

规则摄动时模糊蕴涵算子对模糊推理的鲁棒性的影响

徐蔚鸿^{1),2)} 陈国平¹⁾ 杨静宇³⁾ 叶有培³⁾

¹⁾(吉首大学数学与计算机科学学院 吉首 416000)

²⁾(长沙理工大学计算机与通信工程学院 长沙 410077)

³⁾(南京理工大学计算机科学与技术系 南京 210094)

摘要 列举了模糊规则发生摄动的常见情形,建立了一般性的模糊推理算法对规则摄动的鲁棒性的概念;就多重、链式和多维模糊推理情形,重点研究了一般性的模糊蕴涵算子对几个重要的模糊推理算法的这种鲁棒性的影响,并分别给出了相应的充分必要条件;初步尝试了通过一定的摄动制约来改善这种鲁棒性;同时指出了很多现有的模糊蕴涵算子使得所讨论的这些推理算法拥有好的鲁棒性,此时,即使规则中的隶属度有适度的粗糙或摄动,推理仍是可行的、安全的。文中工作对模糊系统的分析、模糊蕴涵算子的选择以及规则获取过程有一定的指导意义。

关键词 模糊系统;模糊蕴涵;模糊逻辑;模糊推理;鲁棒性;摄动

中图法分类号 TP18

Influence of Fuzzy Implication Operators on Robustness of Fuzzy Reasoning with Perturbations of Rules

XU Wei-Hong^{1),2)} CHEN Guo-Ping¹⁾ YANG Jing-Yu³⁾ YE You-pei³⁾

¹⁾(College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000)

²⁾(College of Computer and Communications Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410077)

³⁾(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract The authors list several common cases when fuzzy rules may perturb slightly and propose robustness concepts of general fuzzy reasoning methods with perturbations of rules; investigate mainly impacts of general fuzzy implication operators on such robustness of various important methods, respectively for multifold fuzzy reasoning, multidimensional fuzzy reasoning as well as a chain of fuzzy reasoning, further present corresponding necessary and sufficient conditions; in addition, do a certain attempt to improve the robustness by means of perturbation restriction of rules; also point out that many fuzzy implication operators make the discussed fuzzy reasoning methods hold good robustness, therefore under such condition, the discussed fuzzy reasoning is still secure and feasible even if there are some roughness or perturbations of membership degrees of rules. The work in the paper is useful for analysis of fuzzy systems, choice of fuzzy implication operators, and guidance to fuzzy rule acquisition.

Keywords fuzzy system; fuzzy implication; fuzzy logic; fuzzy reasoning; robustness; perturbation

收稿日期:2004-02-13;修改稿收到日期:2005-05-09.本课题得到国家自然科学基金(60472060)、湖南省自然科学基金(05JJ40004)及湖南省教育厅科研基金(04C509)资助.徐蔚鸿,男,1963年生,博士,副教授,主要研究领域为智能系统、模式识别、计算机应用等. E-mail: xwhxd@163.com. 陈国平,男,1964年生,博士研究生,副教授,主要研究领域为计算数学、计算智能等. 杨静宇,男,1941年生,教授,博士生导师,主要研究领域为模式识别与智能系统、图像处理、机器人等. 叶有培,男,1945年生,教授,博士生导师,研究领域为模糊系统、算法设计和分析等.

1 引言

模糊推理算法是设计和分析模糊控制系统和模糊专家系统的理论基础和重要工具^[1~3]. 1975年, Zadeh 提出了所谓模糊关系合成算法 CRI(Compositional Rule of Inference), 由于其具有一定的逻辑学的背景, 运算也不复杂, 所以该算法已成为模糊推理的基本算法, 并不断得以推广、改进和分析^[3~7]. 选择适宜的模糊蕴涵算子是 CRI 算法的关键. 事实上, 蕴涵算子是任何一个逻辑系统的主要连结算子之一, 模糊逻辑系统的性能与所选择的模糊蕴涵算子的性质是紧密相关的. 本文“摄动”一词具有“不确定”、“不精确”或“小幅误差”之类的含义. 在构建模糊控制系统和模糊专家系统等模糊系统时我们会遇到已知规则摄动的情况:(1)通过领域专家直接给出规则库中的规则时, 由于模糊概念本质上的不确定性, 专家常要对规则中的隶属度进行微调, 最后还依然很难肯定所给的隶属度是否足够准确(尤其对人文领域更是如此);(2)若由传感器获取数据, 会由于设备精度限制和噪声等原因引起测量误差;(3)通过其它专门的模糊规则获取算法(如通过模糊神经网络或模糊聚类技术或 Rough Sets 方法)所抽取到的代表性规则和理想的规则总有一定的小幅误差;(4)把规则添加到规则库后, 设计者又要对整个库进行去粗冗以及完备性、相容性、矛盾性等方面的处理^[8], 以至于常要再次地对规则中的隶属度进行微调.(5)对于具有自适应功能的某些模糊系统在运行时常要动态更新系统的规则库^[9,10], 此时除增删规则库中的规则外, 还包括对原有某些规则涉及的隶属度微调. 这种已知规则的摄动很自然地给设计者带来三个忧虑:(1)所获取的规则涉及到的模糊集的隶属度最终是否已经准确到足够高的程度?(2)规则中的隶属度的微调或者说小幅度的摄动, 经过推理机后是否会引起对推理结果的剧烈变化?(3)从什么角度来研究这种已知规则摄动对模糊推理结果的影响?对此有些学者提出了有效的解决方案, 文献[2]提出了模糊集的最大摄动的概念, 并对每一规则的最大摄动相同的情形, 评估了 CRI 算法的最大摄动, 继而文献[11]考虑了每一规则的最大摄动可不相同的情形. 但这些工作只讨论了几种具体的蕴涵算子, 远没充分展开. 应该考虑:(1)模糊系统的类别和推理算法的类别都是多种多样的, 有必要就一般的模糊推理算法建立对已知规则摄动的鲁

棒性的概念;(2)常用的蕴涵算子有很多, 根据需要还可构造出新的形式, 有必要从本质上分析一般形式的模糊蕴涵算子对模糊推理的摄动的影响;(3)应能通过一定的规则摄动制约来控制模糊推理算法的摄动效果, 因为这种规则摄动制约条件正好能反过来对模糊规则的采集过程进行警示. 这些正是本文将做的主要工作.

2 相关定义和引理

2.1 相关定义

设 $\Delta A(x) \in [-1, 1]$, $(A + \Delta A)(x) = A(x) + \Delta A(x)$, 但当 $A(x) + \Delta A(x) > 1$ 时, 令 $(A + \Delta A)(x) = 1$, $A(x) + \Delta A(x) < 0$ 时, 令 $(A + \Delta A)(x) = 0$. 其余类似情形可类似定义, 此处略.

定义 1^[3]. 设 $F(X)$ 是论域 X 上的模糊子集的全体, 设 $A^*, A \in F(X)$, 称 $W(A^*, A) = \bigvee_{x \in X} |A^*(x) - A(x)|$ 为 A^* 与 A 之间的最大摄动.

由定义 1 显然有 $W(A^*, A) = W(A, A^*)$.

定义 2. 当规则 $r: A \rightarrow B$ 摄动后变为 $A + \Delta A \rightarrow B + \Delta B$, 且 $W(A + \Delta A, A) \vee W(B + \Delta B, B) \leq \epsilon$ 时, 称规则 r 发生了最大 ϵ 摄动.

设客观世界中目标规则(或理想的规则)为 $r': A' \rightarrow B'$, 对其用某种算法进行捕获得到的规则为 $r: A \rightarrow B$, 则显然这两条规则互为对方发生摄动的结果.

在开发实际系统时, 我们自然希望所选用的推理算法满足因规则摄动而引起的输出摄动与规则最大摄动相差一个常数倍, 而且这种特性应与规则库本身的构成不相关. 本文重点研究模糊推理算法这种好的鲁棒性, 为了集中考虑规则摄动对模糊系统的影响, 所以本文研究时特意不让输入发生摄动, 尽管这在实际中一般会发生. 这些思想细化成以下定义.

定义 3. 在多重模糊推理情形, 设 $base: \{A_k \rightarrow B_k, A_k \in F(X), B_k \in F(Y), k=1, 2, \dots, L\}$ 是任意给定的规则库, 当各规则 $A_k \rightarrow B_k$ 发生前件最大 ϵ_k 摄动和后件最大 β_k 摄动时, $base$ 变成新规则库 new_base , f 是一种多重模糊推理算法, 存在常数 $h > 0$, 使得对一切输入 $A^* \in F(X)$, 基于原规则库得到的输出 $f(A^*, base) \in F(Y)$ 和基于摄动后的规则库得到的输出 $f(A^*, new_base) \in F(Y)$ 满足 $W(f(A^*, base), f(A^*, new_base)) \leq h \bigvee_{k=1}^n (\epsilon_k \vee \beta_k)$, 则称算法 f 对规

则最大摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大.

定义 4. 在链式模糊推理情形, 设任意已知规则链 $chain: A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, \dots, A_{i-1} \rightarrow A_i, \dots, A_{T-1} \rightarrow A_T$, 其中 $A_i \in F(X_i), i=1, 2, \dots, T$, 对任意输入 $A_1^* \in F(X_1)$, 从前至后, 依次把由前一规则得到的推理结果作为基于后一规则的推理的输入, 最后得到的输出结果记为 $f(A_1^*, chain) \in F(X_T)$, f 是一种链式模糊推理算法, 存在常数 $h > 0$, 当已知规则链中各模糊集发生最大 ϵ_i 摄动, 则 $chain$ 变成新规则链 new_chain , 由此得到的推理结果 $f(A_1^*, new_chain) \in F(X_T)$ 满足 $W(f(A_1^*, chain), f(A_1^*, new_chain)) \leq h \bigvee_{i=1}^T \epsilon_i$, 则称算法 f 对规则最大摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大.

定义 5. 在多维模糊推理情形, 对任意给定的规则 $r: x_1 \text{ is } A_1 \text{ 且 } x_2 \text{ is } A_2 \text{ 且 } \dots \text{ 且 } x_n \text{ is } A_L \rightarrow y \text{ is } B$, 每个 A_i 发生任意最大 ϵ_i 摄动, B 发生任意最大 β 摄动后, 规则 r 变为规则 new_r , f 是一种链式模糊推理算法, 如果存在常数 $h > 0$ 使得, 对任意输入 $A^* = (A_1^*, A_2^*, \dots, A_L^*)$, 基于规则 r 得到的输出 $f(A^*, r) \in F(Y)$ 和基于新规则 new_r 得到的输出 $f(A^*, new_r) \in F(Y)$ 满足 $W(f(A^*, r), f(A^*, new_r)) \leq h (\bigvee_{i=1}^L \epsilon_i \vee \beta)$, 则称算法 f 对规则最大摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大.

需要强调的是: 对定义 3、定义 4 和定义 5 中的规则、规则数 (≥ 1) 以及规则中涉及的模糊集合都是任意的; 定义中的“全局”一词意味着输入 A^* 也是任意模糊集(不必是正规的或凸的).

2.2 模糊蕴涵算子与 Lipschitz 条件

源于经典逻辑学的模糊蕴涵算子, 建立了模糊逻辑学和经典逻辑学之间的关联, 并从其语义与语构以及在模糊推理中的应用等方面得到大量研究^[12~14]. 众多学者从不同的应用背景出发提出了各种各样的蕴涵算子, 其选择应根据实际问题而定.

数学分析中 Lipschitz 条件是指: 设 $g(a, b)$ 是一个二元函数, D 为定义域, 若存在常数 $L > 0$ 使得 $\forall X_1 = (a_1, b_1), X_2 = (a_2, b_2) \in D$, 不等式 $|g(X_1) - g(X_2)| \leq L \|X_1 - X_2\|$ 成立, 则称 $g(a, b)$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件, 其中 $\|\cdot\|$ 是范数. 它揭示了函数值的变化与自变量的变化之间的一种关系.

本文取欧几里德范数, 并使用 Lipschitz 条件的另一形式: 设 $g(a, b)$ 是一个二元函数, D 为定义域, 若存在常数 $h > 0$ 使得 $\forall (a, b), (a + \Delta a, b + \Delta b) \in D$, $|g(a + \Delta a, b + \Delta b) - g(a, b)| \leq h(|\Delta a| \vee |\Delta b|)$

成立, 则称 $g(a, b)$ 在 D 上关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件.

有趣的是不难直接验证(常要应用引理 1 和引理 2)很多常用的蕴涵算子^[14, 15] $R(a, b) \in [0, 1]$ 满足 Lipschitz 条件. 如关于 a 和 b 满足 Lipschitz 条件的蕴涵算子 $R(a, b)$:

$$\begin{aligned} R_a(a, b) &= 1 \wedge (1 - a + b), R_b(a, b) = (1 - a) \vee b, \\ R_c(a, b) &= a \wedge b, R_m(a, b) = (a \wedge b) \vee (1 - a), \\ R_p(a, b) &= ab, R_*(a, b) = 1 - a + ab, \\ R_\#(a, b) &= [1 - (a \vee b)] \vee [a \wedge (1 - a)] \vee \\ &\quad [b \wedge (1 - b)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{st}(a, b) &= (1 - a) \vee b, R_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1), \\ R_{mc}(a, b) &= R_m(a, b) \wedge (b \vee (1 - b)). \end{aligned}$$

确实存在有蕴涵算子 $R(a, b)$ 不满足 Lipschitz 条件, 如 $R_s(a, b) = \begin{cases} 1, & a \leq b; \\ 0, & a > b. \end{cases}$, 只需注意到

$$\left| \frac{R(0.5, 0.5 - \Delta b) - R(0.5, 0.5)}{\Delta b} \right| = \left| \frac{1}{\Delta b} \right| \rightarrow +\infty, \quad \Delta b \rightarrow 0^+.$$

2.3 相关引理

引理 1.

- (1) $|c_1 \wedge d - c_2 \wedge d| \leq |c_1 - c_2|$;
- (2) $|c_1 \vee d - c_2 \vee d| \leq |c_1 - c_2|$.

证明. 显然, 证略.

引理 2.

(1) 设 I 为非空有限指标集, 则 $|\bigvee_{i \in I} a'_i - \bigvee_{i \in I} a_i| \leq \bigvee_{i \in I} |a'_i - a_i|$.

(2) 设 I 为非空有限指标集, $\delta > 0$, 若 $\forall i \in I$, $|a'_i - a_i| \leq \delta$, 则 $|\bigwedge_{i \in I} a'_i - \bigwedge_{i \in I} a_i| \leq \delta$.

$$(3) |\bigwedge_{i \in I} a'_i - \bigwedge_{i \in I} a_i| \leq \bigvee_{i \in I} |a'_i - a_i|.$$

证明.

(1) 令 $i_0, i_1 \in I$ 使 $a'_{i_0} = \bigvee_{i \in I} a'_i$ 和 $a_{i_1} = \bigvee_{i \in I} a_i$ 成立, 故 $a_{i_1} \geq a_i, \forall i \in I$, 不妨设 $a'_{i_0} \geq a_{i_1}$, 则 $|\bigvee_{i \in I} a'_i - \bigvee_{i \in I} a_i| = a'_{i_0} - a_{i_1} \leq a'_{i_0} - a_{i_0} = |a'_{i_0} - a_{i_0}| \leq \bigvee_{i \in I} |a'_i - a_i|$.

(2) 令 $i_0, i_1 \in I$ 使 $a'_{i_0} = \bigwedge_{i \in I} a'_i$ 和 $a_{i_1} = \bigwedge_{i \in I} a_i$ 成立, $\forall i \in I, |a'_i - a_i| \leq \delta$, 即 $a_i - \delta \leq a'_i \leq a_i + \delta$, 故 $a_{i_1} - \delta = \bigwedge_{i \in I} (a_i - \delta) \leq \bigwedge_{i \in I} a'_i \leq \bigwedge_{i \in I} (a_i + \delta) = a_{i_1} + \delta$, 故 $|a'_{i_0} - a_{i_1}| \leq \delta$.

(3) 的证明略.

证毕.

3 多重模糊推理算法对规则摄动的鲁棒性的分析

设 $A \rightarrow B$ 是已知规则, $R(a, b)$ 是选定的蕴涵算

子, A^* 是输入, B^* 是输出, 则 f_{CRI} 算法为

$$B^* = f_{\text{CRI}}(A^*) = A^* \circ R(A, B),$$

即

$$\forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A(x), B(y))],$$

其中 $A, A^* \in F(X)$, $B, B^* \in F(Y)$.

多重模糊推理情形: 设 $A_k \rightarrow B_k, k=1, 2, \dots, L$ 是一组已知规则, 给出输入 A^* , 求输出 B^* , 其中 $A_k, A^* \in F(X)$, $B_k, B^* \in F(Y), k=1, 2, \dots, L$.

模糊推理有下述 4 种重要的算法^[13, 17~18]都是基于基本情形的 CRI 算法.

Mamdani 算法. $B^* = A^* \circ \bigcup_{k=1}^L R(A_k, B_k),$

$$\forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge \bigvee_{k=1}^L R(A_k(x), B_k(y))].$$

注. Mamdani 曾用蕴涵算子 R_c 将此法用于模糊控制中.

L. A. Zadeh 算法. $B^* = A^* \circ \bigcap_{k=1}^L R(A_k, B_k),$

$$\forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge \bigwedge_{k=1}^L R(A_k(x), B_k(y))].$$

注. Zadeh 将蕴涵 R_a 用于此法.

Dubois-Prade 算法. $B^* = \bigcap_{k=1}^L A^* \circ R(A_k, B_k)$, 即

$$\forall y \in Y, B^*(y) = \bigwedge_{k=1}^L \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A_k(x), B_k(y))].$$

陈永义算法. $B^* = \bigcup_{k=1}^L A^* \circ R(A_k, B_k)$, 即

$$\forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{k=1}^L \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A_k(x), B_k(y))].$$

注. 陈永义等将蕴涵算子 R_c 用于此法, 称之为“特征展开法”, 其与 Mamdani 算法是无条件等价.

在多重模糊推理算法中, 上述 4 种算法与 Takagi-Sugeno 模糊逻辑系统及高斯型模糊逻辑系统中采用的推理算法相比, 有一个突出的优点就是它有很明显的逻辑学背景, 它们输入输出都是模糊集, 便于量化和利用专家语言信息(如在模糊专家系统中).

定理 1. 对于多重模糊推理, Mamdani 算法、L. A. Zadeh 算法、Dubois-Prade 算法和陈永义算法都满足: 对规则最大摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大的充分必要条件为选定的 $R(a, b)$ 关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件.

证明. 设任意给定规则库 $base = \{A_k \rightarrow B_k, k=1, 2, \dots, L\}$, 当各规则 $A_k \rightarrow B_k$ 发生前件最大 ϵ_k 摄动和后件最大 β_k 摄动而变成的新规则从形式上简记为 $A_k + \epsilon_k \rightarrow B_k + \beta_k$.

(1) 对于 Mamdani 算法:

充分性(以下推导要用到引理 1 和引理 2).

$$\begin{aligned} & \forall y \in Y, |f_M(A^*, base)(y) - f_M(A^*, new_base)(y)| \\ &= |\bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge \bigvee_{k=1}^L R(A_k(x), B_k(y))] - \\ & \quad \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge \bigvee_{k=1}^L R((A_k + \epsilon_k)(x), (B_k + \beta_k)(y))]| \\ &\leq \bigvee_{x \in X} |\bigvee_{k=1}^L R(A_k(x), B_k(y)) - \\ & \quad \bigvee_{k=1}^L R((A_k + \epsilon_k)(x), (B_k + \beta_k)(y))| \\ &\leq \bigvee_{x \in X} \bigvee_{k=1}^L |R(A_k(x), B_k(y)) - \\ & \quad R((A_k + \epsilon_k)(x), (B_k + \beta_k)(y))| \\ &\leq \bigvee_{x \in X} \bigvee_{k=1}^L h(|A_k(x) - (A_k + \epsilon_k)(x)| \vee \\ & \quad |B_k(y) - (B_k + \beta_k)(y)|) \end{aligned}$$

(由 $R(a, b)$ 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件)

$$\leq \bigvee_{x \in X} \bigvee_{k=1}^L h(\epsilon_k \vee \beta_k) = h \bigvee_{k=1}^L (\epsilon_k \vee \beta_k).$$

故 $W(f_M(A^*, base), f_M(A^*, new_base))$

$$\begin{aligned} &= \bigvee_{y \in Y} |f_M(A^*, base)(y) - f_M(A^*, new_base)(y)| \\ &\leq h \bigvee_{k=1}^L (\epsilon_k \vee \beta_k). \end{aligned}$$

必要性. 由规则库的任意性, 取规则库的规则条数为 1, 该规则记为 $A \rightarrow B$.

对任意固定的 $a, b \in [0, 1]$, 由规则 $A \rightarrow B$ 的任意性, 取 $A(x) \equiv a, B(y) \equiv b, x \in X, y \in Y$. 并设规则发生前件最大 ϵ 摄动和后件最大 β 摄动, 摄动后的规则形式上简记为 $A + \epsilon \rightarrow B + \beta$. 根据定义 3, 因为有正常数 h 使得

$$\begin{aligned} & W(f_M(A^*, A \rightarrow B), f_M(A^*, A + \epsilon \rightarrow B + \beta)) \\ &= \bigvee_{y \in Y} |f_M(A^*, A \rightarrow B)(y) - \\ & \quad f_M(A^*, A + \epsilon \rightarrow B + \beta)(y)| \\ &\leq h(\epsilon \vee \beta), \end{aligned}$$

即 $\forall y \in Y$,

$$\begin{aligned} & |f_M(A^*, A \rightarrow B)(y) - f_M(A^*, A + \epsilon \rightarrow B + \beta)(y)| \\ &= |\bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A(x), B(y))] - \\ & \quad \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R((A + \epsilon)(x), (B + \beta)(y))]| \\ &\leq h(\epsilon \vee \beta). \end{aligned}$$

由规则 $A \rightarrow B$ 的定义, 有 $\forall y \in Y$,

$$\begin{aligned} & |\bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(a, b)] - \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(a + \epsilon, b + \beta)]| \\ &\leq h(\epsilon \vee \beta). \end{aligned}$$

又由输入 $A^* \in F(X)$ 的任意性, 在不同的情形赋以 A^* 不同的特殊值,

① $R(a, b) \geq R(a + \epsilon, b + \beta)$ 时, 取 $A^*(x) \equiv R(a,$

$b), x \in X$, 故有 $\forall y \in Y, |\bigvee_{x \in X} [R(a, b) \wedge R(a, b)] - \bigvee_{x \in X} [R(a, b) \wedge R(a+\epsilon, b+\beta)]| \leq h(\epsilon \vee \beta)$, 有 $|R(a, b) - R(a, b) \wedge R(a+\epsilon, b+\beta)| \leq h(\epsilon \vee \beta)$, 由限制, 即有 $|R(a, b) - R(a+\epsilon, b+\beta)| \leq h(\epsilon \vee \beta)$;

②当 $R(a, b) \leq R(a+\epsilon, b+\beta)$ 时, 取 $A^*(x) \equiv R(a+\epsilon, b+\beta), x \in X$, 故有 $\forall y \in Y, |\bigvee_{x \in X} [R(a+\epsilon, b+\beta) \wedge R(a, b)] - \bigvee_{x \in X} [R(a+\epsilon, b+\beta) \wedge R(a+\epsilon, b+\beta)]| \leq h(\epsilon \vee \beta)$, 即有 $|R(a+\epsilon, b+\beta) \wedge R(a, b) - R(a+\epsilon, b+\beta)| \leq h(\epsilon \vee \beta)$, 由限制, 即有 $|R(a, b) - R(a+\epsilon, b+\beta)| \leq h(\epsilon \vee \beta)$; 故由 $a, b \in [0, 1]$ 的任意性, $|R(a, b) - R(a+\epsilon, b+\beta)| \leq h(\epsilon \vee \beta)$ 总成立, 所以由 a, b 和 ϵ, β 的任意性, 知 $R(a, b)$ 关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件.

(2) 对于 L. A. Zadeh 算法、Dubois-Prade 算法和陈永义算法的证明与(1)的证明类似, 此处略.

证毕.

定理 1 说明了一般性的模糊蕴涵算子对上述 4 个重要的模糊推理算法的规则摄动的鲁棒性的影响, 并把这些算法对规则最大摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大的判定问题简单地归结为所采用的模糊蕴涵算子是否满足 Lipschitz 条件这样一个问题. 实际当中的模糊蕴涵算子一般不复杂, 对于从模糊逻辑(甚至是经典逻辑)衍生出来的那些包含有 \vee 和 \wedge 运算的模糊蕴涵算子来说, 偏导数可能不存在或不方便求出, 此时对 Lipschitz 条件的判定, 本文第 2 节提供的引理很有可能用得着, 如果模糊蕴涵算子能方便求偏导数, 则可用偏导数来判定. 特别有趣的是, 该影响与规则的条数无关, 常数 h 能起到本文所述的鲁棒性的调控作用, 显然, 当 $h < 1$ 时能一定程度地减少规则摄动的负作用, 这也暗示着, 此时所获取的模糊规则有适度的误差是安全的可行的, 以上所述说明该定理具有实际可操作性, 后文的定理 2 和定理 3 类似.

一个不满足 Lipschitz 条件的蕴涵算子对本文讨论的这种鲁棒性到底有什么副作用呢? 我们用拥有很多其它好性质的 $R_s(a, b)^{[14, 15]}$ 进行示意.

例 1. 设一个实际的模糊系统要进行简单情形的模糊推理(这是多重、多维和链式模糊推理的特例), 假定论域 $X=Y$, 现实的规则为 $real_r: A \rightarrow A$, 其中 $A(x), x \in X$ 不为常数, 对其采集后得到的规则为 $obtained_r: A' \rightarrow A$ (规则前件没测准确), 且满足 $\epsilon > A'(x) - A(x) > 0, \forall x \in X$, 使用带 $R_s(a, b)$ 的 f_{CRI} 算法进行推理, 则在输入 $A_0^* \in F(X)$ 处, f_{CRI} 的实

际输出 $B_0^* \in F(Y)$ 变得面目全非而毫无参考价值, 其中 $A_0^*(x)$ 满足 $A_0^*(x) \geq R(A(x), \bigwedge_{y \in Y} A(y)), \forall x \in X$, 例如, $A_0^*(x) = 1, \forall x \in X$.

这是因为: 令 $E = \{y_0 | A(y_0) = \bigwedge_{y \in Y} A(y)\}$ 为 $A(y)$ 的最小值点集合. 有不等式 $(A+\epsilon)(x) > A(y)$ 成立, 其中, $\forall y \in E, \forall x \in X$. 又由 $R_s(a, b)$ 关于 a 的单条递减性, 有 $A_0^*(x) \geq R(A(x), \bigwedge_{y \in Y} A(y)) \geq R(A'(x), \bigwedge_{y \in Y} A(y))$, 故 $\forall y \in E \subset Y$,

$$\begin{aligned} & |f_{\text{CRI}}(A_0^*, real_r)(y) - f_{\text{CRI}}(A_0^*, obtained_r)(y)| \\ &= |\bigvee_{x \in X} (A_0^*(x) \wedge R_s(A(x), A(y))) - \\ &\quad \bigvee_{x \in X} (A_0^*(x) \wedge R_s(A'(x), A(y)))| \\ &= |\bigvee_{x \in X} R_s(A(x), A(y)) - \bigvee_{x \in X} R_s(A'(x), A(y))| \\ &= |\bigvee_{\{(x=y) \cup \{x \neq y\}}} R_s(A(x), A(y)) - 0| \\ &= |1 - 0| = 1, \end{aligned}$$

且此时的

$$W(f_{\text{CRI}}(A_0^*, real_r), f_{\text{CRI}}(A_0^*, obtained_r)) = 1.$$

4 链式和多维模糊推理算法对规则摄动的鲁棒性分析

4.1 链式模糊推理情形

在模糊专家系统中, 一个基本的处理就是进行链式推理. 链式推理也称多级推理, 当规则条数为 2 时又称为三段论推理^[14, 15]. 问题是, 当已知规则链中每一规则发生小幅度的摄动时, 会对推理结果产生怎样的累积影响呢? 为此, 我们有以下结论.

定理 2. 在链式模糊推理中, 若采用模糊推理关系合成算法 f_{CRI} 进行推理, 则算法 f_{CRI} 对规则摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大的充分必要条件为选定的 $R(a, b)$ 关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件.

证明. 充分性. 我们先对链的长度为 2 的情形进行具体的证明. 设任意已知规则链 $chain: A \rightarrow B, B \rightarrow C$ 进行推理, 其中 $A \in F(X), B \in F(Y), C \in F(Z)$, 规则链中 A, B, C 分别发生最大 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 摄动, 摄动后的规则链 new_chain 记为 $A + \epsilon_1 \rightarrow B + \epsilon_2, B + \epsilon_2 \rightarrow C + \epsilon_3$, 则

$$\begin{aligned} & \forall A^* \in F(X), \\ & \forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A(x), B(y))], \\ & \text{故 } \forall z \in Z, C^*(z) = \bigvee_{y \in Y} [B^*(y) \wedge R(B(y), C(z))] \\ &= \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A(x), \\ &\quad B(y)) \wedge R(B(y), C(z))]. \end{aligned}$$

同理对摄动后的规则链进行推理, 并应用引理 1 和引理 2, 能得到 $\forall A^* \in F(X), \forall z \in Z$,

$$\begin{aligned} & \forall z \in Z, |C_1^*(z) - C^*(z)| \\ &= |\bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R((A+\varepsilon_1)(x), (B+\varepsilon_2)(y)) \wedge \\ & \quad R((B+\varepsilon_2)(y), (C+\varepsilon_3)(z))] - \\ & \quad \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge R(A(x), B(y)) \wedge R(B(y), C(z))]| \\ &\leq \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} |[R((A+\varepsilon_1)(x), (B+\varepsilon_2)(y)) \wedge \\ & \quad R((B+\varepsilon_2)(y), (C+\varepsilon_3)(z))] - \\ & \quad [R(A(x), B(y)) \wedge R(B(y), C(z))]|. \end{aligned}$$

因为选定的 $R(a, b)$ 关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件, $\forall x, y, z$,

$$\begin{aligned} & |R((A+\varepsilon_1)(x), (B+\varepsilon_2)(y)) - R(A(x), B(y))| \\ & \leq h(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2), \\ & |R((B+\varepsilon_2)(y), (C+\varepsilon_3)(z)) - R(B(y), C(z))| \\ & \leq h(\varepsilon_2 \vee \varepsilon_3). \end{aligned}$$

故 $\forall x, y, z$,

$$\begin{aligned} & |[R((A+\varepsilon_1)(x), (B+\varepsilon_2)(y)) \wedge \\ & \quad R((B+\varepsilon_2)(y), (C+\varepsilon_3)(z))] - \\ & \quad [R(A(x), B(y)) \wedge R(B(y), C(z))]| \\ & \leq h(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2) \vee h(\varepsilon_2 \vee \varepsilon_3) \\ & = h(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2 \vee \varepsilon_3). \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} & \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} |[R((A+\varepsilon_1)(x), (B+\varepsilon_2)(y)) \wedge \\ & \quad R((B+\varepsilon_2)(y), (C+\varepsilon_3)(z))] - \\ & \quad [R(A(x), B(y)) \wedge R(B(y), C(z))]| \\ & \leq h(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2 \vee \varepsilon_3), \end{aligned}$$

故有 $\forall z \in Z, |C_1^*(z) - C^*(z)| \leq h \bigvee_{i=1}^3 \varepsilon_i$,

即 $W(C_1^*, C^*) \leq h \bigvee_{i=1}^3 \varepsilon_i$.

至于链的长度为 1 以及大于 2 的情形可仿照长度等于 2 的情形而直接证明. 其充分性也可用数学归纳法证明.

必要性. 根据定义 4, 取链的长度为 1, 其进一步的证明类似于定理 1 的 Mamdani 算法情形下的必要性证明. 证毕.

在模糊专家系统和模糊决策支持系统中可能存在长的推理链条, 我们害怕因为链条的长度(规则数目)太大而累积某种类别的误差, 这也是模糊逻辑与经典逻辑的不同之处, 如果定理 2 的条件满足, 链条的长度不会导致放大规则的摄动误差, 这在实际系统中是一个非常好的性质.

4.2 多维模糊推理情形

对于多维情形的模糊推理, 规则 $r: x_1 \text{ is } A_1$ 且

$x_2 \text{ is } A_2 \text{ 且 } \dots \text{ 且 } x_n \text{ is } A_L \rightarrow y \text{ is } B$ 常被转化为简单的规则形式 $A \rightarrow B$, 其中的“且”可给出用不同算子进行解释. Zadeh 的转化算法是: 令 $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_L, A(x) = \bigwedge_{k=1}^L A_k(x_k), x \in X$. 由规则 r 形成一条新规则 $A \rightarrow B$. 当给定输入 $A^*(A^*(x_1, x_2, \dots, x_L) = \bigwedge_{k=1}^L A_k^*(x_k))$, 相应的输出 $B^* = f_{\text{CRI}}(A^*, r) = A^* \circ R(A, B)$, 即 $\forall y \in Y, B^*(y) = \bigvee_{(x_1, x_2, \dots, x_L) \in X} [A^*(x_1, x_2, \dots, x_L) \wedge R(\bigwedge_{k=1}^L A_k(x_k), B(y))]$. 这就是多维情形下 Zadeh 的 CRI 算法, 本文仍记为 f_{CRI} .

定理 3. 采用上述的 f_{CRI} 多维模糊推理算法, 则算法 f_{CRI} 对各规则摄动幅度在系数为 h 的条件下全局不放大的充分必要条件为选定的 $R(a, b)$ 关于 a 和 b 满足系数为 h 的 Lipschitz 条件.

证明. 与定理 1 和定理 2 的证明类似, 略.

证毕.

定理 3 说明, 只要保持规则中的各模糊集的最大摄动误差不变, 则推理算法的输出摄动误差不会改变系数 h , 且与规则中模糊集的个数无关, 这也是实际系统所期望的好性质.

实际设计模糊控制系统和模糊专家系统之类的模糊系统时, 模糊蕴涵算子对模糊推理算法的规则摄动的鲁棒性的影响也应为一个考虑的因素. 问题是, 诸多因素折衷后, 也许会牺牲本文所指出的这种好的鲁棒性. 就定理 1、定理 2 和定理 3 所讨论的推理算法而论, 当所选择的模糊蕴涵算子不满足 Lipschitz 条件时, 如果我们在规则的获取过程进行适当的摄动制约, 仍有可能保证对任意的输入, 不是并列推理算法产生的输出摄动幅度和规则摄动幅度在一个数量级上. 我们仍以 $R_s(a, b)$ 进行示意.

例 2. 设一个实际的模糊系统要进行简单情形的模糊推理, 现实的规则为 $real_r: A \rightarrow B$, 对其采集后得到的规则为 $obtained_r: A' \rightarrow B'$, 采集过程中保证不等关系不变(即 $A(x) > B(y) \Leftrightarrow A'(x) > B'(y)$), 使用带 $R_s(a, b)$ 的 f_{CRI} 算法进行推理, 则对任意输入 $A^* \in F(X)$ 有

$$\begin{aligned} & W(f_{\text{CRI}}(A^*, real_r), f_{\text{CRI}}(A^*, obtained_r)) \\ & \leq h(W(A, A') \vee W(B, B')), \end{aligned}$$

其中 $A, A' \in F(X), B, B' \in F(Y), h$ 为正常数.这是因为 $\forall y \in Y,$

$$\begin{aligned} & |f_{\text{CRI}}(A^*, real_r)(y) - f_{\text{CRI}}(A^*, obtained_r)(y)| \\ &= |\bigvee_{x \in X} (A^*(x) \wedge R_s(A(x), B(y))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigvee_{x \in X} (A^*(x) \wedge R_s(A'(x), B'(y))) \\
 & \leq \bigvee_{x \in X} |A^*(x) \wedge R_s(A(x), B(y)) - \\
 & \quad A^*(x) \wedge R_s(A'(x), B'(y))| \\
 & \leq \bigvee_{x \in X} |R_s(A(x), B(y)) - R_s(A'(x), B'(y))| \\
 & \leq \bigvee_{M_1 \cup M_2} |R_s(A(x), B(y)) - R_s(A'(x), B'(y))|, \\
 & = \bigvee_{M_1} |R_s(A(x), B(y)) - R_s(A'(x), B'(y))| \vee \\
 & \quad \bigvee_{M_2} |R_s(A(x), B(y)) - R_s(A'(x), B'(y))| \\
 & = |0 - 0| \vee |1 - 1| = 0,
 \end{aligned}$$

其中 $M_1 = \{x \mid A(x) > B(y), x \in X\}$,

$M_2 = \{x \mid A(x) \leq B(y), x \in X\}$.

且此时的

$$\begin{aligned}
 W(f_{\text{CRI}}(A^*, \text{real_r}), f_{\text{CRI}}(A^*, \text{obtained_r})) &= 0 \\
 \leq h(W(A, A') \vee W(B, B')) &.
 \end{aligned}$$

有趣的是, 此时居然 $W(f_{\text{CRI}}(A^*, \text{real_r}), f_{\text{CRI}}(A^*, \text{obtained_r})) = 0$! 这意味着在例 2 的规则摄动制约下, 带 $R_s(a, b)$ 的 f_{CRI} 算法能消去规则摄动的副作用.

5 结束语

模糊推理算法对规则摄动的鲁棒性应视为模糊推理算法本身的一个非常重要的属性. 若推理算法的这种鲁棒性不好, 则隶属度的微小误差, 都可能对某些输入产生面目全非的输出; 若这种鲁棒性好, 则规则中的隶属度出现适度的粗糙、微调或摄动都是可行的安全的, 这样可以减轻领域专家的压力或降低数据采集设备的要求. 如果我们要开发一个使用本文所论的推理算法的通用模糊系统, 涉及的规则由用户自己填入或修改, 由于对开发者来说, 填入的规则的构成是不可知的, 这时系统宜选用满足 Lipschitz 条件的模糊蕴涵算子, 最好系数 $h \leq 1$. 本问题今后进一步的研究方向如下: 对其它各类模糊推理算法, (1)评估推理算法对规则摄动的这种鲁棒性; (2)通过这种鲁棒性的分析寻找规则摄动的某些制约条件反过来对规则的获取过程提供警示; (3)对给定的规则, 圈定出受规则摄动影响大的推理系统的输入的范围.

致 谢 对审稿专家提出的宝贵意见和建议, 对清华大学智能技术与系统国家重点实验室应明生教授的指导, 作者表示衷心感谢!

参 考 文 献

- Cai Zi-Xing. Typical structures of fuzzy control. Industrial Control Computer, 1997, (3): 1~4(in Chinese)
(蔡自兴. 模糊控制的典型结构. 工业控制计算机, 1997, (3): 1~4)
- Ying Ming-Sheng. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 625~629
- Wang G. J.. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Science, 1999, 177(1): 47~88
- Wang Guo-Jun. Triple-implication algorithm for fuzzy inference. Science in China, Series E, 1999, 29(1): 45~53(in Chinese)
(王国俊. 模糊推理的全蕴含三 I 算法. 中国科学(E 辑), 1999, 29(1): 45~53)
- Xu Wei-Hong, Ye You-Pei, Yang Jing-Yu. Research on the properties of compositional rule of fuzzy inference, with parameters. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(4): 178~184(in Chinese)
(徐蔚鸿, 叶有培, 杨静宇. 带参数的模糊推理合成法则的性质研究. 模式识别与人工智能, 2002, 15(4): 397~402)
- Xu Wei-Hong, Ye You-Pei, Yang Jing-Yu. Two new neuron models based on T/S norms and their applications. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(9): 1123~1129(in Chinese)
(徐蔚鸿, 叶有培, 杨静宇. 两类新的基于 T/S 范数的模糊神经元模型及其应用. 计算机学报, 2003, 26(9): 1123~1129)
- Li Shao-Kuan, Zhu Kun-Ping. Global stability of fuzzy control systems. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(5): 793~796(in Chinese)
(李绍宽, 朱坤平. 模糊控制系统的全局稳定性. 自动化学报, 2002, 28(5): 793~796)
- Leung Yee, Zhang Wen-Xiu. The degree of the consistency on fuzzy rules and the method to delete rules. Chinese Journal of Computers, 1997, 20(10): 949~952(in Chinese)
(梁 怡, 张文修. 模糊规则的谐调度与矛盾规则的排除算法. 计算机学报, 1997, 20(10): 949~952)
- Chen Long, Wang Fei-Yue. A new neuro-fuzzy system and its learning algorithm. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2003, 16(2): 178~184(in Chinese)
(陈 龙, 王飞跃. 一种新的神经模糊系统及其学习算法. 模式识别与人工智能, 2003, 16(2): 178~184)
- Wang L. X.. Adaptive Fuzzy Systems and Control. Prentice-Hill Press, 1994
- Yuan He-Jun, Li Jun. The perturbation of various fuzzy reasoning. Fuzzy Systems and Mathematics, 2001, 15(4): 8~13(in Chinese)
(袁和军, 李 骏. 模糊推理的摄动性. 模糊系统与数学, 2001, 15(4): 8~13)
- Ying Ming-Sheng. Implication operators in fuzzy logic. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(1): 88~91
- Cheng Xiao-Chun, Liu Xu-Hua. Handling uncertain knowledge

- in fuzzy logic(I; II). Chinese Journal of Computers, 1996, 19(12): 921~940(in Chinese)
- (程晓春, 刘叙华. 基于模糊逻辑的不确定知识处理(I: 模糊蕴涵的合理性; II: 模糊逻辑的 TABLEAU 推理). 计算机学报, 1996, 19(12): 921~940)
- 14 Wang Shi-Tong. Neuro-Fuzzy Systems and Their Applications. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1998(in Chinese)
- (王士同. 神经模糊系统及其应用. 北京: 北京航空航天大学, 1998)
- 15 Masaharu MIZUMOTO. Comparision of fuzzy reasoning methods. Fuzzy Sets and Systems, 1982, (8): 253~283
- 16 Dubois D., Prade H.. Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited. Cybernetics and Systems, 1984, (15): 293~331
- 17 Buckley J., Hayashi Y.. Can approximate reasoning be consistent? Fuzzy Sets and Systems, 1994, 65(1): 13~18



XU Wei-Hong, born in 1963, Ph.D., associative professor. His research interests include intelligent systems, pattern recognition, and computer application.

CHEM Guo-Ping, born in 1964, Ph. D. candidate, asso-

ciative professor. His research interests include computational mathematics and computational intelligence.

YANG Jing-Yu, born in 1941, professor and Ph. D. supervisor. His research interests include artificial intelligence, pattern recognition and image processing.

YE You-Pei, born in 1945, professor and Ph. D. supervisor. His research interests include fuzzy systems, algorithm design and analysis.

Background

For some input, small perturbations of known rules may cause big oscillation of corresponding output of fuzzy reasoning. So it is worth investigating robustness of fuzzy reasoning to perturbations of known rules. The aim of the research project is to estimate and control the influence of perturbations of rules on fuzzy reasoning, further apply the research results to pattern recognition. The research group has analyzed impacts of general fuzzy implication operators on such robustness of various important methods for fuzzy reasoning

in this paper. At present the research group focus on estimate and control for influence of perturbations of training pattern pairs on performs of fuzzy neural networks.

The work is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant No. 60472060, the Natural Science Foundation of Hunan Provincial under grant No. 05JJ40004, and the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department of China under grant No. 04C509.