# 粗糙模糊集的构造与公理化方法

吴伟志[1),2)] 张文修[1)] 徐宗本[1)]
[1)](西安交通大学理学院信息与系统科学研究所 西安 710049)
[2)](浙江海洋学院信息学院 舟山 316004)

**摘 要** 用构造性方法和公理化研究了粗糙模糊集. 由一个一般的二元经典关系出发构造性地定义了一对对偶的粗糙模糊近似算子,讨论了粗糙模糊近似算子的性质,并且由各种类型的二元关系通过构造得到了各种类型的粗糙模糊集代数. 在公理化方法中,用公理形式定义了粗糙模糊近似算子,各种类型的粗糙模糊集代数可以被各种不同的公理集所刻画. 阐明了近似算子的公理集可以保证找到相应的二元经典关系,使得由关系通过构造性方法定义的粗糙模糊近似算子恰好就是用公理化定义的近似算子.

**关键词** 粗糙集;粗糙模糊近似算子;二元关系;模糊集
**中图法分类号** TP18

# Characterizating Rough Fuzzy Sets in Constructive and Axiomatic Approaches

WU Wei-Zhi[1),2)] ZHANG Wen-Xiu[1)] XU Zong-Ben[1)]
[1)](*Institute of Information and System Sciences, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)
[2)](*Information College, Zhejiang Ocean University, Zhoushan* 316004)

**Abstract** The theory of rough sets can be developed in at least two approaches: constructive and axiomatic approaches, which are complementary to each other. The constructive approach is more suitable for practical applications of rough sets, while the axiomatic approach is appropriate for studying the structures of rough set algebra. In this paper, the constructive and axiomatic approaches in the study of rough fuzzy set are presented. In the constructive approach, one starts from a binary crisp relation and defines a pair of lower and upper rough fuzzy approximation operators. Different classes of rough fuzzy set algebra are obtained from different types of binary crisp relations. In the axiomatic approach, one defines a pair of dual rough fuzzy approximation operators and states that axioms must be satisfied by the operators. Various classes of rough fuzzy algebra are characterized by different sets of axioms. Axioms of rough fuzzy approximation operators guarantee the existence of certain types of binary crisp relations producing the same rough fuzzy operators.

**Keywords** rough sets; rough fuzzy approximation operators; binary relations; fuzzy sets

## 1 引 言

粗糙集理论是波兰数学家 Pawlak[1] 于 20 世纪 80 年代初提出的用于数据分析的理论. 由于粗糙集理论能够分析处理不精确、不协调和不完备信息,因此作为一种具有极大潜力和有效的知识获取工具受到了人工智能工作者的广泛关注. 目前,粗糙集

收稿日期:2002-11-11;修改稿收到日期:2003-06-25. 本课题得到国家自然科学基金(60373078)、国家“九七三”重点基础研究发展规划项目(2002CB312206)、浙江省教育厅科研计划项目(20020940)和浙江省新世纪 151 人才工程基金资助. **吴伟志**,男,1964 年生,博士后,副教授,研究方向为近似推理、粗糙集与随机集理论. E-mail: wuwz8681@sina.com. **张文修**,男,1940 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、遗传算法、模糊集、随机集、信息科学的数学基础等. **徐宗本**,男,教授,博士生导师,目前主要研究方向为计算智能、非线性算子理论、信息科学的数学基础等.

理论已被成功地应用在机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持与分析、过程控制、模式识别等计算机领域，该理论已成为计算机和信息科学的研究热点之一.

粗糙集理论的主要思想是不精确的概念(被近似集)如何用可利用的知识库中的已知知识(近似空间中的可定义集全体)来近似描述. 粗糙集理论与应用的核心基础是从近似空间导出的一对非数值型算子——上近似算子和下近似算子，并且这对算子与证据理论中的一对数值型算子——似然测度与信任测度——的关系非常密切，集合的上、下近似被看成是对该集合近似好坏的定性描述，而集合的似然测度与信任测度又可以看成是对该集合近似好坏的定量描述，甚至从一定程度上可以将粗糙集理论看成是证据理论的基础[2]. 通常对粗糙集近似算子的研究主要有两种方法：构造性方法和公理化方法. 构造性方法是以论域上的二元关系、邻域系统或布尔子代数等作为基本要素构造性地定义近似算子，然后导出粗糙集代数系统[3,4]. 由于二元关系常用来表示信息系统中的可利用信息，所以目前所见的粗糙集在数据分析中的应用基本上都是用构造性方法去定义近似算子. 公理化方法的基本要素是满足某些公理集的近似算子，即粗糙集代数系统是事先给定的，然后去找二元关系使得由二元关系通过构造性方法定义的近似算子及其导出的粗糙集代数系统恰好就是事先给定的近似算子和粗糙集代数系统，这种粗糙集代数系统是由集合代数系统中的三个集合算子(交、并、补)加上两个粗糙算子(上、下近似算子)而形成的，这些算子非常相似于模态逻辑中的五个模态算子.

用公理化方法研究粗糙集最早的工作当属我国的刘清及其国际合作者 Lin[5]. 由于他们所给出的公理集不独立，祝峰与何华灿[6]对其进行了改进. Thiele[7]与 Yao[8]分别对于一般关系下的经典粗糙近似算子的定义与公理化作了比较完整的刻画. Morsi 与 Yakout[9]对于模糊粗糙集的公理化进行了研究，但文献[9]所得到的近似算子是基于模糊相似关系的(即模糊等价关系)且不具有对偶性. 虽然 Thiele[10]对于一般模糊关系与模糊近似算子的公理化进行了研究，但文献[10]也没有给出各种具体的模糊关系与所对应的模糊近似算子的公理集，吴伟志等[11]对于一般模糊关系下的对偶模糊粗糙近似算子的构造与公理化进行了研究，且得到刻画各种模糊关系所对应的模糊粗糙近似算子的最小公理集. 米据生等[12]又进一步对由 $T$-模和 $S$-模定义的模糊粗糙近似算子进行了公理化刻画. 众所周知，模糊环境下的粗糙集分为模糊粗糙集与粗糙模糊集[13]，为此，Thiele[10]又对于由经典关系导出的粗糙模糊近似算子的公理化进行了研究，然而类似于文献[10]仍没有给出各种经典关系与对应的粗糙模糊近似算子的具体公理集. 本文用构造性方法和公理化方法对粗糙模糊近似算子进行了研究，用构造性方法定义了广义粗糙模糊近似算子，讨论了近似算子的性质，并用公理化方法对粗糙模糊近似算子进行了特征刻画，得到了刻画各种经典关系所对应的粗糙模糊近似算子的最小公理集.

## 2 广义粗糙模糊集的构造

设 $X$ 是一个有限非空集合，记 $P(X)$ 与 $F(X)$ 分别为 $X$ 的经典与模糊子集全体. 记 $I=[0,1]$. 对于 $A\in F(X)$，$A(x)$ 表示 $x$ 属于模糊集合 $A$ 的隶属度. $A$ 的补集记为 $\sim A$. 对于 $\alpha\in I$，$\underline{\underline{\alpha}}$ 表示隶属函数取值恒为 $\alpha$ 的常数模糊集.

设 $U$ 和 $W$ 是两个非空有限论域，称 $R\subseteq U\times W$ 是从 $U$ 到 $W$ 的一个二元经典关系. $\forall x\in U$，记 $R_s(x)=\{y\in W:(x,y)\in R\}$，$R_s(x)$ 称为 $x$ 关于关系 $R$ 的后继邻域. 若 $\forall x\in U$，$R_s(x)\neq\varnothing$，则称 $R$ 为串行的(serial). 若 $U=W$，则称 $R\subseteq U\times U$ 为 $U$ 上的一个二元经典关系. 对于 $U$ 上的二元经典关系 $R$，若 $\forall x\in U$，有 $x\in R_s(x)$，称关系 $R$ 是自反的(reflexive)；若 $\forall (x,y)\in U\times U$，$y\in R_s(x)$ 蕴涵 $x\in R_s(y)$，称关系 $R$ 是对称的(symmetric)；若 $\forall x,y,z\in U$，$y\in R_s(x)$ 与 $z\in R_s(y)$ 蕴涵 $z\in R_s(x)$，称关系 $R$ 是传递的(transitive)；若 $\forall x,y,z\in U$，$y\in R_s(x)$ 和 $z\in R_s(x)$ 蕴涵 $z\in R_s(y)$，称关系 $R$ 是欧几里得的(Euclidean).

**定义 1.** 设 $R$ 是从 $U$ 到 $W$ 上的一个二元经典关系，称三元组 $(U,W,R)$ 为广义近似空间. $\forall A\in F(W)$，$A$ 关于近似空间 $(U,W,R)$ 的上近似 $\overline{RF}(A)$ 与下近似 $\underline{RF}(A)$ 是 $U$ 的一对模糊子集，其隶属函数分别定义为

$$\overline{RF}(A)(x)=\bigvee_{y\in R_s(x)}A(y),\ x\in U,$$

$$\underline{RF}(A)(x)=\bigwedge_{y\in R_s(x)}A(y),\ x\in U.$$

序对 $(\underline{RF}(A),\overline{RF}(A))$ 称为(广义)粗糙模糊集，算子 $\underline{RF}$ 与 $\overline{RF}:F(W)\rightarrow F(U)$ 分别称为(广义)粗糙模糊下、上近似算子.

**注 1.** 显然，当 $A\in P(W)$ 时，

$$\underline{RF}(A)(x)=1\Leftrightarrow R_s(x)\subseteq A,$$

$$\overline{RF}(x)=1\Leftrightarrow R_s(x)\cap A\neq\varnothing.$$

故粗糙模糊近似算子是一般关系下经典广义近似算子的推广形式. 另一方面,经典关系可以看成是特殊的模糊关系,由我们的定义可以看出,(广义)粗糙模糊集是(广义)模糊粗糙集的特殊形式.

由模糊粗糙集的性质[11]可以得到以下定理.

**定理 1.** 设 $R$ 是从 $U$ 到 $W$ 上的一个二元经典关系,则粗糙模糊近似算子 $\underline{RF}$ 与 $\overline{RF}$ 满足性质: $\forall A, B\in F(W)$, $\forall \alpha\in I$,

(RFL1) $\underline{RF}(A)=\sim\overline{RF}(\sim A)$,

(RFL2) $\underline{RF}(A\vee\underline{\underline{\alpha}})=\underline{RF}(A)\vee\underline{\underline{\alpha}}$,

(RFL3) $\underline{RF}(A\wedge B)=\underline{RF}(A)\wedge\underline{RF}(B)$;

(RFU1) $\overline{RF}(A)=\sim\underline{RF}(\sim A)$,

(RFU2) $\overline{RF}(A\wedge\underline{\underline{\alpha}})=\overline{RF}(A)\wedge\underline{\underline{\alpha}}$,

(RFU3) $\overline{RF}(A\vee B)=\overline{RF}(A)\vee\overline{RF}(B)$.

性质(RFL1)与(RFU1)称为对偶性质,有时也称有相同数字标号的一对性质为对偶性质. 性质(RFL1)～(RFL3)与(RFL1)～(RFL3)都是独立的,它们分别蕴含以下的性质:

(RFL4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{RF}(A)\subseteq\underline{RF}(B)$,

(RFL5) $\underline{RF}(A\vee B)\supseteq\underline{RF}(A)\vee\underline{RF}(B)$;

(RFU4) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{RF}(A)\subseteq\overline{RF}(B)$,

(RFU5) $\overline{RF}(A\wedge B)\subseteq\overline{RF}(A)\wedge\overline{RF}(B)$.

显然性质(RFL2)与(RFU2)蕴含以下性质(RFL2)′与(RFU2)′:

(RFL2)′ $\underline{RF}(W)=U$, (RFU2)′ $\overline{RF}(\varnothing)=\varnothing$.

**定理 2.** 设 $R$ 是从 $U$ 到 $W$ 上的一个二元经典关系,则 $R$ 是串行的当且仅当下列性质之一成立:

(RFL0) $\underline{RF}(\underline{\underline{\alpha}})=\underline{\underline{\alpha}}$, $\forall\alpha\in I$,

(RFU0) $\overline{RF}(\underline{\underline{\alpha}})=\underline{\underline{\alpha}}$, $\forall\alpha\in I$,

(RFL0)′ $\underline{RF}(\varnothing)=\varnothing$,

(RFU0)′ $\overline{RF}(W)=U$,

(RFL$U$) $\underline{RF}(A)\subseteq\overline{RF}(A)$, $\forall A\in F(W)$.

证明. 首先由定理 1 的对偶性可知(RFL0)⇔(RFU0),(RFL0)′⇔(RFU0)′. 其次,(RFL0)⇒(RFL0)′为显然. 若(RFL0)′成立,则在性质(RFL2)中取 $A=\varnothing$ 即得性质(RFL0). 另一方面,将经典关系看成一个特殊的模糊关系,由文献[11]中的定理 3.8 知 $R$ 是串行的 $\Leftrightarrow\overline{RF}(W)=U\Leftrightarrow\underline{RF}(\varnothing)=\varnothing\Leftrightarrow\underline{RF}(A)\subseteq\overline{RF}(A)$, $\forall A\in F(W)$. 从而定理得证. 证毕.

**定理 3.** 设 $R$ 是 $U$ 上的一个二元经典关系,则

(1) $R$ 是自反关系

⇔(RFL6) $\underline{RF}(A)\subseteq A$, $\forall A\in F(U)$,

⇔(RFU6) $A\subseteq\overline{RF}(A)$, $\forall A\in F(U)$.

(2) $R$ 是对称关系

⇔(RFL7) $A\subseteq\underline{RF}(\overline{RF}(A))$, $\forall A\in F(U)$,

⇔(RFU7) $\overline{RF}(\underline{RF}(A))\subseteq A$, $\forall A\in F(U)$,

⇔(RFL7)′ $\underline{RF}(1_{U-\{x\}})(y)=\underline{RF}(1_{U-\{y\}})(x)$, $\forall(x,y)\in U\times U$,

⇔(RFU7)′ $\overline{RF}(1_x)(y)=\overline{RF}(1_y)(x)$, $\forall(x,y)\in U\times U$.

(3) $R$ 是传递关系

⇔(RFL8) $\underline{RF}(A)\subseteq\underline{RF}(\underline{RF})(A)$, $\forall A\in F(U)$,

⇔(RFU8) $\overline{RF}(\overline{RF})(A)\subseteq\overline{RF}(A)$, $\forall A\in F(U)$.

(4) $R$ 是欧几里得关系

⇔(RFL9) $\overline{RF}(\underline{RF}(A))\subseteq\underline{RF}(A)$, $\forall A\in F(U)$,

⇔(RFU9) $\overline{RF}(A)\subseteq\underline{RF}(\overline{RF}(A))$, $\forall A\in F(U)$.

其中 $1_x$ 表示单点集 $\{x\}$ 的特征函数.

证明. (1) 由粗糙模糊近似算子的对偶性知(RFL6)与(RFU6)是等价的.

“⇐”取 $A\in P(U)$,则由注 1 和文献[3]中的定理 3.5 即得.

“⇒”将 $R$ 看成是一个特殊的模糊关系,则由文献[12]中的定理 2.3 即得.

(2) 由粗糙模糊近似算子的对偶性知(RFL7)与(RFU7),(RFL7)′与(RFU7)′分别是等价的. 取 $A\in P(U)$,则由文献[3]中的定理 3.7 知

(RFL7)⇒$R$ 是对称的.

反之,若 $R$ 是对称关系,我们来证(RFL7)成立(用反证法). 若不然,则存在 $A\in F(U)$ 和 $x_0\in U$ 使

$$A(x_0)>\underline{RF}(\overline{RF}(A))(x_0)=\bigwedge_{y\in R_s(x_0)}\bigvee_{z\in R_s(y)}A(z).$$

于是存在 $y_0\in R_s(x_0)$,使对于任意 $z\in R_s(y_0)$ 有 $A(x_0)>A(z)$. 由于 $R$ 是对称的,因此由 $y_0\in R_s(x_0)$ 可得 $x_0\in R_s(y_0)$,这样就有 $A(x_0)>A(x_0)$,矛盾! 从而由 $R$ 的对称性可推得(RFL7)成立.

另一方面,将 $R$ 看成是一个特殊的模糊关系,则由文献[12]中的定理 2.4 可得

$R$ 是对称的 ⇔(RFL7)′⇔(RFU7)′.

(3) 由粗糙模糊近似算子的对偶性知(RFL8)与(RFU8)是等价的.

“⇐”取 $A\in P(U)$,则由文献[3]中的定理 3.6 即得.

“⇒”将 $R$ 看成是一个特殊的模糊关系,则由文

献[11]中的定理 3.12 即得.

(4)由粗糙模糊近似算子的对偶性知(RFL9)与(RFU9)是等价的.

“⇐”取 $A\in P(U)$，则由文献[3]中的定理 3.8 即得.

“⇒”只须证

$R$ 是欧几里得关系⇒(RFU9)(用反证法).

若(RFU9)不成立，则存在 $A\in F(U)$和 $x_0\in U$ 使

$$\overline{RF}(A)(x_0)>\underline{RF}(\overline{RF}(A))(x_0),$$

即

$$\bigvee_{y\in R_s(x_0)}A(y)>\bigwedge_{y\in R_s(x_0)}\bigvee_{z\in R_s(y)}A(z).$$

从而存在 $y_0\in R_s(x_0)$，存在 $z_0\in R_s(x_0)$使对于任意 $z\in R_s(z_0)$有 $A(y_0)>A(z)$. 但由于 $R$ 是欧几里得关系，从而由 $y_0\in R_s(x_0)$与 $z_0\in R_s(x_0)$可得 $y_0\in R_s(z_0)$，这样便推出 $A(y_0)>A(y_0)$的矛盾结论. 故(4)得证. 证毕.

## 3 近似算子的公理化刻画

在粗糙模糊集的公理化刻画中，基本要素是系统$(F(U),F(W),\wedge,\vee,\sim,L,H)$，其中 $L,H:F(W)\to F(U)$是一元集合算子. 下面我们给出各种粗糙模糊近似算子的最小公理集刻画.

**定义 2.** 设 $L,H:F(W)\to F(U)$是两个集合算子. 称它们为对偶算子，若 $\forall A\in F(W)$，

$$(\text{rfl1})L(A)=\sim H(\sim A),$$

$$(\text{rfu1})H(A)=\sim L(\sim A).$$

由近似算子的对偶性我们只须定义其中的一个算子，而另一个可以由对偶性得到，例如有了 $H$ 后，则可以通过 $L=\sim H(\sim)$得到 $L$.

**定理 4.** 设 $L,H:F(W)\to F(U)$是对偶算子. 则存在从 $U$ 到 $W$ 上的二元经典关系 $R$ 使得对于任意 $A\in F(W)$有

$$L(A)=\underline{RF}(A),\quad H(A)=\overline{RF}(A),$$

当且仅当 $L$ 满足公理(rfl)，(rfl2)，(rfl3)，或等价地 $H$ 满足公理(rfu)，(rfu2)，(rfu3)：$\forall A,B\in F(W)$，$\forall\alpha\in I$，

$$(\text{rfl})L(1_{W-\{y\}})\in P(U),\forall y\in W,$$

$$(\text{rfu})H(1_y)\in P(U),\forall y\in W;$$

$$(\text{rfl2})L(A\vee\underline{\underline{\alpha}})=L(A)\vee\underline{\underline{\alpha}},$$

$$(\text{rfu2})H(A\wedge\underline{\underline{\alpha}})=H(A)\wedge\underline{\underline{\alpha}};$$

$$(\text{rfl3})L(A\wedge B)=L(A)\wedge L(B),$$

$$(\text{rfu3})H(A\vee B)=H(A)\vee H(B).$$

证明. “⇒”由粗糙模糊近似算子的构造性定义 1 和定理 1 即得.

“⇐”若 $H$ 满足公理(rfu)，(rfu2)，(rfu3)，由公理(rfu)并利用 $H$，我们定义从 $U$ 到 $W$ 上的二元经典关系 $R$ 如下：

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow H(1_y)(x)=1,\ (x,y)\in U\times W.$$

显然

$$y\in R_s(x)\Leftrightarrow H(1_y)(x)=1,$$

$$y\notin R_s(x)\Leftrightarrow H(1_y)(x)=0.$$

对于任意 $A\in F(W)$，注意到

$$A=\bigvee_{y\in W}(1_y\wedge\underline{\underline{A(y)}}).$$

这样对于任意 $x\in U$，由$\overline{RF}$的定义，公理(rfu2)和(rfu3)得

$$\overline{RF}(A)(x)=\bigvee_{y\in R_s(x)}A(y)=\bigvee_{y\in W}\lfloor H(1_y)(x)\wedge A(y)\rfloor$$

$$=\bigvee_{y\in W}\lfloor H(1_y)\wedge\underline{\underline{A(y)}}\rfloor(x)=\bigvee_{y\in W}\lfloor H(1_y\wedge\underline{\underline{A(y)}})\rfloor(x)$$

$$=H(\bigvee_{y\in W}(1_y\wedge\underline{\underline{A(y)}}))(x)=H(A)(x).$$

从而由 $x\in U$ 的任意性得 $H(A)=\overline{RF}(A)$.

由对偶性可得 $L(A)=\underline{RF}(A)$.

由定理 4 知，公理集(rfl)，(rfl1)，(rfl2)，(rfl3)，或公理集(rfu)，(rfu1)，(rfu2)，(rfu3)是刻画对偶粗糙模糊近似算子的最小公理集，由此可得以下粗糙模糊集代数的定义.

**定义 3.** 设 $L,H:F(W)\to F(U)$是一对对偶算子. 若 $L$ 满足公理集(rfl)，(rfl2)与(rfl3)，或等价地 $H$ 满足公理集(rfu)，(rfu2)与(rfu3)，则系统$(F(W),F(U),\wedge,\vee,\sim,L,H)$称为粗糙模糊集代数，$L$ 与 $H$ 分别称为下、上粗糙模糊近似算子.

**注 2.** 显然，粗糙模糊近似算子满足性质：

$$(\text{rfl4})A\subseteq B\Rightarrow L(A)\subseteq L(B),$$

$$(\text{rfu4})A\subseteq B\Rightarrow H(A)\subseteq H(B);$$

$$(\text{rfl5})L(A\vee B)\supseteq L(A)\vee L(B),$$

$$(\text{rfu5})H(A\wedge B)\subseteq H(A)\wedge H(B),$$

且有

$$H(\varnothing)=\varnothing\Leftrightarrow L(W)=U.$$

**定理 5.** 设 $L,H:F(W)\to F(U)$是一对对偶的粗糙模糊近似算子，即 $L$ 满足公理(rfl)，(rfl2)，(rfl3)，或等价地 $H$ 满足公理(rfu)，(rfu2)，(rfu3). 则存在从 $U$ 到 $W$ 上的串行经典关系 $R$ 使

$$L(A)=\underline{RF}(A),H(A)=\overline{RF}(A),\forall A\in F(W),$$

当且仅当 $L$ 满足公理(rfl0)或等价地 $H$ 满足公理(rfu0)：

$$(\text{rfl0})L(\underline{\underline{\alpha}})=\underline{\underline{\alpha}},\forall\alpha\in I,$$

$(\mathrm{rfu0})\,H(\underline{\underline{\alpha}}) = \underline{\underline{\alpha}},\ \forall\,\alpha \in I.$

**证明.** 由定理 4 和定理 2 即得.

**注 3.** 由定理 2 知, 公理(rfl0),(rfu0)可以被以下之一的公理所代替:

$(\mathrm{rfl0})'\,L(\varnothing) = \varnothing,$

$(\mathrm{rfu0})'\,H(W) = U,$

$(\mathrm{rfl}u)\,L(A) \subseteq H(A),\ \forall\,A \in F(W).$

显然,串行粗糙模糊近似算子(即满足定理 5 的粗糙模糊近似算子,以下同)满足性质(以下当算子后面的括号省去时是指从右到左结合进行运算,下同):

$$LLA \subseteq LHA \subseteq HHA,\ \forall\,A \in F(W),$$
$$LLA \subseteq HLA \subseteq HHA,\ \forall\,A \in F(W).$$

**定理 6.** 设 $L,H:F(U)\to F(U)$是一对对偶的粗糙模糊近似算子. 则存在 $U$ 上的自反经典关系 $R$ 使

$$L(A) = \underline{RF}(A),\ H(A) = \overline{RF}(A),\ \forall\,A \in F(U)$$

当且仅当 $L$ 满足公理(rfl6)或等价地 $H$ 满足公理(rfu6):

$$(\mathrm{rfl6})\,LA \subseteq A,\ \forall\,A \in F(U),$$
$$(\mathrm{rfu6})\,A \subseteq HA,\ \forall\,A \in F(U).$$

**证明.** 由定理 4 和定理 3 的(1)即得.

**注 4.** 显然,自反粗糙模糊近似算子满足性质:

$$LLA \subseteq LA \subseteq A \subseteq HA \subseteq HHA,\ \forall\,A \in F(U),$$
$$LLA \subseteq LA \subseteq LHA \subseteq HHA,\ \forall\,A \in F(U),$$
$$LLA \subseteq HLA \subseteq HA \subseteq HHA,\ \forall\,A \in F(U).$$

**定理 7.** 设 $L,H:F(U)\to F(U)$是一对对偶的粗糙模糊近似算子. 则存在 $U$ 上的对称经典关系 $R$ 使

$$L(A) = \underline{RF}(A),\ H(A) = \overline{RF}(A),\ \forall\,A \in F(U)$$

当且仅当 $L$ 满足公理(rfl7)或等价地 $H$ 满足公理(rfu7):

$$(\mathrm{rfl7})\,A \subseteq LHA,\ \forall\,A \in F(U),$$
$$(\mathrm{rfu7})\,HLA \subseteq A,\ \forall\,A \in F(U).$$

**证明.** 由定理 4 和定理 2 的(2)即得.

**注 5.** 由定理 3 知,对称粗糙模糊近似算子可以等价地被以下公理之一所刻画:

$$(\mathrm{rfl7})'\,L(1_{U-\{y\}})(x) = L(1_{U-\{x\}})(y),\quad \forall\,(x,y) \in U\times U,$$

$$(\mathrm{rfu7})'\,H(1_y)(x) = H(1_x)(y),\quad \forall\,(x,y) \in U\times U.$$

**注 6.** 由文献[11]可知,对于模糊粗糙近似算子而言,其对称性不能被公理(rfl7)与(rfu7)所刻画,而只能由公理(rfl7)′与(rfu7)′来刻画. 事实上,在缺少公理(rfl)与(rfu)时,若有(rfl2),(rfl3),或(rfu2),(rfu3),则公理(rfl7)与(rfu7)蕴涵了(rfl)与(rfu), 即有以下定理.

**定理 8.** 设 $L,H:F(U)\to F(U)$是一对对偶算子,且 $L$ 满足公理(rfl2),(rfl3),或等价地 $H$ 满足公理(rfu2),(rfu3),则

$$HLA\subseteq A,\ \forall\,A\in F(U)\Rightarrow H(1_y)\in P(U),\ \forall\,y\in U.$$

证明. 注意到$\forall\,A\in F(U)$有

$$A = \bigvee_{y\in U}\lfloor 1_y \wedge \underline{\underline{A(y)}}\rfloor.$$

从而由公理(rfu2)和(rfu3)可得

$$HA = \bigvee_{y\in U}\lfloor H(1_y) \wedge \underline{\underline{A(y)}}\rfloor. \tag{1}$$

再由 $L$ 与 $H$ 的对偶性可得

$$LA = \bigwedge_{y\in U}\lfloor (1-H(1_y)) \vee \underline{\underline{A(y)}}\rfloor \tag{2}$$

$\forall\,z\in U$,令 $A=1_{U-\{z\}}$,则由式(2)得

$$\begin{aligned} LA &= \bigwedge_{y\in U}\lfloor (1-H(1_y)) \vee \underline{\underline{A(y)}}\rfloor \\ &= \bigwedge_{y\in U}\lfloor (1-H(1_y)) \vee \underline{\underline{1_{U-\{z\}}(y)}}\rfloor \\ &= 1 - H(\sim A) = 1 - H(1_z), \end{aligned}$$

从而再次利用式(1)得

$$HLA = \bigvee_{y\in U}\lfloor H(1_y) \wedge \underline{\underline{1-H(1_z)(y)}}\rfloor.$$

于是由条件得

$$\begin{aligned} HLA(x) &= \bigvee_{y\in U}\lfloor H(1_y)(x) \wedge (1-H(1_z)(y))\rfloor \\ &\le A(x) = 1_{U-\{z\}}(x),\ \forall\,x \in U. \end{aligned}$$

在上式中取 $x=z$,则得

$$\bigvee_{y\in U}\lfloor H(1_y)(z) \wedge (1-H(1_z)(y))\rfloor = 0.$$

这说明

$$H(1_y)(z) \wedge (1-H(1_z)(y)) = 0,\ \forall\,(y,z)\in U\times U \tag{3}$$

故或者 $H(1_y)(z)=0$ 或者 $H(1_z)(y)=1$. 假若 $H(1_y)(z)\neq 0$,则 $H(1_z)(y)=1$,由式(3)知

$$H(1_z)(y) \wedge (1-H(1_y)(z)) = 0.$$

因此 $H(1_y)(z)=1$.

这样我们证明了对于任意$(y,z)\in U\times U$,或者 $H(1_y)(z)=0$ 或者 $H(1_y)(z)=1$. 即 $H(1_y)\in P(U)$.

证毕.

**注 7.** 定理 8 表明,公理集(rfl1),(rfl2),(rfl3),(rfl7),或等价公理集(rfu1),(rfu2),(rfu3),(rfu7)是刻画对称粗糙模糊近似算子的最小公理集.

可以验证,对称粗糙模糊近似算子还满足性质:

$$LA = LHLA,\ HA = HLHA,\ \forall\,A \in F(U),$$
$$HA \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq LB,\ \forall\,A,B \in F(U).$$

**定理 9.** 设 $L,H:F(U)\to F(U)$是一对对偶的粗糙模糊近似算子,则存在 $U$ 上的传递经典关系 $R$ 使

$L(A)=\underline{RF}(A), H(A)=\overline{RF}(A), \forall A\in F(U)$
当且仅当 $L$ 满足公理(rfl8)，或等价地 $H$ 满足公理(rfu8)：

(rfl8) $LA\subseteq LLA, \forall A\in F(U)$,

(rfu8) $HHA\subseteq HA, \forall A\in F(U)$.

证明. 由定理 4 和定理 2 的(3)即得.

**注 8.** 可以验证，传递粗糙模糊近似算子还满足以下性质：

$$LA\subseteq B\Rightarrow LA\subseteq LB,\ A,B\in F(U),$$
$$A\subseteq HB\Rightarrow HA\subseteq HB, A,B\in F(U).$$

**定理 10.** 设 $L,H:F(U)\to F(U)$ 是一对对偶的粗糙模糊近似算子，则存在 $U$ 上的欧几里得经典关系 $R$ 使

$L(A)=\underline{RF}(A), H(A)=\overline{RF}(A), \forall A\in F(U)$
当且仅当 $L$ 满足公理(rfl9)，或等价地 $H$ 满足公理(rfu9)：

(rfl9) $HLA\subseteq LA, \forall A\in F(U)$,

(rfu9) $HA\subseteq LHA, \forall A\in F(U)$.

证明. 由定理 4 和定理 2 的(4)即得.

**注 9.** 可以验证，欧几里得粗糙模糊近似算子还满足以下性质：

$$A\subseteq LB\Rightarrow HA\subseteq LB, A,B\in F(U),$$
$$HA\subseteq B\Rightarrow HA\subseteq HB, A,B\in F(U),$$
$$HLA\subseteq LLA, HHA\subseteq LHA, A,B\in F(U).$$

## 4 结束语

构造性方法和公理化方法是研究粗糙集结构的两种主要方法.粗糙集理论研究的早期工作大部分是构造性方法，该方法有很强的应用背景，所研究的问题也往往应实际例子的需要而产生，其缺点是不易深刻了解粗糙集的代数结构.相对而言，用公理化方法研究粗糙集比用构造性方法研究粗糙集的工作少很多，公理化方法的最大特点可以深刻地理解各类近似算子的结构特征.迄今为止，对经典关系下的经典粗糙集和模糊关系下的模糊粗糙集的构造和公理化刻画有了比较成熟的研究成果. 本文对经典关系下的粗糙模糊近似算子用构造性方法进行了研究，并对其进行了公理化刻画，给出了各种经典关系所对应的粗糙模糊近似算子的最小公理集刻画，还讨论了各类粗糙模糊近似算子的蕴涵性质，从中发现了模糊粗糙集与粗糙模糊集结构之间的联系与差别.本文工作既是经典集情形[7,8]的实质性推广，也是对于模糊环境下的近似算子的公理化刻画的一个比较完整的补充，使粗糙集理论中的几种重要的近似算子都有了比较清楚的公理化刻画.

## 参 考 文 献

1 Pawlak Z.. Rough sets. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341～356

2 Wu Wei-Zhi, Leung Yee, Zhang Wen-Xiu. Connections between rough set theory and Dempster-Shafer theory of evidence. International Journal of General Systems, 2002, 31(4): 405～430

3 Zhang Wen-Xiu, Wu Wei-Zhi, Liang Ji-Ye, Li De-Yu. Rough Set Theory and Approaches. Beijing: Science Press, 2001(in Chinese)
(张文修，吴伟志，梁吉业，李德玉. 粗糙集理论与方法. 北京：科学出版社，2001)

4 Wu Wei-Zhi, Zhang Wen-Xiu. Neighborhood operator systems and approximations. Information Sciences: An International Journal, 2002, 144(1/4): 201～217

5 Lin T. Y., Liu Q.. Rough approximate operators: axiomatic rough set theory. In: Ziarko W ed. Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery, Berlin: Springer, 1994, 256～260

6 Zhu Feng, He Hua-Can. The axiomatization of the rough set. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(3): 330～333(in Chinese)
(祝 峰，何华灿. 粗集的公理化. 计算机学报，2000，33(3)：330～333)

7 Thiele H.. On axiomatic characterisations of crisp approximation operators. Information Sciences: An International Journal, 2000, 129: 221～226

8 Yao Y. Y.. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets. Journal of Information Sciences, 1998, 109(1-4): 21～47

9 Morsi N. N., Yakout M. M.. Axiomatics for fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(1-2): 327～342

10 Thiele H.. On axiomatic characterisation of fuzzy approximation operators I, the fuzzy rough set based case. In: Proceedings of Conference RSCTC 2000, Banff Park Lodge, Bariff, Canada, 2000, 239～247

11 Wu Wei-Zhi, Mi Ju-Sheng, Zhang Wen-Xiu. Generalized fuzzy rough sets. Information Sciences, 2003, 151: 263～282

12 Mi Ju-Sheng, Wu Wei-Zhi, Zhang Wen-Xiu. Constructive and axiomatic approaches for the study of the theory of rough sets. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(3): 280～284(in Chinese)
(米据生，吴伟志，张文修. 粗糙集的构造与公理化方法. 模式识别与人工智能，2002，15(3)：280～284)

13 Dubois D., Prade H.. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191～208

**WU Wei-Zhi**, born in 1964, associate professor, postdoctor. His research interests include approximate reasoning, rough sets, and random sets.

**ZHANG Wen-Xiu**, born in 1940, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include rough sets, genetic algorithms, fuzzy sets, random sets, and mathematical foundation of information science.

**XU Zong-Ben**, born in 1955, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computational intelligence, nonlinear operator theory, and mathematical foundation of information science.

**Background**

This work is supported by a grant from the National Natural Science Foundation of China. The project, entitled "the rough set theory under random and fuzzy environment and its application to knowledge acquisition", is to study the rough set theory under random and fuzzy environments, to explore systematically various approaches to knowledge acquisition in information systems under complex environment, and to analyze the uncertainty of the acquired knowledge. Such an overall objective will be realized through the following specific goals:

1. To characterize the structure of rough approximation operators and to construct multi-step approximation operator systems under fuzzy and random environments.

2. To build the relationships between the rough sets with belief measure, plausible measure, possibility measure, necessity measure, and fuzzy entropy.

3. To introduce new concepts of knowledge reduction, and to study the relationships among the new concepts and the existing concepts of knowledge reduction.

4. To build a model of knowledge system under the fuzzy environment.

In recent years, the authors have been carrying out basic research in rough set theory. They have also been involved in the development and application of rough set models for data mining and knowledge discovery.

This paper is to solve one part of the first specific goal of the project, i. e., to characterize the structure of rough fuzzy approximation operators by axiomatic approach.