

基于三元数的三维广义 M 集表示及其绘制算法

程 锦 谭建荣

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

摘 要 研究了基于三元数的三维广义 Mandelbrot 集表示方法,从理论上分析和证明了指数为正整数的三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集所具有的性质,提出了基于周期检测的光线投射体绘制算法,根据属于 M 集的各离散点的周期值来定义其颜色、不透明度和法向量,并用 Newton-Raphson 方法来加速光线与 M 集的求交运算.用文中提出的体绘制算法绘制了三元数法和四元代数法所构造的三维 M 集.实验结果表明,与四元代数相比,用三元数来构造三维 M 集具有直观、快速、可控等优点.三元数法可以进一步推广到其它三维 M 集和 J 集的构造,从而为三维分形图的生成提供了一个新的有效途径.

关键词 三元数;广义 Mandelbrot 集;体绘制;周期检测法;四元代数
中图法分类号 TP391

Representation of 3-D General Mandelbrot Sets Based on Ternary Number and Its Rendering Algorithm

CHENG Jin TAN Jian-Rong

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The Generation of Mandelbrot sets in more than two dimensions is a new and difficult problem in computer graphics. All the existing methods utilize quaternion algebra to iteratively compute M-sets' boundaries. This paper proposes a new approach to the problem and represents the 3-D general M-sets based on ternary number. Firstly, the M-sets' properties of the ternary mapping $t \leftarrow t^m + c$ for $m \geq 2$ are theoretically analyzed and proved. Secondly, a ray-casting volume rendering algorithm on the basis of period checking is put forward for the first time. In the new algorithm, the color, opacity and normal of every discrete point are defined according to its periodicity and the computation of a ray's intersecting with M-set is accelerated by making use of Newton-Raphson method. Finally, the 3-D M-sets generated by the ternary number and quaternion algebra are both rendered by our new algorithm. The experimental results show that several advantages such as intuitionistic, fast and controllable are obtained by using ternary mapping to generate 3-D M-sets in comparison with traditional methods that use quaternion algebra to generate them. Furthermore, the method of generating 3-D M-sets by ternary mapping can be applied to the construction of other 3-D Mandelbrot sets and Julia sets. Consequently this results in a different perspective for the generation of 3-D fractal sets.

Keywords ternary number; general Mandelbrot set; volume rendering; period-checking algorithm; quaternion algebra

1 引 言

作为分形几何的典型, Julia 集和 Mandelbrot

集以其独特而精妙的复杂结构引人赏心悦目,并被到处采用.人们借助于复变函数理论对复平面上的 J 集和 M 集进行了广泛、深入的研究,不仅给出了各种复映射所生成的 J 集和 M 集的计算机表示,在

理论上也对这些分形图的结构和性质进行了系统、详尽和精确的分析. 可以说, 复平面上 J 集和 M 集的研究已经比较成熟了.

然而, 由于研究高维分形所需的数学理论和可视化工具所固有的局限性, 三维空间中 J 集和 M 集的研究遇到了一定的困难. 现有的构造三维分形集的方法大多是利用哈密顿四元数生成四维空间中的分形集, 并取其在三维空间中的投影而得到三维的分形图. 文献[1~3]着眼于三维 J 集绘制技术的研究, 分别采用边界检测法、体光线跟踪法和反迭代法来绘制用哈密顿四元数所生成的三维 Julia 集. 边界检测法是一种以对象空间为序的算法, 该算法在绘制过程中需保存绘制对象上每个点的有用信息, 需要很大的存储空间. 体光线跟踪法以图像空间为序, 直接研究光线通过体数据场时的变化, 内存要求低, 并可得到具有漫射、反射、折射等特殊效果的图像, 因而能绘制出比边界检测法更精细的三维分形图, 但这种方法绘制速度很慢. 反迭代法虽然简单、快速且占用内存少, 但采用该法所绘制的结果图的质量要比其它两种算法低得多, 因而有很大的局限性. 文献[4]也采用哈密顿四元数来构造 M 集和 J 集, 但由于可视化技术的困难, 文中只给出了这些分形集在二维平面上的投影, 未能直观地表达高维分形集的真实结构. 与文献[1~4]的侧重点不同, 文献[5]从理论上证明了用哈密顿四元数所构造的 Julia 集在三维空间中的投影可以通过其二维 Julia 子集围绕某一特定轴旋转而得到. 以上研究均采用哈密顿四元数作为迭代运算的工具, 所得到的三维分形图具有相同的形式(哈密顿四元数所构造的 Julia 集大多数具有旋转体结构). 因此, 为了得到更多具有不同结构的分形集, 人们又开始寻求新的迭代运算工具. 基于此目的, 文献[6]和文献[7]分别提出了采用双复数和变异的“复数化”四元数来构造三维分形集的方法, 增加了三维分形集的新形式.

迄今为止, 用四元代数构造三维分形集的研究有效地推动了复平面分形集在三维空间中的拓展, 但仍存在以下不足之处: (1) 难以洞察这些三维分形集精细的结构特征. 用四元代数构造的三维分形集与复平面上的分形集几乎没有对应关系, 因此, 我们无法通过复平面上的分形集来把握这些三维分形集的细节结构. (2) 难以避免构造分形集过程中客观存在的不可控性. 用四元数构造三维分形集时, 由于我们只能绘制三维空间中的分形图像, 因此必须给定参数 c 的一个分量值以得到四维分形集在三维空间

中的投影, 而 c 的某一分量取不同值时所生成的三维分形集往往会有很大的差异, 从而导致了分形集生成结果的随机性. (3) 无法直观形象地表达四元代数映射所对应的分形集. 由于四维空间中可视化技术的困难, 我们只能考察这些分形集在三维空间中的投影, 而始终无法直观真实地感知四维分形集的整体结构. 归根到底, 造成上述困难的原因在于, 四元代数包含四个分量, 全体四元代数的集合是四维算术空间, 我们不能给出用四元代数构造的四维 M 集的实际几何形象, 只能将其投影到三维空间, 而这个投影过程必然会导致信息丢失、不直观和不可控.

针对四元代数构造三维分形集时所存在的问题, 本文探索了直接在三维算术空间中构造三维分形集的方法, 试图用三元数来构造三维的广义 M 集, 以避免四维到三维的投影过程, 从而得到信息完整并且形象直观的三维 M 集. 利用三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 将复平面中的二次映射 $z \leftarrow z^2 + c$ 推广为三维空间中指数为正整数的三维映射, 从理论上分析和证明了这些映射的广义 M 集所具有的性质. 为了得到高质量的三维分形图, 提出了基于周期检测的光线投射体绘制算法, 对给定三维空间中属于 M 集的离散点根据其周期值赋予颜色和不透明度, 同时通过周期值来求得各个离散点的梯度作为法向量, 并在此基础上采用 Newton-Raphson 方法来加速光线与 M 集的求交. 实验结果表明, 用三元数来构造三维分形集能有效地避免四元代数法构造时所存在的不足, 并具有更快的生成速度.

2 三元数的三维广义 M 集及其性质

2.1 三元数的基本原理

为叙述方便起见, 我们首先对在研究三元数的广义 M 集及性质时将用到的三元数基本原理^[8,9]作简要介绍.

三元数 t 由 3 个实数 x, y, z 和 3 个虚轴单位元 i, j, k 所组成, 可以表示为

$$t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xi + yj + zk (x, y, z \in R) \quad (1)$$

其中, i, j, k 满足

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} (i, j, k) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ j & k & -i \\ k & -i & -j \end{pmatrix} \quad (2)$$

全体三元数的集合构成三元数系,记为 T .

$$\text{三元数 } t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ 的共轭 } \bar{t} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix} \quad (3)$$

显然,三元数具有以下性质:

- (1) 三元数的加法满足交换律和结合律.
- (2) 三元数的乘法满足交换律、结合律和分配律.
- (3) 三元数的共轭满足

$$\overline{t_1 \pm t_2} = \bar{t}_1 \pm \bar{t}_2, \overline{t_1 \cdot t_2} = \bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2 \quad (4)$$

$$\text{三元数 } t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ 的特征为 } \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ x - y + z \end{pmatrix},$$

其中,二元数 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 和一元数 r 分别为三元数 t 的二元特征和一元特征. 在三维算术空间中,使二元特征 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 取零值的点构成一条直线,其方程为

$$x = -y = z \quad (5)$$

使一元特征 r 取零值的点构成一个平面,其方程为

$$x - y + z = 0 \quad (6)$$

根据三元数特征的运算性质,三元数 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 实际

上同时表示了一个二元数 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 和一个一元数 r ,三元数的运算就是同时做其相应的二元特征 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ (复数) 和一元特征 r (实数) 的运算.

2.2 三元数的三维广义 M 集

三元数把数的概念推广到三维算术空间,建立了

三元数系. 将三元数 $t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 理解为三维空间点的直角

坐标,则三元数系和整个三维空间内的点一一对应. 因此,我们可以利用三元数来构造三维 Mandelbrot 集.

定义 1. 设有三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$, 则该映射的三维广义 M 集为三维空间中当 t 的初值取映射的临界点进行无数次迭代始终不发散到无穷的所有参数 c 的集合,用公式表示为

$$M = \{c \in T: \{f_c^n(t_0)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty\} \quad (7)$$

其中 $t_0 = 0$ 为三元数映射的临界点.

显然,在该指数为正整数的映射作用下,初值 t_0 取为临界点 0 时的轨道和取为参数 c 时的轨道相同,因此,为了方便起见,本文采用参数 c 本身作为初始迭代点来判定 c 点是否属于 M 集,即本文所用

的三维广义 M 集的表达式为

$$M = \{c \in T: \{f_c^n(c)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty\} \quad (8)$$

当三元数映射的指数为 2 即当映射可表示为 $t \leftarrow t^2 + c (t, c \in T)$ 时,生成三维 M 集的迭代公式为

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x^2 - 2yz + x \\ y &\leftarrow 2xy - z^2 + y \\ z &\leftarrow 2xz + y^2 + z \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 三元数的广义 M 集的性质

性质 1. 三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集关于平面 $y + z = 0$ 对称.

证明. 设 $f(t) = t^m + c, g(t) = t^m + \bar{c}, h(t) = \bar{t}$, 则根据式(4)有

$$h \cdot f(t) = \overline{t^m + c} = \bar{t}^m + \bar{c} = \underbrace{\bar{t} \cdot \bar{t} \cdot \dots \cdot \bar{t}}_m + \bar{c} = (\bar{t})^m + \bar{c},$$

$$g \cdot h(t) = (\bar{t})^m + \bar{c}.$$

故 $h \cdot f(t) = g \cdot h(t)$, 即若 $c \in M$, 则必有 $\bar{c} \in M$.

设 $c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则由式(3)中三元数共轭的定义可

$$\text{得 } \bar{c} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}, \text{ 从而有 } c + \bar{c} = \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \\ z - y \end{pmatrix}, c - \bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ y + z \\ z + y \end{pmatrix}.$$

故 c 与 \bar{c} 关于平面 $y + z = 0$ 对称.

因此,三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集必定关于平面 $y + z = 0$ 对称.

证毕.

根据三元数特征的定义及性质,我们又可以推出三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集具有以下两个性质.

性质 2. 三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集在平面 $x - y + z = 0$ 上的投影是二元复映射 $z \leftarrow z^m + c (z, c \in C, m \in N, m \geq 2)$ (其中 C 为复数系)在复平面上的 M 集.

性质 3. 三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集是由平面 $x - y + z = l (l$ 为某一实数)上的分形图沿着直线 $x = -y = z$ 推移所形成的柱状体.

根据性质 2 和 3 以及复映射 $z \leftarrow z^m + c (z, c \in C, m \in N)$ 所具有的性质^[10], 我们又可以得出性质 4.

性质 4. 三元数映射 $t \leftarrow t^m + c (t, c \in T, m \in N, m \geq 2)$ 的三维广义 M 集的底面由 $m - 1$ 个旋转对称的完整花瓣构成.

3 三维广义 M 集的构造

为了得到高质量的三维分形图,本文提出了基于周期检测的光线投射体绘制算法来绘制三维 M

集. 算法首先采用文献[11]所提出的周期检测法来求取给定三维空间内属于 M 集的各个离散点处迭代序列的周期值, 然后根据各点的周期值对这些离散点赋予不透明度值和颜色值, 并采用光线投射法进行体绘制.

3.1 周期检测法生成三维离散数据点

考察给定三维空间内均匀网格上的一个点 $c = (x, y, z)$. 由于在未达到稳定轨道前, 两次相邻迭代点之间的最小距离 $MinDist$ 不断减小, 因此, 当 $MinDist$ 经过一定次数的迭代没有变化时, 可以认为已达到稳定轨道.

假定我们要绘制周期值不超过 $MaxPeriod$ 的所有点, 并给定最大迭代次数 $MaxIter$ 和溢出阈值 $Overflow$. 若初始迭代点 c 经过 $n (n < MaxIter)$ 次迭代后所得到的点的序列 $\{c, c(1), c(2), c(3), \dots, c(n)\}$ 满足 $|c(i)| \leq Overflow (i=0, 1, 2, 3, \dots, n)$, 且 $MinDist$ 经过 $MaxPeriod$ 次迭代没有变化, 则认为点 c 属于 M 集, 可以用匹配法求得其周期值.

需要说明的是, 在用周期检测法求取属于三维 M 集的离散点集过程中, 我们将经过一定次数的迭代后溢出的点(即存在 $0 < j < MaxIter$ 使得不等式 $|c(j)| > Overflow$ 成立的那些点)的周期值置为 -1 ; 将经过 $MaxIter$ 次迭代没有溢出, 但用匹配法未能找到其周期的点的周期值置为 0 . 这样, 算法利用三维网格上各点的周期值 $Period(x, y, z)$ 来唯一地标识各个网格点的属性, 而周期值也决定了各个网格点是否属于 M 集. 显然, 周期值为 -1 的点不属于 M 集, 而周期值为 0 的点是位于 M 集边界上的混沌点.

3.2 光线投射法体绘制三维广义 M 集

有了三维离散数据点, 我们就可以用光线投射法进行体绘制从而得到三维的广义 M 集. 由于我们采用周期检测法求得了给定三维空间中属于 M 集的各离散点处迭代序列的周期值, 并用它来标识这些离散数据点的属性, 因此, 我们可以充分利用周期值来获得各个离散点的等价法向量以及光线与 M 集的交点, 以便能更好地观察三维 M 集复杂而精细的结构, 并加快绘制速度. 下面各小节我们将分别介绍本文算法在体绘制三维 M 集时确定各点等价法向量及光线与 M 集交点的方法.

3.2.1 法向量的确定

在体绘制三维 M 集时, 为了利用明暗计算的效果更加突出地显示具有不同周期值的点的边界, 需求出各个离散点的等价法向量. 本文采用各个离散点的梯度值来代替法向量.

在 3.1 节中, 我们用周期检测法求出了三维均匀

网格上各个点的周期值, 于是可以利用这个周期值来求得各点的梯度, 作为各点的等价法向量. 设三维网格上点 $c = (x, y, z)$ 的周期值为 $Period(x, y, z)$, 则用中心差分法可得该点的梯度值为

$$\begin{aligned} Grad(c) &= (Grad_x, Grad_y, Grad_z) \text{ 且} \\ \left\{ \begin{aligned} Grad_x &= (Period(x-dx, y, z) - \\ &\quad Period(x+dx, y, z)) / (2 \times dx) \\ Grad_y &= (Period(x, y-dy, z) - \\ &\quad Period(x, y+dy, z)) / (2 \times dy) \\ Grad_z &= (Period(x, y, z-dz) - \\ &\quad Period(x, y, z+dz)) / (2 \times dz) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $dx = dy = dz$ 为三个坐标轴方向的网格间距.

3.2.2 光线与 M 集的求交

采用光线投射法体绘制三维分形集时, 步长越小, 采样密度越高, 绘制结果越精确. 但若用很小的步长进行均匀采样显然会耗费很长的时间, 尤其是那些远离分形集的采样点实际上是完全不必要的. 因此, 为了提高体绘制速度, 本文在保证绘制精度的前提下采用 Newton-Raphson 方法来加速光线与 M 集的求交过程.

首先, 根据绘制 M 集的精度需求选取一个很小的步长 $\delta (\delta > 0)$. 设光线起点为 R_0 , 方向为 D , 则光线的迭代方程为 $R_{n+1} = R_n + D \cdot \max\{F_{NewtonStep}(R_n), \delta\}$. 我们所要求的是使 $g(R_n) = f(c(R_n)) = 0$ 的点. 设当前步长为 R_n , 则用 Newton-Raphson 方法求得的下一步的步长为 $F_{NewtonStep}(R_n) = R_n - \frac{g(R_n)}{g'(R_n)}$, 其中 $g'(R_n) = Grad(c) \cdot \frac{dc(R_n)}{dR_n} = Grad(c) \cdot D$, 而 $Grad(c)$ 的求法见 3.2.1 小节的式(10).

4 实验结果分析与比较

为了便于分析, 本文在以下两小节分别给出了用四元代数和三元数所构造的三维分形集的结果, 文中所有三维 M 集分形图均采用基于周期检测的光线投射法体绘制算法进行绘制, 且在各图中参数 c 的取值范围均为 $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [-1, 1]$, 均匀网格的间距为 0.02 . 为了考察 M 集中具有不同周期值的点的分布情况, 我们在实验中根据周期值 $Period(x, y, z)$ 来定义各网格点的颜色 $Color(x, y, z)$ 和不透明度 $Opacity(x, y, z)$ 等属性. 对于 $[Period(x, y, z) \bmod 6]$ 为 $0 \sim 5$ 的点分别用紫、橙、绿、黄、青、蓝 6 种颜色来绘制, 并将它们的不透明度均设为 1 . 显然, 那些溢出的点(即周期为 -1 的点)不属于 M 集, 不需要绘制, 因此将其不透

明度设为 0.

4.1 四元代数的三维 M 集

当四元代数 $q=x+yi+zj+\omega k$ 的三个虚轴单

位元 i,j,k 满足表 1 中所示的运算关系时,我们分别称这些四元代数为超复数、哈密顿四元数和复数化四元数.

表 1 超复数、哈密顿四元数和复数化四元数的三个虚轴单位元之间的运算关系

	i			j			k		
	超复数	哈密顿四元数	复数化四元数	超复数	哈密顿四元数	复数化四元数	超复数	哈密顿四元数	复数化四元数
i	-1	-1	-1	k	k	-k	-j	-j	-j
j	k	-k	-k	-1	-1	1	-i	i	i
k	-j	j	-j	-i	-i	i	1	-1	1

图 1(a)~(c) 分别是超复数、哈密顿四元数和复数化四元数的二次映射中参数 c 的第四维分量 $\omega=0.022$ 时的三维广义 M 集. 从这些图中可以看

出,用四元代数法所构造的三维 M 集跟复平面上的 M 集几乎没有对应关系,因此,我们很难准确地把握这些三维 M 集精细的结构特征.

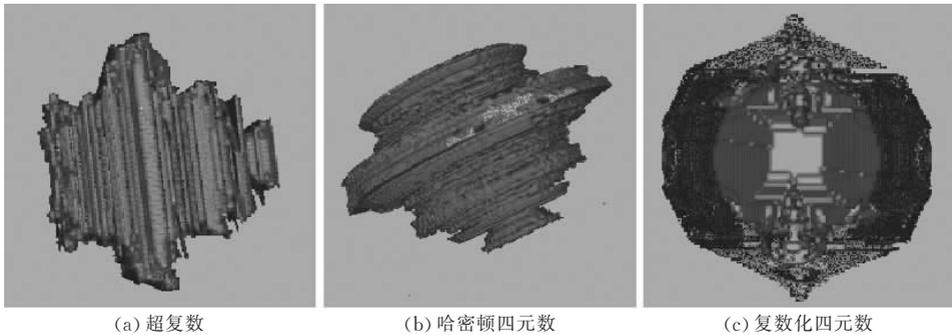


图 1 四元代数二次映射的三维广义 M 集

图 2(a)~(c) 分别是超复数映射的指数次数为 2,3,4 且映射中参数 c 的第四维分量 $\omega=0.022$ 时的三维广义 M 集. 图 3(a)~(c) 则是超复数映射的

指数次数与图 2 中的 M 集相对应而参数 c 的第四维分量 $\omega=0.22$ 时的三维广义 M 集.

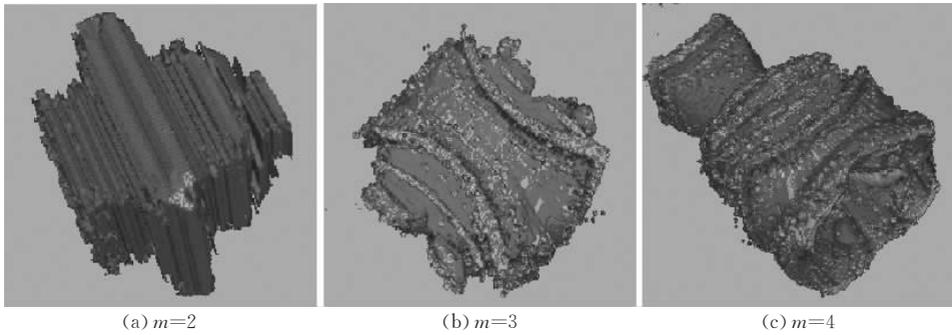


图 2 超复数映射中参数 c 的第四维分量取 0.022 时的三维广义 M 集

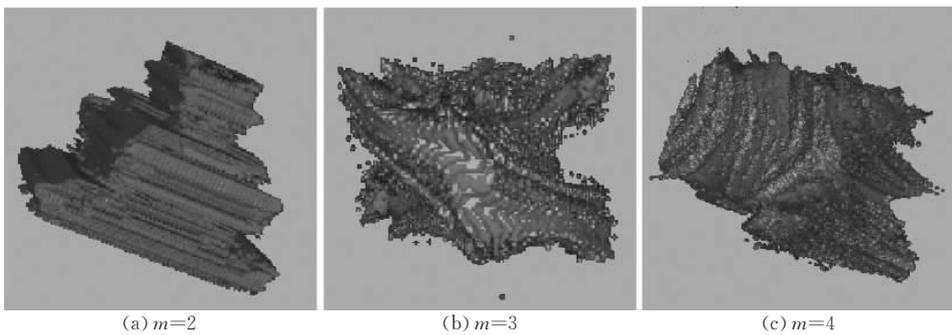


图 3 超复数映射中参数 c 的第四维分量取 0.22 时的三维广义 M 集

比较图 2 和 3 可以看出,用超复数来构造三维分形集时,为得到四维分形集在三维空间中的投影需给定一个投影方向(即给定参数 c 的第四维分量值),而不同的投影方向所得到的分形集往往会有很大的差异,尤其是在某些方向的三维投影并不具备分形的结构特征,因此用超复数构造三维分形集时存在不可控性.类似的,用哈密顿四元数和复数化四

元数构造三维分形集时也存在同样的问题.

4.2 三元数的三维 M 集

图 4(a)~(c)分别是三元数映射 $t \leftarrow t^m + c$ 的指数 m 为正整数 2,3,4 时的三维广义 M 集.从这 3 个图中可以看出,这些 M 集都关于一个垂直于屏幕的平面对称,由性质 1 可知,这个对称平面的方程为 $y+z=0$.

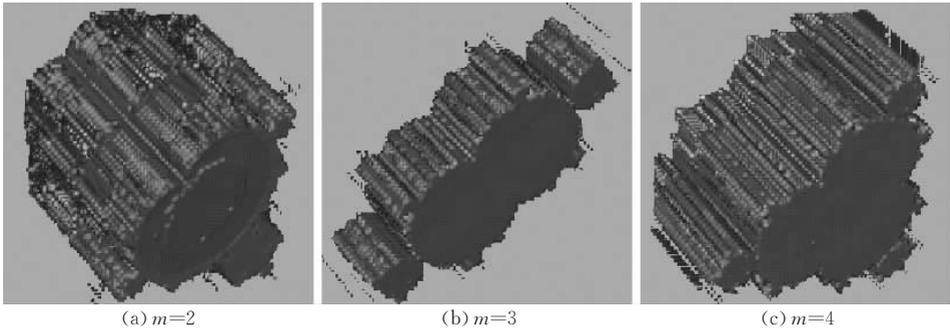


图 4 三元数映射的三维广义 M 集

从图 4 中我们还可以看出,这些三维 M 集是侧表面极不规则的柱状体,根据 2.3 节中性质 2 和性质 3 的描述,所有这些分形柱状体的底面与平面 $x-y+z=0$ 平行,而柱状体的轴线方程为 $x=-y=z$.

图 5(a)~(c)所示分别为图 4 中各分形集的底面,从中可以看出,这些柱状体的底面分别由 1 个、2

个、3 个旋转对称的完整花瓣构成,这与 2.3 节中性质 4 的描述完全一致.由此可见,三元数法所构造的三维 M 集与复平面上的二维 M 集有着很好的对应关系,因此,我们可以通过复平面上的 M 集来更好地了解 and 把握这些三维 M 集精细的结构特征.

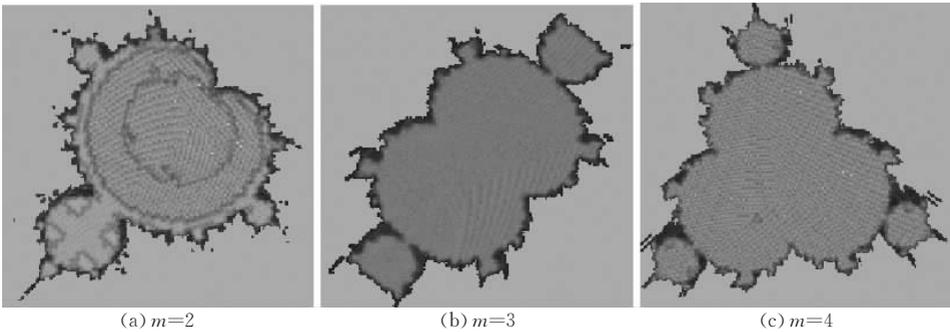


图 5 三元数映射指数为 2,3,4 时的广义 M 集的底面

此外,由于三元数的运算比四元代数的运算简单,三元数法和四元代数法在构造三维 M 集的过程中关键操作的执行频度分别为 $n \cdot 3^m$ 和 $n \cdot 4^m$ (其中, n 为判断三维空间内均匀网格上的一个点是否属于 M 集所需的迭代次数, m 为映射的指数),因此,三元数法构造三维 M 集的过程中计算给定三维空间中各离散网格点的周期时所需的迭代运算量更少,从而可以获得比四元代数法构造时更快的速度,而且,映射的指数 m 越大,三元数法的优越性越突出.

5 结 论

本文研究了基于三元数的三维广义 M 集表示方法,从理论上分析和证明了三元数映射 $t \leftarrow t^m + c$ ($t, c \in T, m \in N, m \geq 2$) 的三维广义 M 集所具有的性质.提出了基于周期检测的光线投射体绘制算法,根据周期值来定义给定三维空间中各离散网格点的颜色、不透明度和法向量,并采用 Newton-Raphson 方法来加速光线与 M 集的求交过程.

实验结果表明,用三元数来构造三维分形集具有形象、直观、可控性强等优点,有效地避免了四元代数法构造时所存在的问题,并比四元代数法具有更快的生成速度.进一步地,三元数构造三维 M 集的方法可以应用于其它形式的三维分形集的构造,相信可以取得较好的效果.

参 考 文 献

- 1 Norton Alan. Julia sets in the quaternions. *Computers and Graphics*, 1989, 13(2): 267~278
- 2 John C. Hart, Daniel J. Sandin, Louis H. Kauffman. Ray tracing deterministic 3-D fractals. *Computer Graphics*, 1989, 23(3): 289~296
- 3 John C. Hart, Louis H. Kauffman, Daniel J. Sandin. Interactive visualization of quaternion Julia sets. In: *Proceedings of the 1st Conference on Visualization '90*, San Francisco, California, 1990, 209~218
- 4 Qian Xiao-Fan, Li Mao-Cai. On constructing Julia set and Mandelbrot set in four-dimensional space. *Journal of Kunming University of Science and Technology*, 2000, 25(3): 107~110(in Chinese)
(钱晓凡, 李茂材. 在四维空间中构造 Julia 集和 Mandelbrot 集. *昆明理工大学学报*, 2000, 25(3): 107~110)
- 5 Bogush A., Gazizov A. Z., Kurochkin Yu. A., Stosui V. T.. On symmetry properties of quaternionic analogs of Julia sets. In: *Proceedings of the 9th Annual Seminar NPC-2000*, Minsk: Belarus, 2000, 304~309
- 6 Dominic Rochon. A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 2000, 8(4): 355~368
- 7 Terry W. Gintz. Artist's statement CQUATS—A non-distributive quad algebra for 3D rendering of Mandelbrot and Julia sets. *Computers & Graphics*, 2002, 26(2): 367~370
- 8 Qu Peng-Zhan. The N-ary number and its properties (I). *Journal of Baoji Teacher College(Natural Science)*, 1993, (1): 107~123(in Chinese)
(屈鹏展. N 元数及其性质(I). *宝鸡师范学院学报(自然科学版)*, 1993, (1): 107~123)
- 9 Qu Peng-Zhan. Analytic of three-ary number. *Journal of Baoji Teacher College(Natural Science)*, 1994, (2): 61~76(in Chinese)
(屈鹏展. 三元数解析. *宝鸡文理学院学报(自然科学版)*, 1994, (2): 61~76)
- 10 Gujar U. G., Bhavsar V. C.. Fractal images from $z \leftarrow z^a + c$ in the complex c-Plane. *Computers and Graphics*, 1991, 15(3): 441~449
- 11 Welstead S. T., Cromer T. L.. Coloring periodicities of two-dimensional mappings. *Computers and Graphics*, 1989, 13(4): 539~543



CHENG Jin, born in 1978, Ph. D. candidate. Her research interests include engineering & computer graphics.

TAN Jian-Rong, born in 1954, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include product information modeling, computer aided design & manufacture, engineering & computer graphics.

Background

In recent years, supported by the National Natural Science Foundation of China entitled *The Theory and Method of Mixed-dimension Graphics' Generation and Its Application in Transitional State Visualization*, our research group has done lots of work on the establishment of a brand-new system of mixed-dimension graphics theory and method, which include fractal method under constraint, generation of hyper-dimensional graphics based on fractal representation and mixed-dimension graphics construction on the basis of shapes in different dimension. A series of novel concepts and original

methods have been put forward, such as the Fuzzy-chaos algorithm of IFS system (published on *Chinese Journal of Computers* 1996), generation of fractal shape mapping under integral dimension constraint (published on *Journal of Computers* 2002), display of fractal with evolution (published on *Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing* 1998), and so on. The achievement of this paper is the presentation of a new fractal sets' generation method by use of ternary number system. As a result, it belongs to the first part of our research project.