

关于 P3P 问题解的唯一性条件的几点讨论

周 鑫 朱 枫

(中国科学院沈阳自动化研究所机器人学重点实验室 沈阳 110016)

摘 要 P3P 问题的多解现象使其应用受到了限制,前人的研究结果对布置控制点和摄像机没有太大的指导意义,该文作者采用了与前人不同的研究方法,发现 3 个控制点构成等腰三角形时,在空间可以找到一些区域,当摄像机在这些区域中时,可以唯一地求出所构成的 P3P 问题的真实解.同时,该文的研究结果又对 P3P 问题在实际应用中布置控制点和摄像机的位置具有指导意义.

关键词 P3P 问题;多解现象;唯一解;控制点;摄像机

中图法分类号 TP391

A Note on Unique Solution Conditions of the P3P Problem

ZHOU Xin ZHU Feng

(Robotics Laboratory, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016)

Abstract The multi-solution phenomenon of the P3P problem limits its applications in practices, and the results of predecessors are not effective in directing us to dispose the control points and the camera. We use a new approach other than the predecessors' to study the P3P problem, and find that when the three control points form an isosceles triangle, we can find some spatial regions, and when the camera appears in these spatial regions, we can get the real solution of the formed P3P problem uniquely. And the results we obtain are also very useful for disposing control points and the camera in the practical applications.

Keywords the P3P problem; multi-solution phenomenon; unique solution; control points; camera

1 引 言

PnP(Perspective- n -Point)问题是 1981 年首先由 Fischler 和 Bolles^[1]提出的,即给定 n 个控制点的相对空间位置以及每对控制点与光心连线所形成的夹角,求出各个控制点到光心的距离.该问题主要被用来决定摄像机与目标物体之间的相对距离和姿态.近年来又在图像分析和自动制图学^[1]、计算机视觉、机器视觉与机器人学^[2]及摄影测量学^[3]等领域中广为关注的摄像机定位问题中重新提出.

目前对 PnP 问题的研究主要包括两个方面:(1)设计运算速度快、稳定的算法,来寻找 PnP 问题的所有解或部分解.(2)对多解现象的研究,即找出在什么条件下系统有 1 个,2 个,3 个,或者 4 个解.对这两个问题的研究目前都有不少好的结果.

文献[1]中指出,要获得一个封闭形式的解,最少需要 3 个控制点,因而提出了 P3P 问题. Fishler 和 Bolles 在文献[1]中也给出了 RANSAC 算法,并指出 P3P 问题最多有 4 个解,且解的上界能达到.1991 年 Haralic 等^[4]总结了当时国际上已有的 6 种主要解法,包括 Grunert (1841), Finsterwalder

(1903), Merritt (1949), Fishler 和 Bolles (1981), Linnainmaa 等 (1988), Grafarend 等 (1989). 1992 年 Dementhon 等^[5]总结了对 P3P 问题的研究进展, 并采用了一种新的使用三角函数的解法, 指出已有的解法共同的缺点是需要较多的浮点运算, 认为采用平行投影和弱透视可减少运算量.

对 P3P 问题研究的另一个方向就是多解现象的研究. Fischler 和 Bolles^[1]提供了几种 P3P 问题多解的例子. 1986 年, Wolfe 等人^[6]提出一种通过对不等边三角形反射形成多解的方法, 并指出使用 3 个控制点的 4 组正解最多可以形成 24 个摄像机位置, 并指出 P3P 算法的难点之一是处理靠得很近的解. 1991 年 Wolfe 等人^[7]采用一种“THE CANONICAL VIEW”的假设为 P3P 问题 1~4 解的不确定集合做出了一种几何解释. 1998 年苏成等^[8]采用新的化简方式, 充分利用多项式根的数目估计实现了对非线性的 P3P 方程组根的数目的估计, 并完整地分析了 P3P 问题种种多解现象的充要条件. 2001 年 Gao 等^[9]利用了“Wu-Ritt's zero decomposition algorithm”对 P3P 问题方程组进行了消元, 并给 P3P 问题提供了完整的分析解. Gao 等^[9]也给出了 P3P 问题完整的解的分类, 即出现 1 解, 2 解, 3 解, 4 解的条件.

P3P 问题的一个重要应用是利用物体上已知坐标的 3 个特征点在图像中的成像坐标, 确定摄像机与物体之间的位置与姿态, 这种定位方式在机器人操作等许多场合都可以应用, 但由于 P3P 问题的多解现象, 使得这一应用受到限制. 因而唯有保证 P3P 只有 1 个解, 才能保证用迭代算法得到的解就是我们想要的正确解. 事实上, 苏成^[8], Gao^[9]等虽然给出了 P3P 问题出现各种多解情况的条件, 但是他们的判定条件过于繁杂, 用他们的方法来确定有几个解的计算复杂度比用文献^[1]中的方法把所有的解都解出来还要高. 另外就是文献^[8, 9]中给出的结果, 对我们布置控制点, 放置相机的位置缺乏指导意义. 事实上, 由于实际应用时, 3 个特征点是可以人为选取或布置的, 因此, 研究如何布置特征点与像机的位置关系, 对保证 P3P 问题有唯一解是有意义的.

2 P3P 问题的 4 种模式

如图 1 所示, O 为摄像机光心, 控制点 A, B, C 与光心 O 之间三条连线的长度分别记为 x, y, z . 已知他们之间的夹角分别为 α, β, γ 及 $|AB|=c, |AC|=b,$

$|BC|=a$, 求 x, y, z , 这就是 P3P 问题, 其方程描述如下:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = c^2 \\ x^2 + z^2 - 2xz\cos\beta = b^2 \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma = a^2 \end{cases} \quad (1)$$

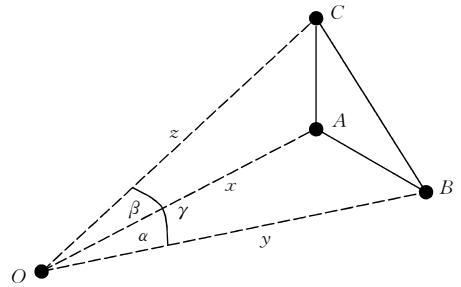


图 1 P3P 问题示意图

考虑到实际应用中的相机的视场角, 以下讨论中均假设 α, β, γ 为锐角, 另从实际物理意义出发, 假设 x, y, z 均为大于 0 的实数. 通过配方将 y 和 z 表示成 x 的函数

$$y = x\cos\alpha \pm (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$z = x\cos\beta \pm (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

考虑根号前的符号选取与不同组合, P3P 问题的解必为以下 4 种模式.

$$\text{模式 1: } \begin{cases} y = x\cos\alpha + (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ z = x\cos\beta + (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma = a^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{模式 2: } \begin{cases} y = x\cos\alpha + (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ z = x\cos\beta - (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma = a^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{模式 3: } \begin{cases} y = x\cos\alpha - (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ z = x\cos\beta + (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma = a^2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{模式 4: } \begin{cases} y = x\cos\alpha - (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \\ z = x\cos\beta - (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma = a^2 \end{cases} \quad (7)$$

如果我们事先知道, 当前的控制点以及摄像机的位置构成的 P3P 问题属于某个模式, 那么就可以用该模式的方程来进行求解, 从而避免了其他模式的干扰. 我们将证明当控制点构成的三角形是等腰三角形, 并且摄像机在某些特定区域时, 所构成的 P3P 问题属于模式 1 或者模式 4, 并且具有唯一解. 需要特别说明的是, P3P 问题的解并不均匀分布在不同的模式中, 在同一模式下, 有时也有多个解.

3 模式 1 的 P3P 问题唯一性条件

在本节中我们讨论属于模式 1 的 P3P 问题的一些特性.

引理 1. 当 P3P 问题属于模式 1 时,若 $|AB| = |AC| = R$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则当 $x \in (0, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta))$ 时,有 $(y-z)(y'-z') > 0$.

证明. 形成的 P3P 问题属于模式 1,即

$$y = x\cos\alpha + (R^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$z = x\cos\beta + (R^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

则式(8),(9)关于 x 的导数为

$$y' = \cos\alpha - x\sin^2\alpha(R^2 - x^2\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$z' = \cos\beta - x\sin^2\beta(R^2 - x^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

不失一般性,假设 $\alpha > \beta$. 则易见 $y < z, y' < z'$. 所以有 $(y-z)(y'-z') > 0$.

定理 1. 当 P3P 问题属于模式 1 时,如果 $|AB| = |AC| = R$, 令 $F(x) = y^2 + z^2 - 2yz\cos\gamma$, 则当 $x \in (0, \min(R\text{ctg}\alpha, R\text{ctg}\beta)]$ 时,有 $F'(x) \geq 0$. 且仅当 $\alpha = \beta, x = R\text{ctg}\alpha$ 时,有 $F'(x) = 0$. 若 $|OA| \in (0, \min(R\text{ctg}\alpha, R\text{ctg}\beta)]$, 则仅当 $x = |OA|$ 时,有 $F(x) = a^2$.

证明. 由式(10),(11)可知 y' 和 z' 关于 x 是单调下降的. 容易验证当 $x = R\text{ctg}\alpha$ 时, $y' = 0$, 当 $x = R\text{ctg}\beta$ 时, $z' = 0$. 所以当 $x \in (0, \min(R\text{ctg}\alpha, R\text{ctg}\beta)]$ 时,有 $y' \geq 0, z' \geq 0$. $F'(x) = 2yy' + 2zz' - 2\cos\gamma(yz' + zy')$, 如果 $\alpha \neq \beta$, 则因为 $y > 0, z > 0, y' \geq 0, z' \geq 0$, 所以 $F'(x) \geq 2(yy' + zz' - yz' - zy') = 2(y-z)(y'-z')$. 由引理 1 可得 $F'(x) > 0$. 如果 $\alpha = \beta$, 则 $y = z, F'(x) = 4(1 - \cos\gamma)yy'$.

显然这种情况: $F'(x) \geq 0$, 且仅当 $x = R\text{ctg}\alpha$ 时, $F'(x) = 0$. 由上面的论述可知, 如果 $|OA| \in (0, \min(R\text{ctg}\alpha, R\text{ctg}\beta)]$, 那么只有当 $x = |OA|$ 时, 有 $F(x) = a^2$. 证毕.

定理 1 对我们布置控制点和摄像机的位置有指导意义. 即如果我们能通过布置控制点和摄像机的位置, 使 $|AB| = |AC| = R, |OA| \in (0, \min(R\text{ctg}\alpha, R\text{ctg}\beta)]$, 且使形成的 P3P 问题是模式 1 的情况, 则可知此时满足条件的解只有一个, 且由于 $F(x)$ 的单调性, 可采用二分法很快得出正确解. 下面我们就如何布置控制点和摄像机的位置进行一些讨论.

定理 2. 当所形成的 P3P 问题中, 如果 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}, \angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$, 则该 P3P 问题属于模式 1, 且 $|OA|$

$\in (0, \min(|AB|\text{ctg}\alpha, |AC|\text{ctg}\beta)]$.

证明. 如图 2 所示, 当 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 过 A 点可以作一条直线 $AD \perp OB$. 显然, $|OB| = |OD| + |BD|$. 令 $|OA| = x, |OB| = y, |AB| = c, \angle AOB = \alpha$, 则有 $y = x\cos\alpha + (c^2 - x^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

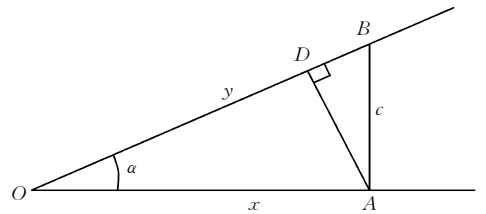


图 2 定理 2 的图解

同理可证, 若 $\angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$, 则有 $z = x\cos\beta + (b^2 - x^2\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}}$. 其中 $z = |OC|, b = |AC|, \beta = \angle AOC$. 故若 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}, \angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$, 则此时的 P3P 问题属于模式 1.

考虑 $\triangle OAB$, 易得 $\frac{|AB|}{\sin\alpha} = \frac{|OA|}{\sin\angle OBA}$, 又由于 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$, 显然当 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ 时, $|OA|$ 取到最大值 $|AB|\text{ctg}\alpha$. 故 $|OA| \leq |AB|\text{ctg}\alpha$. 同理我们可得 $|OA| \leq |AC|\text{ctg}\beta$. 故如果所形成的 P3P 问题中, $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}, \angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$, 则该 P3P 问题属于模式 1, 且 $|OA| \in (0, \min(|AB|\text{ctg}\alpha, |AC|\text{ctg}\beta)]$. 证毕.

由定理 1 和定理 2 可知, 如果我们布置控制点使 $|AB| = |AC|$, 放置相机的位置使 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}, \angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$, 则此时满足条件的解只有 1 个. 下面我们给出一个布置控制点和摄像机的实例.

如图 3 所示, A, B, C 为 3 个控制点, 在它们所构成的平面 ABC 上, 过 A 点作直线 AK 垂直于 AC, AJ 垂直于 AB, 射线 AK 和 AJ 所夹的平面区

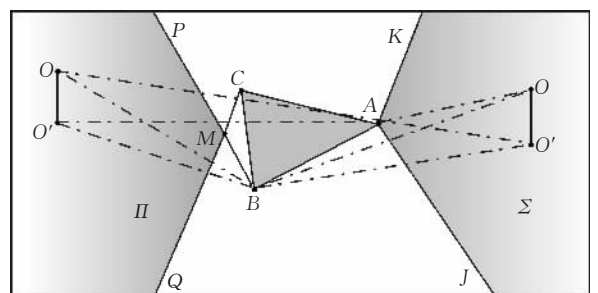


图 3 布置实例

域(如图中阴影部分所示)称为 Σ , 则当光心或光心在平面 ABC 上的垂足在区域 Σ 中时, $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$.

很容易验证, 当光心 O 在 Σ 中时, $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$. 如果 O 不在 ABC 平面上, 如图 OO' 垂直于平面 ABC , 且 O' 在区域 Σ 中, 则有 $BO^2 = OO'^2 + BO'^2$, $AO^2 = OO'^2 + AO'^2$, 又由 $\angle BAO' \geq \frac{\pi}{2}$, 可知 $BO'^2 \geq AB^2 + AO'^2$, 所以 $BO^2 \geq AO^2 + AB^2$, 即 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$. 同理我们可证 $\angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$.

下面的图 4 为图 3 的空间示意图: AK 垂直于 AC , AJ 垂直于 AB , 且 AK, AJ 都在平面 ABC 上, 直线 L 过 A 点且垂直于平面 ABC . 直线 L 和射线 AK 构成平面 α , 直线 L 和射线 AJ 构成平面 β , 平面 α 和平面 β 所夹的空间区域称为 V , 则当光心 O 出现在 V 区域时, 有 $\angle OAB \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OAC \geq \frac{\pi}{2}$. 显然如果我们使 $|AB| = |AC|$, 由定理 1 可知, 当摄像机出现在区域 V 时, 我们就可以唯一地求出所构成的 P3P 问题的解.

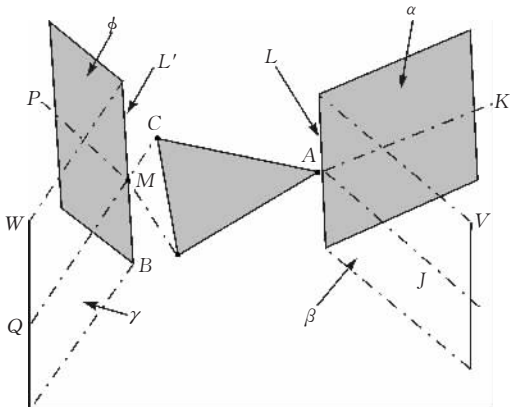


图 4 布置实例的空间示意图

4 模式 4 的 P3P 问题唯一性条件

本节中我们讨论属于模式 4 的 P3P 问题的一些特性.

引理 2. 当 P3P 问题属于模式 4 时, 若 $|AB| = |AC| = R$, $\alpha \neq \beta$, 则当 $x \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$ 时, 有 $(y-z)(y'-z') > 0$.

证明. 形成的 P3P 问题属于模式 4, 即

$$y = x \cos \alpha - (R^2 - x^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$z = x \cos \beta - (R^2 - x^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

则式 (12), (13) 关于 x 的导数为

$$y' = \cos \alpha + x \sin^2 \alpha (R^2 - x^2 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$z' = \cos \beta + x \sin^2 \beta (R^2 - x^2 \sin^2 \beta)^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

考察下面两个函数,

$$l = x \cos \theta - (R^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$l' = \cos \theta + x \sin^2 \theta (R^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dl}{dsin\theta} = x^2 \sin \theta [(R^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}],$$

又由于 $x > R$, 所以 $\frac{dl}{dsin\theta} > 0$.

$$\frac{dl'}{dsin\theta} = x^3 \sin^3 \theta (R^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$x \sin \theta [2(R^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - x^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}],$$

又由于 $x > R$, 所以 $\frac{dl'}{dsin\theta} > 0$. 因 $\alpha \neq \beta$, 故不妨假设

$\alpha > \beta$. 则由 $\frac{dl}{dsin\theta} > 0$, $\frac{dl'}{dsin\theta} > 0$, 可知 $y > z$, $y' > z'$. 所以 $(y-z)(y'-z') > 0$.

定理 3. 当 P3P 问题属于模式 4 时, 如果 $|AB| = |AC| = R$, 令 $F(x) = y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma$, 则当 $x \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$ 时, 有 $F'(x) > 0$. 若 $|OA| \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$, 则仅当 $x = |OA|$ 时, 有 $F(x) = a^2$.

证明. 当 $x \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$ 时, 由式 (12)~(15), 易知 $y > 0$, $z > 0$, $y' > 0$, $z' > 0$.

$F'(x) = 2yy' + 2zz' - 2yz \cos \gamma (y'z' + zy')$, 如果 $\alpha \neq \beta$, 则 $F'(x) \geq 2(yy' + zz' - yz' - zy') = 2(y-z) \cdot (y' - z')$, 由引理 2 可得 $F'(x) > 0$. 如果 $\alpha = \beta$, 则 $y = z$, $F'(x) = 4(1 - \cos \gamma)yy'$, 显然这种情况 $F'(x) > 0$. 所以当 $x \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$ 时, 有 $F'(x) > 0$. 另外, 为了保证 y 和 z 大于 0, 且都是实数, 就有 $x \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$, 这其实是在模式 4 情况下 x 的定义域, 所以在模式 4 下, 必有 $|OA| \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$. 由于 $F'(x) > 0$, 且 $|OA| \in (R, \min(R/\sin\alpha, R/\sin\beta)]$, 故仅当 $x = |OA|$ 时, 才有 $F(x) = a^2$. 证毕.

定理 3 同样对我们布置控制点和摄像机的位置有指导意义. 即如果我们能通过布置控制点和摄像机的位置, 使得形成的 P3P 问题是模式 4 的情况, 而且使 $|AB| = |AC|$, 则我们能够通过迭代的方式求出 P3P 的解. 又由定理 3, 可知该解就是真实解, 这样我们避免了 P3P 问题中的多解现象. 下面我们

就如何布置控制点和摄像机的位置进行一些讨论.

定理 4. 当所形成的 P3P 问题中,如果 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$, 则该 P3P 问题属于模式 4.

证明. 如图 5 $\angle OBA > \frac{\pi}{2}$, $AD \perp OB$. 显然, $|OB| = |OD| - |BD|$. 令 $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|AB| = c$, $\angle AOB = \alpha$, 则有 $y = x \cos \alpha - \sqrt{c^2 - x^2 \sin^2 \alpha}$. 如果 $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$, 显然, 也满足 $y = x \cos \alpha - \sqrt{c^2 - x^2 \sin^2 \alpha}$.

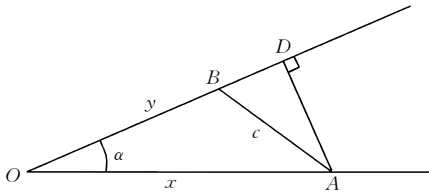


图 5 定理 4 图解

同理可证, 若 $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$, 有 $z = x \cos \beta - \sqrt{b^2 - x^2 \sin^2 \beta}$. 其中 $z = |OC|$, $b = |AC|$, $\beta = \angle AOC$. 故若 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$, 则此时的 P3P 问题属于模式 4. 证毕.

由定理 4, 我们知道只需布置控制点使 $|AB| = |AC|$, 那么如果摄像机的光心 O 出现在这样一个区域, 在该区域中, 都有 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$, 那么我们就可以唯一地求出此时所形成的 P3P 问题的真实解. 下面我们就给出一个布置控制点和摄像机的实例, 使得 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$.

如图 3 所示, $|AC| = |AB|$, 直线 CQ, BP 在平面 ABC 上, 且 BP 垂直于 AB , CQ 垂直于 AC , BP 与 CQ 相交于 M . 我们把射线 MP 和 MQ 所夹的平面区域 (如图 3 中阴影部分所示) 称为 Π , 则如果摄像机的光心 O 在区域 Π 上, 或者 O 在平面 ABC 上的垂足在区域 Π 上, 都能保证 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$.

如果 O 在区域 Π 上, 此时, 显然 O 与 ABC 在同一个平面上, 由简单的平面几何关系, 很容易验证 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$. 若 O 不在平面 ABC 上, 而 O 在平面 ABC 上的垂足 O' 在区域 Π 上, 如图 3 所示. 在这种情况下, 易知 $\angle O'BA \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle O'CA \geq \frac{\pi}{2}$. 由于 $\angle O'BA \geq \frac{\pi}{2}$, $O'A^2 \geq AB^2 + O'B^2$, 又由

$OA^2 = OO'^2 + O'A^2$, $OB^2 = OO'^2 + O'B^2$, 易知 $OA^2 \geq AB^2 + OB^2$, 所以 $\angle OBA \geq \frac{\pi}{2}$. 同理我们可证 $\angle OCA \geq \frac{\pi}{2}$.

空间示意图如图 4 所示. 过 M 点做垂直于平面 ABC 的直线 L' , L' 与 MP, MQ 分别构成平面 γ 和 ϕ , 我们把平面 γ 和平面 ϕ 所夹的空间区域记为 W , 则当光心在该空间区域时, 所构成的 P3P 问题就属于模式 4, 如果我们布置控制点使 $|AB| = |AC|$, 则由定理 3 可知我们可以唯一地求出当前的 P3P 问题的真实解.

5 总 结

我们通过研究发现如果预先知道控制点和摄像机之间的大致位置关系, 可以获得一些额外的信息, 利用这些信息, 我们可以避免 P3P 问题中的虚假解的干扰. 目前, 我们还没有看到有人从这个角度考虑 P3P 问题. 需要指出的是, 虽然我们证明了在图 4 中, 当光心出现在空间区域 V 或 W 中时, 可以唯一地求出 P3P 的正确解, 但这并不意味着直接去解构成 P3P 问题的方程组 (1) 时, 会只有一个解. 这主要是因为我们知道光心在区域 V 时构成的 P3P 问题属于模式 1, 在区域 W 时构成的 P3P 问题属于模式 4, 如果我们没有利用这个信息, 那么 P3P 问题就不一定只有唯一解了.

P3P 问题的多解性一直困扰着人们, 尽管前人做了不少工作, 且有较好的结果, 甚至给出了 P3P 问题出现多解现象的充要条件, 但都是纯粹从数学上分析, 即对 P3P 问题的方程组的解进行了分析. 这些结果, 琐碎繁杂. 他们对实际布置控制点和放置摄像机等问题没有进行深入的探讨. 本文中, 我们先是提出了 P3P 问题的 4 种模式并确定真实解只能是 4 种模式中的一个. 从这点出发, 我们发现当 3 个控制点构成一个等腰三角形时, 可以在空间找到一些区域, 只要摄像机出现在该区域时, 就能唯一地求出所构成的 P3P 问题的真实解. 在理论上, 我们对 P3P 问题的研究与前人的思路有较大的差异. 我们充分利用了布置控制点和摄像机的位置信息, 来研究 P3P 问题, 得到一些非常好的结果, 反过来这些结果又对我们布置控制点和放置摄像机产生了指导意义. 这种新的思路也拓宽了 P_nP 问题研究的方法. 在本文中, 我们只给出了两种情形, 类似于这两种情

形的情况,可能还会有.另外如何更有效地布置控制点和摄像机的位置以及如何有效利用这些位置信息去解决新的问题,都将值得我们做进一步地研究.

参 考 文 献

- 1 Fishler M A, Bolles R C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981, 24(6): 381~395
- 2 Abidi M A, Chandra T. A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: Algorithm and evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(5): 534~538
- 3 Yuan J S C. A general photogrammetric method for determining object position and orientation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, 5(2): 129~142
- 4 Haralic R M, Lee C, Ottenberg K, Nolle M. Analysis and solutions of the three point perspective pose estimation problem. In: *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, 1991. 592~598
- 5 Dementhon D, Davis L S. Exact and approximate solutions of the perspective-three-point. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(11): 1100~1105
- 6 Wolfe W J, Jones K. Camera calibration using the perspective view of a triangle. In: *Proceedings of SPIE Conference Automated Inspection Measurement*, Cambridge, 1986, 730: 47~50
- 7 Wolfe W J, Mathis D, Weber C, Magee M. The perspective view of three points. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(1): 66~73
- 8 Su Cheng, Xu Ying-Qing *et al.* Necessary and sufficient condition of positive root number of perspective-three-point problem. *Chinese Journal of Computers*, 1998, 21(12): 1084~1095 (in Chinese)
(苏 成,徐迎庆等. 判定 P3P 问题正解数目的充要条件. *计算机学报*, 1998, 21(12): 1084~1095)
- 9 Gao X S, Hou X R, Tang J L, Cheng H F. Complete solutions classification for the perspective- three-point problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, to be Accepted



ZHOU Xin, born in 1980, M. S. candidate. His research interests include computer vision, image processing & analysis.

ZHU Feng, born in 1962, professor, Ph. D. supervisor. His current research interests mainly focus on robot vision, human-computer interaction and virtual reality.