathbf{V}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$b_t = \left(\varepsilon \Delta b - \frac{b-1}{\varepsilon} \right) - 2bW$$

令 (i, j) 为图像像素的离散坐标, $u_k^n(i, j)$ 表示彩色图像第 k 个通道图像在像素 (i, j) 处人工演化时间为 $n\Delta t$ 的颜色值, 利用半点格式^[10,16], 可建立离散的差分形式:

$$\begin{aligned}
u_k^{(n+1)}(i, j) &= u_k^{(n)}(i, j) + \Delta t \cdot (2\beta(u_k^0(i, j) - u_k^{(n)}(i, j)) + \\
&\quad \left(V_{k,1}^{(n)} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - V_{k,1}^{(n)} \left(i - \frac{1}{2}, j \right) \right) + \\
&\quad \left(V_{k,1}^{(n)} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) - V_{k,1}^{(n)} \left(i, j - \frac{1}{2} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^{(n+1)}(i, j) &= b^{(n)}(i, j) - \Delta t \left(\varepsilon [\Delta b]^{(n)}(i, j) - \right. \\
&\quad \left. \frac{b^{(n)}(i, j)}{\varepsilon} - 2b^{(n)}(i, j) \cdot W^{(n)}(i, j) \right).
\end{aligned}$$

具体离散及算法实现时采取如下策略:

(i) 分析方程组的特性, 易知该方程由各通道色彩的一阶导数 $u_{k,x}$ 和 $u_{k,y}$ 的组合组成, 其离散方法以 $\left(i + \frac{1}{2}, j \right)$ 为例, $u_{k,x}$ 采取中心差商估计而 $u_{k,y}$ 采取 min mod(\cdot) 格式.

$$\min \operatorname{mod}(\alpha, \beta) = 1/2(\operatorname{sign}(\alpha) + \operatorname{sign}(\beta))\min(|\alpha|, |\beta|),$$

$$u_{k,x} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) = \frac{1}{2}(u_k(i+1, j) - u_k(i, j)),$$

$$u_{k,y} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) = \min \operatorname{mod} \left(\frac{1}{2}(u_k(i+1, j+1) - \right.$$

$$\left. u_k(i+1, j-1) \right), \frac{1}{2}(u_k(i, j+1) - u_k(i, j-1)).$$

(ii) 由于 $S, T, W, \{G_{i,j}\}_{i=1,2,3;j=1,2}$, 均由 $u_{k,x}$ 和

$u_{k,y}$ 的组合组成, 因此在算法实现时采取“空间换时间”策略, 设立六个二维数组存放 $u_{k,x}$ 和 $u_{k,y}$, 在每次迭代开始时一次性计算; 并由此预先计算中间矩阵 $S, T, W, \{G_{i,j}\}_{i=1,2,3;j=1,2}$. 这样做的好处是能够大大降低算法的计算复杂性.

(iii) 对 $[\Delta b](i, j)$, 算法中考虑了拉普拉斯算子 Δ 的旋转不变性,

$$\begin{aligned}
[\Delta b](i, j) &= \tau(b(i+1, j) + b(i-1, j) + \\
&\quad b(i, j+1) + b(i, j-1) - 4b(i, j)) + \\
&\quad \frac{(1-\tau)}{2}(b(i+1, j+1) + \\
&\quad b(i-1, j+1) + b(i+1, j-1) + \\
&\quad b(i-1, j-1) - 4b(i, j)),
\end{aligned}$$

其中 $\tau \in [0, 1]$, 根据梯度方向进行求取.

5 实验结果

为了定量分析原模型 $G^5(\mathbf{u}, b)$ 与本文推广模型 $G^8(\mathbf{u}, b)$ 的边缘保持恢复和边缘检测能力, 本文以峰值信噪比 (PSNR)、拉普拉斯均方差 (LMSE) 为客观指标. PSNR 能够衡量算法的去噪能力而 LMSE 能够较好地衡量算法恢复图像边缘保持效果. LMSE 值越小, 图像边缘保持效果越好. PSNR 和 LMSE 定义为^[16]

$$\text{PSNR} =$$

$$10 \log \left[\frac{255^2}{\frac{1}{NM} \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (u_k(i, j) - \{u_{k,0}(i, j)\})^2 \right) / 3} \right],$$

$$\text{LMSE} =$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left[\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\mathcal{O}\{u_k(i, j)\} - \mathcal{O}\{u_{k,0}(i, j)\}]^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \mathcal{O}\{u_k(i, j)\}^2} \right]^2}.$$

LMSE 中

$$\mathcal{O}\{u(i, j)\} = u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) - 4 \times u(i, j).$$

实验图像为 256×256 大小真彩色国际标准测试图像 Peppers 和 Lenna. 图 1 分别为原始 Peppers 图像和 Lenna 图像以及加入噪声密度分别为 18.4% 和 31.4% 的高斯噪声后的待处理图像. 表 1 列出了本文的主要实验数据. 图 2 和图 3 分别为最优化 $G^5(\mathbf{u}, b)$ 和最优化 $G^8(\mathbf{u}, b)$ 处理后的恢复图像和边缘检测结果 ($\beta = 0.3, \lambda = 0.5, \varepsilon = 0.04$, 时间迭代步长 $\Delta t = 0.1$, 迭代次数 20 次, CPU 时间为 14.5s). 主观视觉结果说明: 两种模型都有很强的去噪和边

缘检测能力,相比而言原模型处理结果存在比较明显的色彩抖动和斑驳效应(图 2),而推广模型处理结果更加自然清晰,基本看不出明显的色彩抖动现象(图 3).从表 1 中的实验数据看,最优化 $G^5(u, b)$ 和最优化 $G^8(u, b)$ 处理后,峰值信噪比都能大幅度提高,LMSE 和 PMSE 均进一步下降,表明两种模型都具有很强的噪声去除以及细节保持能力.从 PSNR 提高幅度看本文推广模型比原模型幅度更大,对 Peppers 图像和 Lenna 图像推广模型分别比原模型提高近 4.5dB 和 4dB;从边缘保持效果指标

LMSE 看,推广模型比原模型下降幅度更大.这些实验数据表明,本文推广模型无论在图像恢复质量和边缘检测性能上都大大优于原模型.

表 1 彩色图像恢复与边缘检测性能比较数据

测试对象与参数	加噪图像			恢复图像		
	图像	噪声密度 (%)	PSNR (dB)	LMSE	模型类别	PSNR (dB)
Peppers	18.4	15.07	13.22	$\inf\{G^5(u, b)\}$	20.68	1.02
Lenna	31.4	11.75	13.624	$\inf\{G^5(u, b)\}$	20.11	1.49
				$\inf\{G^8(u, b)\}$	24.12	0.95

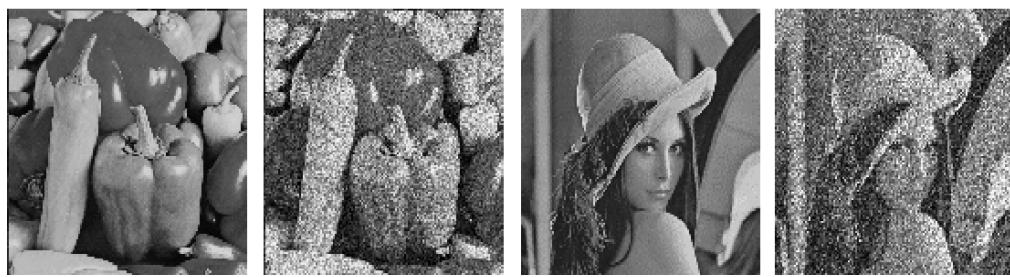


图 1 原始图像与加入高斯噪声的图像

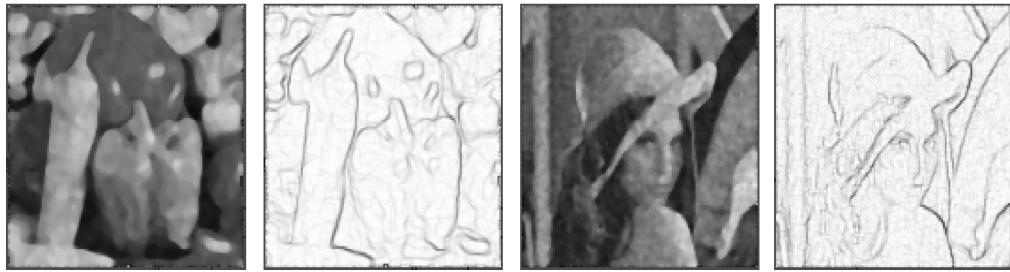


图 2 最优化 $G^5(u, b)$ 处理结果:恢复图像和检测到的边缘

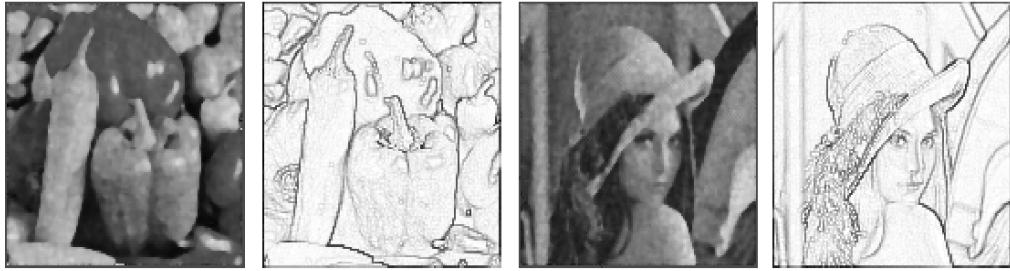


图 3 最优化 $G^8(u, b)$ 处理结果:恢复图像和检测到的边缘

6 结 论

由于将灰度图像 Mumford-Shah 模型直接推广到彩色图像时,对于彩色图像的恢复和分割往往导致边缘和色彩的抖动效应问题.本文在黎曼流形框架下,揭示了该问题产生的根本原因在于:直接推广的 Mumford-Shah 模型中各通道之间仅仅通过边

缘连接在一起,没有充分考虑通道间交叉梯度差异和相互影响.本文将彩色图像建模为五维空间的嵌入曲面,将精细刻画各通道之间的相关性和相互影响的矢量积物理量引入图像模型中,提出了推广的彩色图像 Mumford-Shah 模型,并证明了该模型的 Gamma 收敛性以及最优化能量泛函所满足的欧拉-拉格朗日方程,最后提出基于最速下降法和半点格式的数值迭代算法.实验证明了本文推广模型在图

像恢复和边缘检测效果上都优于直接推广的模型。

进一步深入的工作是：算法上，亟待研究快速收敛和稳定的数值计算方法，亟待研究考虑不同颜色空间（如 HSV, HLS, CIE-XYZ 等）上的推广模型；应用上，可以考虑进一步将图像模型、图像数据产生的数据约束和关于目标形状位置的先验知识约束三者有机地结合起来，应用于动态目标跟踪、人脸检测、医学图像处理等相关领域。

致谢 感谢德国马克斯-普朗克数学研究所谭康海博士以及南京理工大学应用数学系杨孝平教授在曲面方法原理等方面的帮助。感谢审稿专家提出的非常宝贵的建议和意见！

参 考 文 献

- 1 Chan T., Shen Jian-Hong. Mathematical models for local non-texture inpainting. SIAM Journal of Applied Mathematical, 2001, 62(3): 1019~1043
- 2 Mumford D., Shah J.. Boundary detection by minimizing functions. In: Proceedings of Conference Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco, 1985, 22~26
- 3 Mumford D., Shah J.. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577~685
- 4 Chan T., Vese L.. Active contour without edges. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266~277
- 5 Chan T., Vese L.. Active contour without edges for vector-valued image. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2000, 11(2): 130~141
- 6 Ambrosio L., Tortorelli V.. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(8): 999~1036
- 7 Ambrosio L., Tortorelli V.. On the approximation of free discontinuity problems. Bollettino Dell'Unione Matematica Italiana, 1992, 7(6-B): 105~123
- 8 Li Jun, Yang Xin, Shi Peng-Fei. A fast level set approach to image segmentation based on Mumford-Shah model. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(11): 1175~1183(in Chinese)
(李俊, 杨新, 施鹏飞. 基于 Mumford-Shah 模型的快速水平集图像分割方法. 计算机学报, 2002, 25(11): 1175~1183)
- 9 Huang Fu-Zhen, Su Jian-Bo, Xi Yu-Geng. Geometric active contours for face contour extraction. Journal of Image and Graphics, 2003, 8(5): 546~550(in Chinese)
(黄福珍, 苏剑波, 席裕庚. 基于几何活动轮廓模型的人脸轮廓提取方法. 中国图象图形学报, 2003, 8(5): 546~550)
- 10 Aubert G., Kornprobst P.. Mathematical Problems in Image Processing—Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. New York: Springer-Verlag, 2001
- 11 De Giorgi, Carriero M., Leaci A.. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1989, 108(3): 195~218
- 12 Forcador M.. On the variation approximation of the free-discontinuity problems in the vectorial case. Mathematical Models and Methods in Applied Science, 2001, 11(4): 663~684
- 13 Dacorogna B.. Direct Methods in the Calculus of Variations. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 14 El-Fallah A. I., Ford G. E.. On mean curvature diffusion in nonlinear image filtering. Pattern Recognition Letters, 1998, 19(5): 433~437
- 15 Sochen N., Kimmel R., Malladi R.. A geometrical framework for low level vision. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 310~318
- 16 Xiao Liang. Variational PDE and multi-fractal based image modeling theory, algorithm and application [Ph. D. dissertation]. Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 2003(in Chinese)
(肖亮. 基于变分 PDE 和多重分形的图像建模理论、算法与应用[博士学位论文]. 南京理工大学, 南京, 2003)

附录 1.

定理 2 的证明. 应用定理 1, 此时 $p=p'=2, a=1, \varphi(\nabla u)=\lambda|\nabla u|^2+|u_x \times u_y|$, 因此仅需检验 φ 是否满足定理 1 的条件. 因为 $\varphi(\nabla u)=\lambda|\nabla u|^2+|u_x \times u_y|=\lambda|\nabla u|^2+|\operatorname{adj}_2 \nabla u|$, 由定义 1, φ 是多凸的, 据引理 2, 从而是准凸的. 又因为 $\lambda|\nabla u|^2 \leq \lambda|\nabla u|^2 + |u_x \times u_y| = \lambda|\nabla u|^2 + [|u_x| |u_y| |\sin \theta|] \leq (\lambda + \frac{1}{2})|\nabla u|^2$, 所以 φ 满足定理 1 中的线性增长条件. 从而由定理 1, 定理 2 得证. 证毕.

附录 2.

定理 3 的证明. 不失一般性, 以彩色图像 $u=(u_1, u_2, u_3)$ 情形进行证明. 由变分法, 设 u 为能量泛函 $G^s(u, b)$ 的最小解, 对任意的试探函数 $v \in V_0 = \{v=(v_1, v_2, v_3) \in$

$c^1(\Omega) | v|_{\partial\Omega}=0\}$, 则 $G^s(u, b)$ 在 u 处取极值应满足 $\varphi'(\gamma)|_{\gamma=0} = \{[E_\epsilon(u+\gamma v, b)]'_\gamma\}|_{\gamma=0}=0$.

记

$$M_1(\gamma) = \int_{\Omega} \lambda b^2 [(u_{1,x} + \gamma v_{1,x})^2 + (u_{1,y} + \gamma v_{1,y})^2 + (u_{2,x} + \gamma v_{2,x})^2 + (u_{2,y} + \gamma v_{2,y})^2 + (u_{3,x} + \gamma v_{3,x})^2 + (u_{3,y} + \gamma v_{3,y})^2] dx dy,$$

$$M_2(\gamma) = \int_{\Omega} b^2 \left[\begin{array}{l} [(u_{1,x} + \gamma v_{1,x})(u_{2,y} + \gamma v_{2,y}) - (u_{2,x} + \gamma v_{2,x})(u_{1,y} + \gamma v_{1,y})]^2 + \\ [(u_{1,x} + \gamma v_{1,x})(u_{3,y} + \gamma v_{3,y}) - (u_{3,x} + \gamma v_{3,x})(u_{1,y} + \gamma v_{1,y})]^2 + \\ [(u_{2,x} + \gamma v_{2,x})(u_{3,y} + \gamma v_{3,y}) - (u_{3,x} + \gamma v_{3,x})(u_{2,y} + \gamma v_{2,y})]^2 \end{array} \right] dx dy,$$

$$M_3(\gamma) = \int_{\Omega} \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla b|^2 + \frac{(b-1)^2}{2\epsilon} \right) dx dy,$$

$$M_4(\gamma) = \beta \int_{\Omega} [(u_1 + \gamma v_1 - u_1^0)^2 + (u_2 + \gamma v_2 - u_2^0)^2 + (u_3 + \gamma v_3 - u_3^0)^2],$$

则 $\varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^4 M_i(\gamma)$, $\varphi'(\gamma)|_{\gamma=0} = \sum_{i=1}^4 M'_i(\gamma)|_{\gamma=0} = 0$. 下面分别计算 $M'_i(\gamma)|_{\gamma=0}$:

$$(i) M'_1(\gamma)|_{\gamma=0} = \int_{\Omega} 2\lambda b^2 [u_{1,x}v_{1,x} + u_{1,y}v_{1,y} + u_{2,x}v_{2,x} + u_{2,y}v_{2,y} + u_{3,x}v_{3,x} + u_{3,y}v_{3,y}] dx dy.$$

由 Green 公式及试探函数 v 的边界条件, 可得

$$M'_i(\gamma)|_{\gamma=0} = - \int_{\Omega} 2\lambda [(b^2 u_{1,x})_x v_1 + (b^2 u_{1,y})_y v_1 + (b^2 u_{2,x})_x v_2 + (b^2 u_{2,y})_y v_2 + (b^2 u_{3,x})_x v_3 + (b^2 u_{3,y})_y v_3] dx dy.$$

(ii) 易知 $M'_3(\gamma)|_{\gamma=0} = 0$.

$$(iii) M'_4(\gamma)|_{\gamma=0} = \int_{\Omega} [(u_1 - u_1^0)v_1 + (u_2 - u_2^0)v_2 + (u_3 - u_3^0)v_3].$$

(iv) 下面计算最关键的部分 $M'_2(\gamma)|_{\gamma=0}$, 采用式(15)中 $g_1, g_2 \dots, g_{12}$ 的定义, 经计算

$$M'_2(\gamma)|_{\gamma=0} =$$

$$\begin{aligned} & (g_1 v_{1,x} + g_2 v_{2,y} + g_3 v_{2,x} + g_4 v_{1,y} + g_5 v_{1,x} + g_6 v_{3,y} + \\ & \int_{\Omega} b^2 \frac{g_7 v_{3,x} + g_8 v_{1,y} + g_9 v_{2,x} + g_{10} v_{3,y} + g_{11} v_{3,x} + g_{12} v_{2,y}}{|u_x \times u_y|} dx dy. \end{aligned}$$

由 Green 公式及试探函数 v 的边界条件, 可得

$$M'_2(\gamma)|_{\gamma=0} =$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_1 \right)_x + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_4 \right)_y + \right. \\ & \left. \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_5 \right)_x + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_8 \right)_y \right] v_1 + \\ & - \int_{\Omega} \left\{ \left[\left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_2 \right)_y + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_3 \right)_x + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_9 \right)_x + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_{12} \right)_y \right] v_2 + \right. \\ & \left. \left[\left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_6 \right)_y + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_7 \right)_x + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_{10} \right)_y + \left(\frac{b^2}{|u_x \times u_y|} g_{11} \right)_x \right] v_3 \right\} dx dy. \end{aligned}$$

(v) 由 $\varphi'(\gamma)|_{\gamma=0} = \sum_{i=1}^4 M'_i(\gamma)|_{\gamma=0} = 0$, 利用变分引理, 计

算整理可得

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[b^2 (2\lambda u_{1,x} + \frac{g_1 + g_5}{|u_x \times u_y|}, 2\lambda u_{1,y} + \frac{g_4 + g_8}{|u_x \times u_y|}) \right] + \\ 2\beta(u_1 - u_1^0) = 0 \\ -\operatorname{div} \left[b^2 (2\lambda u_{2,x} + \frac{g_3 + g_9}{|u_x \times u_y|}, 2\lambda u_{2,y} + \frac{g_2 + g_{12}}{|u_x \times u_y|}) \right] + \\ 2\beta(u_2 - u_2^0) = 0 \\ -\operatorname{div} \left[b^2 (2\lambda u_{3,x} + \frac{g_7 + g_{11}}{|u_x \times u_y|}, 2\lambda u_{3,y} + \frac{g_6 + g_{10}}{|u_x \times u_y|}) \right] + \\ 2\beta(u_3 - u_3^0) = 0 \end{cases}.$$

(vii) 下面将 g_1, g_2, \dots, g_{12} 的表达式代入上式,

因为

$$\begin{aligned} g_1 + g_5 &= \begin{vmatrix} u_{2,y}, & u_{3,y} \\ u_{3,x}u_{1,y} - u_{1,x}u_{3,y}, & u_{1,x}u_{2,y} - u_{2,x}u_{1,y} \end{vmatrix}, \\ g_4 + g_8 &= - \begin{vmatrix} u_{2,x}, & u_{3,x} \\ u_{3,x}u_{1,y} - u_{1,x}u_{3,y}, & u_{1,x}u_{2,y} - u_{2,x}u_{1,y} \end{vmatrix}, \\ g_3 + g_9 &= \begin{vmatrix} u_{3,y}, & u_{1,y} \\ u_{1,x}u_{2,y} - u_{2,x}u_{1,y}, & u_{2,x}u_{3,y} - u_{3,x}u_{2,y} \end{vmatrix}, \\ g_2 + g_{12} &= - \begin{vmatrix} u_{3,x}, & u_{1,x} \\ u_{1,x}u_{2,y} - u_{2,x}u_{1,y}, & u_{2,x}u_{3,y} - u_{2,y}u_{3,x} \end{vmatrix}, \\ g_7 + g_{11} &= \begin{vmatrix} u_{1,y}, & u_{2,y} \\ u_{2,x}u_{3,y} - u_{3,x}u_{2,y}, & u_{3,x}u_{1,y} - u_{1,x}u_{3,y} \end{vmatrix}, \\ g_6 + g_{10} &= - \begin{vmatrix} u_{1,x}, & u_{2,x} \\ u_{2,x}u_{3,y} - u_{2,y}u_{3,x}, & u_{3,x}u_{1,y} - u_{1,x}u_{3,y} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$(g_1 + g_5, g_3 + g_9, g_7 + g_{11}) = \mathbf{u}_y \times (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y),$$

$$(g_4 + g_8, g_2 + g_{12}, g_6 + g_{10}) = -\mathbf{u}_x \times (\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y).$$

(viii) 综合(v)和(vii)可得能量泛函 $G^3(\mathbf{u}, b)$ 对 \mathbf{u} 欧拉-拉格朗日方程, 这是一个向量方程. 同理利用变分法, 易求得 $E_\epsilon(\mathbf{u}, b)$ 对 b 的欧拉-拉格朗日方程. 证毕.



XIAO Liang, born in 1976, Ph. D., lecturer. His current research interests include variational PDE application in image processing, image modeling, pattern recognition, motion estimation and tracking, virtual reality and system simulation.

WU Hui-Zhong, born in 1942, professor, Ph. D. supervisor. Her research interests include virtual reality, computer graphics and image theory.

WEI Zhi-Hui, born in 1963, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include variational PDE application in image processing, wavelet analysis and pattern recognition.

Background

This work was supported by the National Special Foundation of Doctoral Programs under grant No. 20020288024 (Research on Image Based Rendering Theory and Techniques for Simulated Image Synthesis), the Distinguished Young Scientist Fund of Nanjing University of Science and Technology under grant No. NJUST200401(Research on Geometrical Multi-Scale Analysis and PDE in Image Processing).

The part objectives of these projects are to study the mathematical problems arising from computer vision theory and fracture mechanics involves bulk and surface energies at the same time. In recent years much attention has been devoted to such variational problems with application to the study of image processing, computer vision, etc. Mumford-Shah model is one of the most famous models. A weak formulation of Mumford-Shah functional has been proposed by De Giorgi and Ambrosio by introducing the space of special function of bounded variation. In their approach, the unknown surface of the problem is interpreted as the discontinuity set of an unknown function. Their theory has led to many existence and regularity results. However, in current exist literatures, only few results on approximation of Mumford-Shah functional for vector-valued images.

In this work, the authors address the issue of how to generalize the Mumford-Shah functional for color(or general vectorial)images. In general, segmentation and restoration of vectorial images are not always a straightforward generalization of grey-level image cases. The most obvious way to generalized the Mumford-Shah functional to vectorial images is to used the simple channel by channel method. In this case the only coupling between the channels is through the edge set, and it causes the bad phenomena of color fluctuations along edges as a result of a lossy JPEG standard compression is a good example. Motivated by the concept of image as surface, the authors propose and analyze extension of the Mumford-Shah functional for color images.

第二届语义、知识与网格国际会议 征文通知

在中国科学院、国家自然科学基金委员会、国家重大基础研究计划“语义网格的基础理论、模型与方法”项目的支持下,第一届语义、知识与网格国际会议 1st International Conference on Semantics, Knowledge and Grid(SKG2005, <http://kg.ict.ac.cn/SKG2005>)于 2005 年 11 月 27 日~29 日在北京成功举行。这是目前由我国学者发起的第一个跨越三个热点研究领域(语义、知识与网格领域)的国际学术会议。第二届语义、知识与网格国际会议(SKG2006, <http://www.culturegrid.net/SKG2006>)将于 2006 年 10 月底在桂林举行,美国 Argonne 国家实验室著名的网格权威 I. Foster 教授和马里兰大学语义互联网权威 J. Hendler 教授担任大会主席,诸葛海研究员担任程序委员会主席,美国槟洲大学著名学者 C. Lee Giles 教授做大会特邀报告。语义、知识与网格国际会议将成为一个重要的系列国际会议。

一、征文范围(但不限于这些领域):

- | | | |
|--|--|---|
| 1. Semantic Computing | 2. Semantic Interoperability | 3. Semantic-based Virtual Organization |
| 4. Semantic Capture | 5. Automatic Semantic Annotation | 6. Semantic Web |
| 7. Semantic Web Services | 8. Theory, Model and Applications of Semantic Grid | |
| 9. Internet-based Knowledge Mining, Representation and Reasoning | | |
| 10. Theory, Model and Applications of Knowledge Grid | | 11. Distributed Knowledge Management |
| 12. Information/Knowledge/Service Integration | | 13. Ontology |
| 14. Knowledge Flow | 15. Knowledge Discovery | 16. Internet-based Knowledge Engineering and Software Engineering |
| 17. Massively Multi-agent Systems | 18. Nature-Inspired Computing | 19. Autonomous Computing |
| 20. Internet-based Intelligence and Applications | 21. P2P Computing | 22. Grid Computing |
| 23. Self-organized Intelligence | 24. Service-oriented Computing | 25. Cooperative Networking |
| 26. On e-Science; e-Culture; e-Business; e-Learning and e-Government | | |

二、重要日期:

1. 征文截止日期: 2006 年 6 月 5 日。
2. 录用通知日期: 以电子邮件通知,并在网页公布。

三、投稿及联络方式:

电子版投稿请寄: kg@ict.ac.cn