第 28 卷 第 5 期
2005 年 5 月
计 算 机 学 报
CHINESE JOURNAL OF COMPUTERS
Vol. 28 No. 5
May 2005

使用可调 ADM 的对称全光树网上的调度算法

周丰丰[1),2)] 许胤龙[1),2)] 陈国良[1),2)]

[1)](中国科学技术大学计算机科学与技术系 合肥 230027)

[2)](国家高性能计算中心(合肥) 合肥 230027)

摘 要 波分复用技术可以显著提高光传输网络的带宽,是未来主干网的核心技术之一.工作波长可调节的加载/下载复用器(ADM)是实现该技术的主要光学器件之一,研究使用可调 ADM 的全光网络上的任务调度问题具有重要的理论和应用价值.该文研究了在每个节点放置一个可调 ADM 的对称全光树网上的任务调度问题,首先证明了它是 NP-完全的,接着给出了星形网络上的近似算法及其性能分析.最后,将一般树网上任务调度问题规约为星形网络上相同的问题,得到了一个 $2\times(\lceil 1.1\times Opt+0.8\rceil+L)/Opt$ 近似算法.

关键词 光传输网;波分复用;可调加载/下载复用器;任务调度;近似比

中图法分类号 TP301

A Scheduling Algorithm on Symmetric Fiber Trees with Tunable ADMs

ZHOU Feng-Feng[1),2)] XU Yin-Long[1),2)] CHEN Guo-Liang[1),2)]

[1)](*Department of Computer Science & Technology, University of Science & Technology of China, Hefei* 230027)

[2)](*National High Performance Computing Center at Hefei, Hefei* 230027)

Abstract This paper studies the scheduling problem on directed fiber trees with one tunable ADM per node, which is important in the theory and the practice. First, the scheduling problem is reduced to a special case of the edge coloring problem on an undirected graph. Since the edge coloring problem on an undirected graph is NP-complete, the scheduling problem is also NP-complete. Then the special case on the all optical star networks is reduced to the edge coloring problem on an undirected graph, and an $\lceil 1.1\times Opt+0.8\rceil$ approximation algorithm is got, where Opt is the optimal result. For the case on a general tree network, the scheduling problem of the requests that pass through, arrive at, or leave from the root node of the tree is reduced to the special case on the star networks, and an $\lceil 1.1\times Opt+0.8\rceil$ approximation algorithm is also got. The other nodes are then processed recursively. The performance is proved to be no worse than $2\times(\lceil 1.1\times Opt+0.8\rceil+L)/Opt$, where L is the load of the request set on the tree.

Keywords all-optical networks; wavelength division multiplexing (WDM); tunable add/drop multiplexer; scheduling; approximation ratio

1 引 言

全光传输网络以其稳定性好且传输容量大等优点,正迅速成为下一代高速网络的主要发展方向之一.随着光传输网技术的发展,可以实现许多带宽要求很高的应用,如视频点播、多媒体通信、分布式计算等.波分复用(Wavelength Division Multiplexing,WDM)技术的应用可以在不需要重新铺设物理网络的情况下,将光纤的传输容量扩大了几十倍、

收稿日期:2003-08-12;修改稿收到日期:2005-02-26.本课题得到国家自然科学基金(60173048)、国家"九七三"重点基础研究发展规划项目基金(G1998030403)资助.
周丰丰,男,1977 年生,博士研究生,主要研究方向为算法设计、组合优化、并行分布式计算.许胤龙,男,1963 年生,博士,教授,主要研究方向为复杂性理论、算法设计、并行计算.E-mail: ylxu@ustc.edu.cn.陈国良,男,1938 年生,教授,博士生导师,中国科学院院士,主要研究领域为并行计算、计算机体系结构、组合优化.

几百倍甚至上千倍①. 其基本原理是通过光学终端设备的调制/解调功能，在一根光纤上同时加载多个不同波长的信号，这样在一根物理光纤上可以实现多个通信信道. 光传输网络的波长资源以及相关光学设备的优化问题已经成为当前网络研究的一个主要方向.

光学终端设备通常包括工作在某个波长上的发送器和接收器. WDM 光传输网络的 MAC(Media Access Control)层协议根据节点上终端设备工作波长的可调节性分为：(1) 固定发送器、固定接收器(FTFR)；(2) 可调发送器、固定接收器(TTFR)；(3) 固定发送器、可调接收器(FTTR)；(4) 可调发送器、可调接收器(TTTR). 基于制造及使用方便的考虑，通常将工作波长相同的一个固定发送器和一个固定接收器合并成一个加载/下载复用器(Add/Drop Multiplexer，ADM). 随着制造工艺的发展，已经出现工作波长可以调节的 ADM 设备(简称可调 ADM)[1]. 它的工作原理是通过调节光学滤镜的透过波长，使 ADM 设备中的加载器和下载器同时调节到一个新的工作波长. 当网络节点上需要配置多个可调 ADM 时，这种设备还可以进行简单的级连，而只增加很少的光在滤镜中的延迟.

在使用 ADM 的光传输网络上，通常考虑：针对一个请求集合，如何使所需要的 ADM 数最少，这就是最小化 ADM 数问题(简称 MADM). 即使对于均匀的请求集合，环网上 MADM 问题仍然是 NP-完全的[2]. 文献[2～5]给出了环网上 MADM 问题的几个启发式算法. 对于对称全光树网，周丰丰和陈国良等[6]给出了最优的 ADM 路由算法. 若光传输网络使用可调节终端设备，则通常研究如何最小化一个请求集合的总调度时间. 文献[7～9]考虑了使用 FTTR 类型终端设备的光传输网络上单播(unicast)请求集合的调度问题. 对于组播请求，文献[10，11]中给出了总调度时间的几个下界，并提出了有效的启发式算法. 若网络中使用的终端设备是 TTFR 类型，Wan 等人[12]考虑了最小化发送器调节范围问题，并进而得到了一些特殊拓扑结构上的最优解.

本文研究了在对称全光树网的每个交换节点上分别放置一个可调 ADM，如何对一个请求集合中的请求进行调度，使得总调度时间最少的问题(简称 StADM). 在证明了对称全光树网上 StADM 问题的 NP-完全性之后，接着给出了星形网络上一类特殊请求集合的 StADM 问题近似算法及其性能分析. 最后，将一般树网上的 StADM 问题规约到星形网络，给出了对称全光树网上 StADM 问题的一个 $2\times(\lceil 1.1\times Opt+0.8\rceil+L)/Opt$ 贪心算法. 文中还讨论了该贪心算法在波长资源使用方面的优化. 就我们所知，这是第一个使用可调 ADM 的全光网络任务调度算法.

本文第 2 节给出相关的基本概念和性质；第 3 节证明了在星形网络上 StADM 问题是 NP-完全的，并进而推广到对称树网上，利用星形结构上的结论；在第 4 节中给出了一般树网上 StADM 问题的近似算法，并给出了它的性能分析；第 5 节对本文进行了总结.

2　基础知识

本文考虑的是在每一个节点上放置一个可调 ADM，对称全光树网 MAC 层上的任务调度问题. 本节描述了 StADM 问题及相关的数学模型，并进一步讨论了它们的性质.

2.1　问题模型

用树 $T=(V(T),\ E(T))$ 来表示对称全光树网，记 $n=|V(T)|$ 为树网中的节点数. $E(T)$ 中的一条边 (a_i,a_j) 对应两条方向相反的有向物理光纤 $\langle a_i,a_j\rangle$ 和 $\langle a_j,a_i\rangle$. 上述有向网络模型反映了所使用光学设备和通信请求的有向性. 在对称全光树网 T 上，任意 $a_i,a_j\in V(T)$，有且只有一条从 a_i 到 a_j 的有向路径，所以一个有向请求 $\langle a_i,a_j\rangle$ 对应于 T 上一条从 a_i 到 a_j 的有向路径，记为 $P(a_i,a_j)$. 给定一个有向请求集合 $R=\{\langle a_i,a_j\rangle\mid$ 存在一个从 a_i 到 a_j 的请求$\}$，在本文其余部分将直接用 R 来表示该请求集合对应的有向路径集合. 由于可能存在多个请求的源、汇相同，本文假设请求集合是多重集合(multi-set)，即允许存在重复元素. 在 MAC 层上，一个请求一旦开始，就不能中断；并通常将应用层的请求分割为多个定长的数据包进行传输. 所以本文假设每一个请求 $r\in R$ 的传输时间为常数 t_0.

在对称全光树网 T 上，给定有向请求集合 R. 通过决定每一个请求的开始传输时间，使得总传输时间 *makespan* 最少. 该任务调度问题记为 StADM. 对于请求集合 R，记 $\Delta_{\text{in}}(R)=\max_{v\in V(T)}\{R$ 中以 v 为汇节点的请求数$\}$，$\Delta_{\text{out}}(R)=\max_{v\in V(T)}\{R$ 中以 v 为源节点的请求数$\}$，以及 $\Delta(R)=\max\{\Delta_{\text{in}}(R),\Delta_{\text{out}}(R)\}$. 请求集合 R 在边 $e\in E(T)$ 上的负载 $L_R(e)$ 为经过 e

① "Bell Labs researchers use 'ultra-dense WDM' to transmit data over 1,022 channels on a single optical fiber", Nov. 10, 1999, http://www.lucent.com/press/1199/991110.bla.html

的请求数，而 R 在 T 上的负载（简称 R 的负载）为 $L_R=\max\{L_R(e)\mid e\in E(T)\}$.

WDM 光传输网络中实现一个请求，在其源、汇节点分别需要一个某一波长的 ADM 设备. 在源节点上，电信号被转换为光信号并加载到全光网络上；在汇节点上做相反的操作；所有其它中间节点都作为全光转发设备. 节点 v 上的某个 ADM 设备可以同时加载和下载固定工作波长上的一个通信请求，而不影响那些不以 v 为源或汇以及没有使用其工作波长的请求. 但是由于制造工艺等方面的原因，ADM 无法同时加载和下载网络中同一条边所对应的两根方向相反的物理光纤上的两个通信请求.

如图 1，如果两个有向请求 $\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $\langle s_2,d_2\rangle$ 是首尾相连的，不妨设 $d_1=s_2$. 它们分别用波长 λ_1 和 λ_2 进行传输. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则两个请求分别需要 2 个 ADM 设备；若 $\lambda_1=\lambda_2$，则只需要在节点 s_1，d_1 和 d_2 上分别放置一个 ADM. 后一种情况节省一个 ADM，其中节点 $d_1(=s_2)$ 上工作波长为 λ_1 的 ADM 同时下载请求 $\langle s_1,d_1\rangle$ 和加载请求 $\langle s_2,d_2\rangle$.

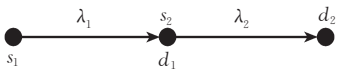
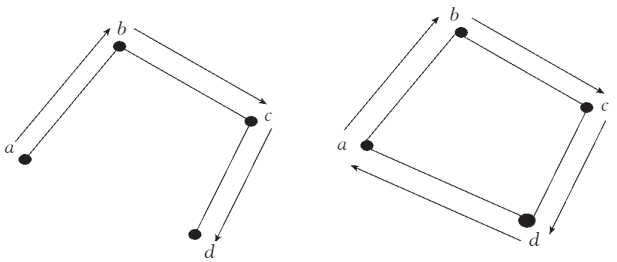


图 1 ADM 共享策略

给定图 G 以及 G 上的一个有向路径集合 P. 多个首尾相连的有向路径可以合并为一个链路. 如 P 中存在有向路径 $p_1=\langle s_0,s_1\rangle$，$p_2=\langle s_1,s_2\rangle,\cdots,p_k=\langle s_{k-1},s_k\rangle$，它们可以合并为链路 $Tr=\{\langle s_0,s_1\rangle,\langle s_1,s_2\rangle,\cdots,\langle s_{k-1},s_k\rangle\}$，且称 k 为 Tr 的长度. 如图 2 所示，如果 $s_0=s_k$，则称 Tr 为闭链；否则称为开链. 如果链路 Tr 中任两条有向路径不经过 G 中的同一条边，则称 Tr 为请求链. 请求链 $Tr=\{\langle s_0,s_1\rangle,\langle s_1,s_2\rangle\cdots,\langle s_{k-1},s_k\rangle\}$ 中的任意两个请求不经过同一条边，所以这些请求可以使用同一个波长进行传输，这样在节点 $s_1,s_2,\cdots,s_{k-1}$ 上分别只需要一个 ADM. 这就是 MADM 问题中最基本的优化方法：ADM 共享策略.



(a) 开链 (b) 闭链

图 2 链路

随着技术的发展，已经出现工作波长可以调节的 ADM，即所谓可调 ADM[1]. 一个可调 ADM 设备的工作波长可以在时间 δ 内从 λ_1 调节到 λ_2. 与光信号的传输速度相比，调节时间 δ 通常是不可以忽略的. 最小化 ADM 数问题（MADM）考虑的是给定一个请求集合，如何通过路由和波长分配使其所需要的 ADM 数最少. 但在实际应用中，网络的结构通常是预先设定的，故而本文讨论的 StADM 问题更符合实际情况：在每一个网络节点上放置一个可调 ADM，给定静态请求集合，通过路由和波长分配使得总调度时间最少.

由于每一个节点上只有一个可调 ADM，有公共端点的请求可能无法同时进行调度. 下面我们讨论一下请求之间的冲突关系.

定义 1. 给定图 G 以及 G 上的一个请求集合 R. 对 R 中的请求进行路由，得到一个有向路径集合 P. 对于 P 中的两个有向路径 $p_1=\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $p_2=\langle s_2,d_2\rangle$，我们定义以下 4 种冲突关系.

(1) 若 $s_1=s_2$，称 p_1 和 p_2 在 s_1 处发生源冲突；

(2) 若 $d_1=d_2$，称 p_1 和 p_2 在 d_1 处发生汇冲突；

(3) 若 $d_1=s_2$，且 p_1 和 p_2 经过了 G 中一条边所对应的同一根物理光纤，则称 p_1 和 p_2 在 d_1 处发生合并冲突；

(4) 若 $d_1=s_2$，且 p_1 和 p_2 经过以 d_1 为端点的某条边所对应的两条物理光纤，称它们在 d_1 处发生对称冲突.

在每个节点处放置一个可调 ADM 的全光网络上互相冲突的两条有向路径所对应的请求不能同时进行传输. 如图 3 所示，对请求集合 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,3\rangle\}$ 进行路由. 因为节点 2 处只有一个可调 ADM，所以两个源冲突的有向路径 $\langle 2,3\rangle$ 和 $\langle 2,4\rangle$ 不能同时通过这个可调 ADM 进行加载，汇冲突的请求 $\langle 2,3\rangle$ 与 $\langle 4,3\rangle$ 情况类似. 而对于合并冲突的 $\langle 2,4\rangle$ 和 $\langle 4,3\rangle$，由于它们无法同时使用一个波长进行传输，所以节点 4 处的可调 ADM 无法同时对它们进行处理. 因为与 ADM 相同的原因，一个可调 ADM 也无法同时处理发生对称冲突的两个请求 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,6\rangle$. 对于不冲突的两个有向路径 $\langle 1,2\rangle$

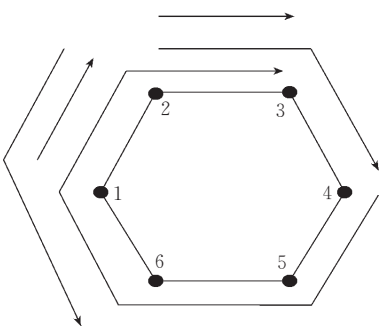


图 3 请求冲突关系

和$\langle 2,3\rangle$，只有在使用一个波长进行传输的时候，节点 2 处的可调 ADM 才能够同时传输. 否则就会发生以下冲突.

定义 2.　给定图 G 以及 G 上的一个请求集合 R. 对 R 中的请求进行路由，得到一个有向路径集合 P. 给定 P 中的一个链路 $Tr=\{\langle s_0,s_1\rangle,\langle s_1,s_2\rangle,\cdots,\langle s_{k-1},s_k\rangle\}$，如果其中任意两个有向路径对应的请求互不冲突，但 Tr 不是请求链，则称 Tr 中有向路径对应的请求集合发生了链路冲突.

由于对称全光树网上不存在链路冲突，本文其余部分将只考虑请求冲突关系，不需要考虑链路冲突. 由定义 1，我们可以得到以下结论.

引理 1.　对称全光树网 T 上任意两个互相冲突的请求，必有公共端点.

2.2　简化模型

在上述的 StADM 问题模型中，本文假设每个请求需要的传输时间均为 t_0. 我们需要将有向路径集合 P 分为尽可能少的子集，称为页面 $P_1,P_2,\cdots,P_B$，使得同一页面中任意两个请求之间都没有冲突，即可以同时在每个节点上只有一个可调 ADM 的对称全光树网 T 上进行传输. 传输完一个页面之后，根据下一页面中请求的需要，调节部分可调 ADM 的工作波长，然后传输下一页面中的请求. 所以，总传输时间为

$$makespan=(t_0+\delta)\times B.$$

由于 t_0 和 δ 都是确定的，为了最小化总传输时间 $makespan$，我们只需最小化页面数 B 即可. 在本文的其余部分，有关算法性能的讨论都是针对页面数 B 的.

3　StADM 问题的复杂性

我们在本节中证明星形网络上 StADM 问题是 NP-完全的. 由于星形网络是对称树网的特例，从而可得对称树网上 StADM 问题的 NP-完全性. 为了便于描述，首先定义对称全光树网 T 上请求集合 R 的一些子集.

$R(v)=\{r\mid v$ 在 $P(r)$ 上，$r\in R\}$，

$RC(v)=\{r\mid v$ 为 $P(r)$ 的中间节点，$r\in R\}$，

$RT(v)=\{r\mid v$ 为 r 的源或汇，$r\in R\}$，

显然有 $R(v)=RC(v)\cup RT(v)$，且 $RC(v)\cap RT(v)=nil$，

$RE(e)=\{r\mid$ 边 e 在 $P(r)$ 上，$r\in R\}$.

在树 T 上，一个节点 v 的高度是指 v 到根节点的距离. 一个请求 r 的最小公共祖先（*Least common ancestor*＝*Lca*）就是有向路径 $P(r)$ 上高度最小的节点，记为 $Lca(r)$. 记

$RL(v)=\{r\mid Lca(r)=v,r\in R\}$，

$RLC(v)=\{r\mid r\in RL(v)$ 且 v 为 $P(r)$ 的中间节点$\}$，

$RLT(v)=\{r\mid r\in RL(v)$ 且 v 为 r 的源或汇$\}$.

类似地，我们也有 $RL(v)=RLC(v)\cup RLT(v)$，且 $RLC(v)\cap RLT(v)=nil$.

同时还可以得到 $RLC(v)\subseteq RC(v)$ 以及 $RLT(v)\subseteq RT(v)$.

引理 2.　给定对称全光树网 T 以及 T 上的请求集合 R. 设 T 的根节点为 v_0. 任给两个请求 $r_1=\langle s_1,d_1\rangle,r_2=\langle s_2,d_2\rangle\in RC(v_0)$，则 r_1 与 r_2 冲突，当且仅当 r_1 和 r_2 有公共端点.

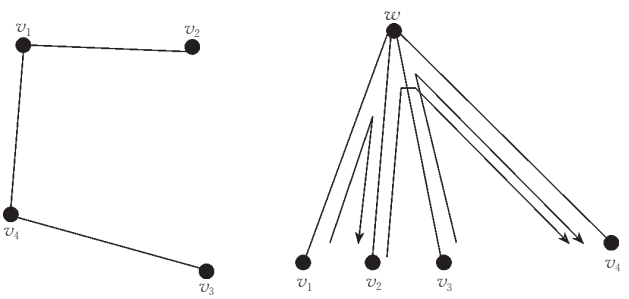
证明.　$RC(v_0)$ 中的两个请求 r_1 和 r_2 有公共端点，若 $s_1=s_2$ 或 $d_1=d_2$，则 r_1 和 r_2 之间分别是源冲突或汇冲突的；若 $s_1=d_2$ 或 $s_2=d_1$，则 r_1 和 r_2 是对称冲突.

综合引理 1 可得原命题成立.　　证毕.

无向图边着色问题是给定一个最大顶点度数为 Δ 的无向图 $G=(V(G),E(G))$，问 G 中的边能否用 Δ 个颜色进行着色，使得任意两条有公共顶点的边所着的颜色不同. 即使对于 3-正则图，即 $\Delta=3$ 的正则图，这个问题仍然是 NP-完全的[13]. 我们通过将无向图的边着色问题在多项式时间内规约为星形网络上的 StADM 问题，来证明星形网络中 StADM 问题的 NP-完全性.

定理 1.　对于星形网络，StADM 问题是 NP-完全的.

证明.　对于无向图边着色问题的输入 $G=(V(G),E(G))$，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，构造 StADM 问题的输入：对称全光星形网络 $S=(V(S),E(S))$，其中 $V(S)=V(G)\cup\{w\}(w\notin V(G))$，$E(S)=\{(w,v_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$. 有向请求集合 $R=\{\langle v_i,v_j\rangle\mid$ 边 $(v_i,v_j)\in E(G)$，且 $i<j\}$，如图 4 所示. 构造 S 的时间显然是 G 的输入长度的多项式. S 为一个星形结构的全光网络，是树结构的特殊情况.



(a) 无向图边着色问题　　(b) 规约后的实例

图 4　规约示例

给定上述 StADM 问题的任一合法解，设使用页面数为 B. 同一页面的任意两个请求 $r_1=\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $r_2=\langle s_2,d_2\rangle$ 不冲突，由引理 2 可知，它们没有公

共端点，故而它们对应无向图的边之间没有公共端点. 使用一个颜色对同一个页面中请求所对应无向图的边进行着色，可以得到无向图 G 上使用 B 个颜色的合法边着色方案. 反之，设 G 上边着色问题的一个解使用颜色数为 B^*，则使用同一颜色的任意两条边 $e_1=(s_1,d_1)$ 和 $e_2=(s_2,d_2)$ 没有公共端点. 由上述 StADM 问题输入的构造方法可知，它们对应请求集合 R 中的请求 r_1 和 r_2 也没有公共端点. 由引理 2 可知，r_1 和 r_2 之间没有冲突，即它们可以在同一页面中进行调度. 将 G 中着同一个颜色的边所对应的请求放在一个页面中，可以得到上述 StADM 问题的使用 B^* 个页面的合法解.

由于无向图边着色问题是 NP-完全的，所以星形网络上 StADM 问题是 NP-完全的. 证毕.

星形是树结构的特殊情况，所以我们有下面推论.

推论 1. 对于对称树网，StADM 问题是 NP-完全的.

4 近似算法

我们给出一个基本操作的定义，然后通过递归调用该操作来解决对称树网上的 StADM 问题. 为了便于后面的描述，这里首先给出几个结论.

给定对称全光网络 $G=(V(G),E(G))$ 以及 G 上的请求集合 R. 设 R 上的任务调度问题最优解为 $Opt(R)$ 以及 R 在 G 上的负载为 L_R，则有

$$Opt(R) \geq \max_{v\in V(T)}\{Opt(R(v)\} \tag{1}$$

$$Opt(R) \geq \Delta(R) \tag{2}$$

$$Opt(RE(e)) \leq 2L_R, \quad \forall e \in E(G) \tag{3}$$

不等式(1)和(2)显然成立. 在对称全光网络上，每一条边对应两条方向相反的物理光纤，所以经过边 e 的请求至多有 $2L_R$ 个，即 $Opt(RE(e))\leq 2L_R$，所以公式(3)成立. 且存在使不等式(3)取等号的情况，如图 5 所示，请求集合 $RE(e)=\{L_R$ 个 $\langle v_3,v_1\rangle, L_R$ 个 $\langle v_1,v_4\rangle\}$. 由于任两个 $\langle v_3,v_1\rangle$ 之间有汇冲突，任两个 $\langle v_1,v_4\rangle$ 之间有源冲突，而任一 $\langle v_3,v_1\rangle$ 与任一 $\langle v_1,v_4\rangle$ 之间有对称冲突. 所以至少需要 $2L_R$ 个页面，才能合法调度请求集合 $RE(e)$.

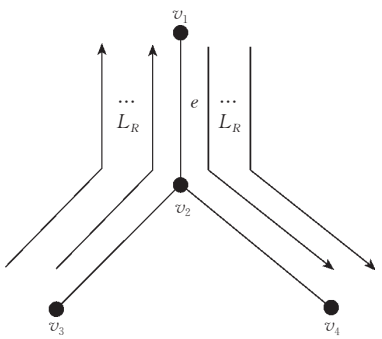


图 5 $RE(e)$ 所需页面数

4.1 基本操作

首先考虑星形网络 $S=(V(S),E(S))$ 上请求集合 $RC(v_0)$ 的调度，其中 v_0 为 S 的中心节点. 由引理 2，请求集合 $RC(v_0)$ 中的任意两个请求冲突，当且仅当它们有公共端点. 通过下面的 Star Partition Algorithm(SPA) 算法，我们可以在线性时间内将请求集合 $RC(v_0)$ 上的 StADM 问题规约为无向图上的边着色问题，进而利用文献[14]中的算法，得到至多需要 $\lceil 1.1\times Opt(RC(v_0))+0.8\rceil$ 个页面的近似算法，其中 $Opt(RC(v_0))$ 为针对请求集合 $RC(v_0)$ 的任务调度问题最优解.

算法 1. Star Partition Algorithm(SPA).

给定星形网络 $S=(V(S),E(S))$ 以及 S 上的请求集合 R. 记 S 的中心节点为 v_0，调度 $RC(v_0)$.

1. 构造辅助图 $S'=(V(S'),E(S'))$，其中 $V(S')=V(S)\backslash\{v_0\}$. 对于 $RC(v_0)$ 中任意有向请求 $\langle v_i,v_j\rangle$，在 $E(S')$ 中增加一条无向边 (v_i,v_j). 这样我们就得到一个无向多图 S'.

2. 对无向多图 S' 进行边着色[14]，使用的颜色数为 χ^*.

3. 将使用相同颜色的边对应的请求放在同一个页面中，则至多需要 χ^* 个页面.

End.

在 SPA 算法的第 1 步里，由于在请求集合 $RC(v_0)$ 中，不存在请求 r，使得 v_0 是 r 的端点. 所以对于 $RC(v_0)$ 中任意有向请求 $\langle v_i,v_j\rangle$，可以在 $V(S')$ 中找到节点 v_i,v_j，并在 $E(S')$ 中增加一条无向边 (v_i,v_j). 由辅助图 S' 的构造过程可知：请求 $\langle v_i,v_j\rangle$ 和无向边 (v_i,v_j) 是一一对应的.

由引理 2 可知，$RC(v_0)$ 中的两个请求 $r_1=\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $r_2=\langle s_2,d_2\rangle$ 是冲突的，当且仅当它们有公共端点，即它们所对应辅助图中的边 $e_1=(s_1,d_1)$ 和 $e_2=(s_2,d_2)$ 有公共端点. 设辅助图 S' 有一个使用 χ' 个颜色的边着色方案，将使用相同颜色的边对应 StADM 问题中的请求放在同一页面中. 由引理 2 以及上述结论可知，同一页面中的请求不冲突，所以得到了 StADM 问题的一个使用 χ' 个页面的调度方案. 反之亦然.

所以可由 S' 的最优解 Opt^* 得到原 StADM 问题的最优解：页面数为 $Opt(RC(v_0))=Opt^*$ 的调度方案. 利用文献[14]中的算法，可以得到辅助图 S' 上颜色数为 χ^* 的边着色近似算法，使得 $\chi^*\leq\lceil 1.1\times Opt^*+0.8\rceil$. 由对应关系，可以得到 StADM 问题的一个使用 χ^* 个页面的调度方案，且 $\chi^*\leq\lceil 1.1\times Opt^*+0.8\rceil=\lceil 1.1\times Opt(RC(v_0))+0.8\rceil$. 综上可得下面

定理.

定理 2.　给定对称全光星形网络 S，中心节点为 v_0，则对于 S 上的请求集合 $RC(v_0)$，SPA 算法至多需要 $\lceil 1.1\times Opt(RC(v_0))+0.8\rceil$ 个页面，其中 $Opt(RC(v_0))$ 为最优解.

给定对称全光树网 T，我们考虑经过根节点 v_0 的请求集合 $R(v_0)$. 首先将 $R(v_0)$ 的一个划分 $RC(v_0)$ 和 $RT(v_0)$ 分别规约到定理 2 描述的情况，进而得到请求集合 $R(v_0)$ 上 StADM 问题的一个近似算法.

定理 3.　给定对称全光树网 T，根节点为 v_0，则对于请求集合 $RC(v_0)$，存在至多使用 $\lceil 1.1\times Opt(RC(v_0))+0.8\rceil$ 个页面的多项式时间近似算法，其中 $Opt(RC(v_0))$ 为最优解.

证明.　我们将本问题规约为定理 2 描述的情况.

首先构造星形网络 $S=(V(S),E(S))$，其中 $V(S)=V(T)$，$E(S)=\{(v_0,v)\mid v\in V(S)\setminus\{v_0\}\}$，显然 S 的中心节点为 v_0. 星形网络 S 上的请求集合 $R'=RC(v_0)$. 因为在对称全光树网 T 上的 $RC(v_0)$ 中，对任意请求 r 有：v_0 是 $P(r)$ 的中间节点，所以对于 R' 中任意请求 r' 也有：v_0 是 $P(r')$ 的中间节点，即 $R'=RC(v_0)$.

由引理 2 可得，R' 中两个请求互相冲突，当且仅当它们有公共端点. $RC(v_0)$ 中也有相同结论. 从星形网络 S 的构造过程可知，$RC(v_0)$ 中两个请求冲突，当且仅当它们对应 R' 中的请求冲突. 类似于定理 2 中的证明，可得 $Opt(RC(v_0))=Opt(R')$，且从针对请求集合 R' 的使用 χ^* 个页面的任务调度方案，可以唯一得到一个针对 $RC(v_0)$ 的使用 χ^* 个页面的任务调度方案.

由定理 2 可知，SPA 算法可以得到星形网络 S 上至多使用 $\lceil 1.1\times Opt(R')+0.8\rceil$ 个页面的任务调度方案. 由上述结论可知，利用 SPA 算法可以在多项式时间内得到本问题至多需要 $\lceil 1.1\times Opt(R')+0.8\rceil=\lceil 1.1\times Opt(RC(v_0))+0.8\rceil$ 个页面的任务调度方案.　　证毕.

接下来我们考虑对称树网上请求集合 $RT(v_0)$ 的调度问题. 对任意请求 $r\in RT(v_0)$，我们称有向路径 $P(r)$ 上根的儿子节点称为请求 r 的根邻接点 (*Next to root*)，记为 $Ntr(r)$. 对于两个请求 $r_1,r_2\in RT(v_0)$，$Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$，当且仅当 r_1 和 r_2 在 v_0 下面的同一棵子树上. 如图 6 所示.

定理 4.　给定对称全光树网 T，根节点为 v_0，则对于 T 上的请求集合 $RT(v_0)$，存在至多需要 $\lceil 1.1\times Opt(RT(v_0))+0.8\rceil$ 个页面的多项式时间近似算法，其中 $Opt(RT(v_0))$ 为最优解.

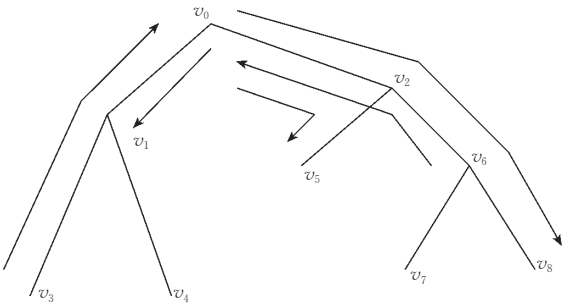


图 6　树 T 上的请求集合 $RT(v_0)$

证明.　我们首先证明：$RT(v_0)$ 中两个请求 $r_1=\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $r_2=\langle s_2,d_2\rangle$ 是冲突的，当且仅当 $s_1=s_2=v_0$，或者 $d_1=d_2=v_0$，或者 $Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$.

在 $RT(v_0)$ 中，请求 r_1 和 r_2 冲突. 若 $Ntr(r_1)\neq Ntr(r_2)$，则 r_1 和 r_2 只有公共节点 v_0. 所以，r_1 和 r_2 只可能在 v_0 处发生源冲突或汇冲突，即 $s_1=s_2=v_0$，或 $d_1=d_2=v_0$. 若 r_1 和 r_2 发生对称冲突，则 $Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$. 反之，如果 $s_1=s_2=v_0$，或 $d_1=d_2=v_0$，请求 r_1 和 r_2 分别在节点 v_0 处发生源冲突或汇冲突；如果 $Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$，则 r_1 和 r_2 在节点 v_0 处发生对称冲突. 所以上述命题成立.　　证毕.

下面我们将本问题规约为定理 2 描述的情况. 取 $v_{\text{in}},v_{\text{out}}\notin V(T)$ 构造星形网络 $S=(V(S),E(S))$，其中 $V(S)=\{Ntr(r)\mid \forall r\in R\}\cup\{v_0,v_{\text{in}},v_{\text{out}}\}$，$E(S)=\{(v,v_0)\mid v\in V(S),v\neq v_0\}$，即中心节点为 v_0. 首先构造星形网络 S 上的两个请求集合：$R_{\text{in}}=\{\langle Ntr(r),v_{\text{in}}\rangle\mid \forall r=\langle v,v_0\rangle\in RT(v_0)\}$，$R_{\text{out}}=\{\langle v_{\text{out}},Ntr(r)\rangle\mid \forall r=\langle v_0,v\rangle\in RT(v_0)\}$，并设星形网络 S 上的请求集合 $R'=R_{\text{in}}\cup R_{\text{out}}$. 由 R_{in} 和 R_{out} 的构造方法可知，$RT(v_0)$ 中请求一一对应于 R' 中的请求，且 $R'=RC(v_0)$.

下面证明：$RT(v_0)$ 中两个请求 $r_1=\langle s_1,d_1\rangle$ 和 $r_2=\langle s_2,d_2\rangle$ 冲突，当且仅当它们在 R' 中对应的两个请求 r_1' 和 r_2' 冲突.

在树网 T 上，请求集合 $RT(v_0)$ 中两个请求 r_1 和 r_2 冲突，它们对应 R' 中的请求 r_1' 和 r_2'. 由上述已证命题可知，只有以下 3 种情况：

(1) 若 r_1 和 r_2 有公共源节点 v_0，则 r_1' 和 r_2' 在节点 v_{out} 处发生源冲突；若 r_1 和 r_2 有公共汇节点 v_0，则 r_1' 和 r_2' 在节点 v_{in} 处发生汇冲突；

(2) 若 $Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$，则 r_1' 和 r_2' 在节点 $Ntr(r_1)$ 处发生对称冲突. 反之，r_1' 和 r_2' 冲突. 若 r_1'，$r_2'\in R_{\text{out}}$，则 r_1 和 r_2 源冲突；若 $r_1',r_2'\in R_{\text{in}}$，则 r_1 和 r_2 汇冲突；

(3) 若 $r_1'\in R_{\text{in}}$ 及 $r_2'\in R_{\text{out}}$，或 $r_1'\in R_{\text{out}}$ 及 $r_2'\in R_{\text{in}}$，且 r_1' 和 r_2' 冲突，则 $Ntr(r_1)=Ntr(r_2)$，即 r_1 和 r_2

发生对称冲突.

所证命题成立.

类似于定理 2 中的证明,可得 $Opt(RT(v_0))=Opt(R')$,且从针对请求集合 R' 的使用 χ^* 个页面的任务调度方案,可以唯一得到一个针对 R 的使用 χ^* 个页面的任务调度方案. 由定理 2,R' 上存在一个至多使用 $\lceil 1.1\times Opt(R')+0.8\rceil$ 个页面的多项式时间近似算法. 所以针对对称全光树网 T 上的请求集合 $RT(v_0)$,利用 SPA 算法可以在多项式时间内得到本问题至多需要 $\lceil 1.1\times Opt(R')+0.8\rceil=\lceil 1.1\times Opt(RT(v_0))+0.8\rceil$ 个页面的任务调度方案.

证毕.

在对称全光树网 $T=(V(T),E(T))$ 上,对任意 $v\in V(T)$,有 $R(v)=RC(v)\cup RT(v)$,且 $RC(v)\cap RT(v)=\varnothing$. 确定节点 v 为树 T 的根节点,综合定理 3 和 4 的结论,可以得到以下定理.

定理 5. 给定对称全光树网 $T=(V(T),E(T))$,任意 $v\in V(T)$,对于请求集合 $R(v)$,存在至多使用 $2\times\lceil 1.1\times Opt(R(v))+0.8\rceil$ 个页面的多项式时间近似算法.

星形网络是树网的特殊情况,且星形网络上任意请求 r,都有中心节点 $v_0\in P(r)$. 所以由定理 5 可得以下定理.

推论 2. 给定对称全光星形网络 $S=(V(S),E(S))$,中心节点为 v_0,则对于 S 上的请求集合 R,存在至多使用 $2\times\lceil 1.1\times Opt(R)+0.8\rceil$ 个页面的多项式时间近似算法,其中 $Opt(R)$ 为最优解.

4.2 近似算法

利用定理 5 中的算法对对称树网上所有节点递归地进行处理,我们得到以下算法.

算法 2. Level Processing Algorithm (LPA).

给定对称全光树网 $T=(V(T),E(T))$ 以及 T 上的一个有向请求集合 R,记负载 $L=L_R$. $C=\lceil 1.1\times Opt(R)+0.8\rceil$,其中 $Opt(R)$ 为最优解. 设有页面集合 $PageSet=\{P_1,P_2,\cdots,P_{2C+2L}\}$. 任意确定一个节点为根节点.

1. 从根节点开始,依照宽度优先搜索顺序处理下一个节点 v_i 处的请求集合 $RL(v_i)$.

2. 如果 v_i 不是叶节点,利用定理 6 中的算法处理 $RL(v_i)$,至多需要 $2C$ 个页面.

3. 分配 $RL(v_i)$ 中请求使用不冲突的 $PageSet$ 中的页面.

4. 如果 $V(T)$ 中存在未处理的节点,则继续第 1 步. 否则停止算法.

End.

在确定树 T 的根节点之后,设 $n=|V(T)|$,依照宽度优先搜索顺序对节点进行编号,可得 $V(T)=\{v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}\}$. 由请求集合 $RL(v_i)$ 的定义,显然有以下各式成立

$$R=\bigcup_{0\le i\le n-1}RL(v_i),$$

$$RL(v_i)\cap RL(v_j)=\varnothing,\ 0\le i\ne j\le n-1.$$

这样就保证了贪心算法 LPA 在处理当前节点 v_i 处的请求集合 $RL(v_i)$ 时,不会为已分配好页面的请求集合 $\bigcup_{0\le j<i}RL(v_j)$ 中请求重新分配页面. 在树 T 上,若当前节点 v_i 不是根节点,设 $p(v_i)$ 为 v_i 的父节点,则 $RE((p(v_i),v_i))$ 中的请求都已经分配好了页面.

算法首先处理根节点 v_0. 由定理 5 可知,请求集合 $RL(v_0)$ 至多需要 $2C$ 个页面,所以 $PageSet$ 中的页面满足要求. 在处理下一个节点 v_i 处请求集合 $RL(v_i)$ 时,与 $RL(v_i)$ 中请求冲突的已分配好页面的请求一定属于 $RE((p(v_i),v_i))$. 设 $PageSet$ 中去掉所有 $RE((p(v_i),v_i))$ 中请求所在的页面后为 $PageSet(i)=\{P_1^{(i)},P_2^{(i)},\cdots,P_{B_1}^{(i)}\}$. 由不等式(3)可知,$B_1\ge(2L+2C)-2L=2C$,所以可以为 $RL(v_i)$ 中请求分配 $PageSet(i)$ 中的页面. 依次处理其它节点处的请求,最后可以将所有请求都分配使用 $PageSet$ 中的页面.

通过上述讨论,我们可以得到以下定理.

定理 6. 给定对称全光树网 T 以及 T 上的请求集合 R. 对于请求集合 R,多项式时间近似算法 LPA 至多需要 $(2C+2L)$ 个页面,其中 $C=\lceil 1.1\times Opt(R)+0.8\rceil$,$Opt(R)$ 为请求集合 R 上的最优解.

设 LPA 算法将请求集合 R 分为 χ 个子集合:$P_1,P_2,\cdots,P_\chi$,且 $P_i(1\le i\le\chi)$ 在对称全光树网 T 上的负载 L_i 都满足 $L_i\le L$. 请求集合 R 经过 LPA 算法处理之后,利用 Erlebach 等人的结果[15],对每个页面 P_i 中的请求分别分配波长,至多只需要 $5L/3$ 个波长就可以了. 如果使用波长转换器,还可以对波长资源的使用做进一步优化[16,17].

5 结 论

本文研究了基于可调 ADM 的对称全光树网上的任务调度问题. 借鉴无向图边着色问题的已有结果,首先证明了该问题是 NP-完全的,并进而给出星形网络上,针对一类特殊请求集合的近似算法. 对于一般树结构上的情况,首先讨论了针对某一个节点 v 处的请求集合 $R(v)$ 的情况. 通过对 $R(v)$ 两个子集的分析,进一步给出了针对 $R(v)$ 的任务调度问题近似算法. 最后,综合已有结果,给出处理对称全光树网上一般请求集合 R 的任务调度问题近似算法. 就我们所知,这是第一个基于可调 ADM 的全光网任务调度算法.

接下来我们将对其它网络拓扑结构上的

StADM 问题作进一步的研究.

参 考 文 献

1 Liu D. M., Yang X. L., Huang D. X. Tunable filter used in a WDM add/drop device. In: Proceedings of the 2nd Joint Symposium on Opto.-& Microelectronic Devices and Circuits, Wuhan, 2002, 285～289

2 Liu L. W., Li X. Y., Wan P. J., Frieder O.. Wavelength assignment in WDM rings to minimize SONET ADMs. In: Proceedings of the IEEE INFOCOM 2000, Tel-Aviv, 2000, 1020～1025

3 Calinescu G., Wan P. J.. Traffic partition in WDM/SONET rings to minimize SONET ADMs. Journal of Combinatorial Optimization, 2001, 6(4): 425～453

4 Colbourn C. J., Wan P. J.. Minimizing drop cost for SONET/WDM networks with 1/8 wavelength requirements. Networks, 2001, 37(2):107～116

5 Zhang X. J., Qiao C. M.. An effective and comprehensive approach for traffic grooming and wavelength assignment in SONET/WDM rings. IEEE Transactions on Networking, 2000, 8(5): 608～617

6 Zhou F. F., Chen G. L., Xu Y. L.. Minimizing ADMs on directed fiber tree. Journal of Computer Science and Technology, 2003, 18(6): 725～731

7 Azizoglu M., Barry R. A., Mokhtar A.. Impact of tuning delay on the performance of bandwidth-limited optical broadcast networks with uniform traffic. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1996, 14(5): 935～944

8 Borella M. S., Mukherjee B.. Efficient scheduling of nonuniform packet traffic in a WDM/TDM local lightwave network with arbitrary transceiver tuning latencies. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1996, 14(5): 923～934

9 Rouskas G. N., Sivaraman V.. Packet scheduling in broadcast WDM networks with arbitrary transceiver tuning latencies. IEEE/ACM Transactions on Networking, 1997, 5(3): 359～370

10 Ortiz Z., Rouskas G. N., Perros H. G.. Scheduling of multicast traffic in tunable-receiver WDM networks with non-negligible tuning latencies. In: Proceedings of the ACM SIGCOMM, Cannes, 1997, 301～310

11 Bianco A., Galante G., Leonardi E., Neri F., Nucci A.. Scheduling algorithms for multicast traffic in TDM/WDM networks with arbitrary tuning latencies. Computer Networks, 2003, 41(6): 727～742

12 Wan P. J., Liu L. W., Frieder O.. Wavelength assignment to minimize requirement on tunable range of optical transceivers in WDM networks. Computer Communications, 2003, 26(7): 774～779

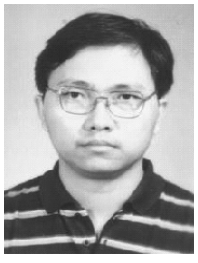
13 Holyer I.. The NP-completeness of edge-coloring. SIAM Journal of Computing, 1981, 10(4): 718～720

14 Nishizeki T., Kashiwagi K.. On the 1.1 edge-coloring of multigraphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1990, 3(3): 391～410

15 Erlebach T., Jansen K., Kaklamanis C., Mihail M., Persiano P.. Optimal wavelength routing on directed fiber tree. Theoretical Computer Science, 1999, 221(1/2): 119～137

16 Gargano L.. Limited Wavelength conversion in all-optical tree networks. In: Proceedings of the 25th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP'98), Aalborg, 1998, 544～555

17 Kumar V., Schwabe E.. Improved access to optical bandwidth in trees. In: Proceedings of the 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'97), New Orleans, 1997, 437～444



ZHOU Feng-Feng, born in 1977, Ph. D. candidate. His research focuses on algorithm designing, combinatorial optimization, distributed computing, bioinformatics.

XU Yin-Long, born in 1963, Ph. D., professor. His research focuses on parallel computing, algorithm designing, and complexity theory.

CHEN Guo-Liang, born in 1938, professor, Ph. D. supervisor, member of Chinese Academy of Sciences. His research focuses on the parallel computing, computer architecture, and combinatorial optimization.

Background

The project mainly focuses on the designing and analyzing of the algorithms for the combinatorial optimization problems in all optical networks, etc. This group is interested in the routing and wavelength assignment problems, the scheduling problems, and the MAC-layer protocol designing in all optical networks. They have published more than ten research papers in the domestic and foreign peer-reviewed journals and conferences. This paper considered the job scheduling problem on the directed fiber trees with one tunable ADMs per node, which is important in the theory and the practice.