

B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法

潘日晶 姚志强 潘日红

(福建师范大学数学与计算机科学学院 福州 350007)

摘 要 已有的 B 样条曲线降阶方法,由于无降阶公式可循,对于可降阶曲线常要通过解一系列线性方程组来实现降阶. 该文给出了 B 样条曲线的降阶公式,使得可直接用降阶公式对可降阶曲线进行降阶. 利用降阶公式和约束优化方法,文中进一步给出了 B 样条曲线的一种近似降阶方法和相应的算法,使得在用约束优化方法求出可降阶的近似曲线后,就可直接用降阶公式求出降阶曲线,简化了降阶过程. 该方法应用范围广且简单实用.

关键词 B 样条; 曲线; 降阶; 约束优化; 近似
中图法分类号 TP391

Degree Reduction Formula and Approximate Degree Reduction of B-Spline Curves

PAN Ri-Jing YAO Zhi-Qiang PAN Ri-Hong

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

Abstract In this paper, a degree reduction formula for B-spline curves is developed by means of the coefficient matrix of B-spline curves. It makes the degree reduction of the degree reducible B-spline curves easily realized by using the degree reduction formula directly instead of solving linear equation sets. Based on the degree reduction formula and the constrained optimization method, an approximate degree reduction method for general B-spline curves is presented and the algorithm for this method is proposed. The procedure of the degree reduction for B-spline curves is simplified with this method. We can get the degree reduction curves by using the degree reduction formula after obtaining the reducible approximate curves by the constrained optimization method. In addition, this method can be applied to all kinds of B-spline curves and the algorithm can be easily realized.

Keywords B-spline; curve; degree reduction; constrained optimization; approximation

1 引 言

在计算机辅助几何设计中,曲线的降阶是一个热点问题,已得到越来越多的研究^[1~12]. B 样条曲线无疑是曲线曲面设计中最重要曲线之一,为了实现不同 CAD 系统之间的数据交换,常用到 B 样条曲线的降阶技术. 虽然通过升阶也可使不同阶曲线的阶达到一致,但通过降阶达到相同的目的有其更

可取之处:减少数据量且数值计算上更稳定高效.

关于 Bézier 曲线的降阶问题已有许多研究成果^[1~7],而 B 样条曲线的降阶则比较复杂,目前已有的主要研究成果见文献^[8~12]. Pieg1 等^[8]的降阶方法由三个步骤组成:(1)将 B 样条曲线分解成若干段 Bézier 曲线;(2)对各 Bézier 曲线进行降阶;(3)删除多余的节点得降阶的 B 样条曲线. Wolters 等^[9]的降阶方法先对 B 样条曲线分段用最小二乘法进行降阶,然后再对所产生的多组控制顶点进行

加权组合. 秦开怀等^[10]和 Yong 等^[11]利用约束优化方法先求出退化的 B 样条曲线来逼近原曲线, 再对退化的曲线通过分段解线性方程组进行降阶. 雍俊海等^[12]给出了均匀 B 样条曲线的降阶方法.

对于可精确降阶的 Bézier 曲线, 可用简单的降阶公式对其降阶. 而对于 B 样条曲线, 由于尚未得到其降阶公式, 所以其降阶过程较复杂, 即使是对于可精确降阶的 B 样条曲线, 常常也得通过解一系列线性方程组来进行降阶. 本文给出了 B 样条曲线的降阶公式, 使得可直接用降阶公式对可精确降阶的 B 样条曲线进行降阶.

本文首先利用 B 样条曲线系数矩阵的有关结果^[13], 给出 B 样条曲线可降阶(退化)的充要条件, 接着推导出 B 样条曲线的降阶公式, 然后基于前面的结果和约束优化方法, 给出 B 样条曲线的一种近似降阶方法并给出相应的降阶算法, 最后给出两个例子.

2 B 样条曲线可降阶的充要条件和降阶曲线的节点向量

k 阶 B 样条曲线由控制顶点序列 $\{p_i\}_{i=0}^n$ 和 k 阶 B 样条基 $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ 表示如下:

$$c(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \tag{1}$$

其中, k 阶 B 样条基 $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ 由阶数 k 和节点向量 $\mathbf{T}$ 确定,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (t_0, t_1, \dots, t_{n+k}) \\ &= (\overbrace{\tau_0, \dots, \tau_0}^{l_0}, \overbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}^{l_1}, \dots, \overbrace{\tau_w, \dots, \tau_w}^{l_w}) \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $n \geq k-1; t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}; \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_w, 1 \leq l_i \leq k, i=0, 1, \dots, w; t_{k-1} < t_k, t_n < t_{n+1}$.

对 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 降阶是指用 $< k$ 阶的 B 样条基表示 $c(t)$. 不失一般性, 本文仅讨论降一阶的问题, 下面所提到的降阶均指降一阶. 大多数的 B 样条曲线不可精确降阶, 为了给出 B 样条曲线可降阶(退化)的充要条件, 先给出如下关于 B 样条曲线系数矩阵的有关结果.

定理 1^[13]. 由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线在其定义域 $[t_{k-1}, t_{n+1})$ 的任一非空子区间 $[t_s, t_{s+1})$ 上可表示为

$$\begin{cases} c(t) = [1 & u & u^2 & \cdots & u^{k-1}] \mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}} \begin{bmatrix} p_{s-k+1} \\ p_{s-k+2} \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix} \\ u = (t - t_s) / (t_{s+1} - t_s), u \in [0, 1) \end{cases} \tag{3}$$

其中,

$$\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{0,s-k+1}(s) & a_{0,s-k+2}(s) & \cdots & a_{0,s}(s) \\ a_{1,s-k+1}(s) & a_{1,s-k+2}(s) & \cdots & a_{1,s}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,s-k+1}(s) & a_{k-1,s-k+2}(s) & \cdots & a_{k-1,s}(s) \end{bmatrix} \tag{4}$$

称为曲线 $c(t)$ 在区间 $[t_s, t_{s+1})$ 上的系数矩阵,

$$a_{i,j}(s) = (t_{j+k} - t_j)(t_s - t_{s+1})^i \binom{k-1}{i}.$$

$$\begin{aligned} &\sum_{h=m_{s+1}}^{m_{j+k}} \sum_{l=0}^{l_h(j)-1} (k-i-1) \cdots (k-i-l) \cdot \\ &(\tau_h - t_s)^{k-i-l-1} \alpha_{h,l}(j), \\ \alpha_{h,l}(j) &= \frac{(-1)^{l_h(j)-l-1} \gamma_{h,l_h(j)-l-1}(j)}{l! \prod_{\mu=m_j, \mu \neq h}^{m_{j+k}} (\tau_h - \tau_\mu)^{l_h(j)}}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{h,l}(j) = \begin{cases} \sum_{\substack{j \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_l \leq j+k \\ t_{\mu_1}, t_{\mu_2}, \dots, t_{\mu_l} \neq \tau_h}} \frac{1}{(\tau_h - t_{\mu_1})(\tau_h - t_{\mu_2}) \cdots (\tau_h - t_{\mu_l})}, \\ l = 1, 2, \dots, l_h(j) - 1 \\ 1, \quad l = 0 \end{cases}.$$

在上述式子中规定当 $l=0$ 时, $(k-i-1) \cdots (k-i-l) = 1, m_i$ 使得 $t_i = \tau_{m_i}, i=0, 1, \dots, n+k$,

$$l_h(j) = \begin{cases} l_h, & h = m_j + 1, m_j + 2, \dots, m_{j+k} - 1 \\ \sum_{\mu=0}^{m_j} l_\mu - j, & h = m_j \\ j + k + 1 - \sum_{\mu=0}^{m_{j+k}-1} l_\mu, & h = m_{j+k} \end{cases}.$$

其中, l_h 为节点 τ_h 在节点向量 $\mathbf{T}$ 中的重数.

定理 2. 由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线可降阶的充要条件是

$$\sum_{j=s-k+1}^s a_{k-1,j}(s) p_j = 0, k-1 \leq s \leq n, t_s < t_{s+1} \tag{5}$$

其中, $a_{k-1,j}(s) = (t_{j+k} - t_j)(t_s - t_{s+1})^{k-1} \sum_{h=m_{s+1}}^{m_{j+k}} \alpha_{h,0}(j)$

为系数矩阵 $\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}}$ 的最后一行的元素.

证明. 根据 B 样条基和 B 样条曲线的基本性质^[14], 显然 k 阶 B 样条曲线可降阶的充要条件是其为分段 $k-2$ 次多项式曲线. 而根据定理 1, 由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线为分段 $k-2$ 次多项式曲线的充要条件是式(5)成立. 证毕.

同一条 B 样条曲线可用由不同的节点向量确定的 B 样条基表示. 下面的定理 3 指出, 可降阶的 B

样条曲线降阶后可取什么样的节点向量.

定理 3. 若由式(1)给出的 B 样条曲线 $c(t)$ 可降阶, 则

(1) 相应的节点向量 $\mathbf{T}$ 中所有在区间 (t_{k-1}, t_{n+1}) 中的单重节点都可删除.

(2) 用由式(2)定义的节点向量构造如下新的节点向量 $\tilde{\mathbf{T}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &= (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{\tilde{n}+k-1}) \\ &= (t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, \underbrace{\tau_{m_k}, \dots, \tau_{m_k}}_{l_{m_k}-1}, \dots, \underbrace{\tau_{m_n}, \dots, \tau_{m_n}}_{l_{m_n}-1}, \\ &\quad t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\tilde{n} = \sum_{j=m_k}^{m_n} l_j - m_n + m_k + k - 3$, m_i 使得 $t_i = \tau_{m_i}$, 则 $c(t)$ 可表示为如下的 $k-1$ 阶 B 样条曲线:

$$c(t) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} q_i B_{i,k-1}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) = [\tilde{t}_{k-2}, \tilde{t}_{\tilde{n}+1}) \quad (7)$$

其中, $\{B_{i,k-1}(t)\}_{i=0}^{\tilde{n}}$ 为由节点向量 $\tilde{\mathbf{T}}$ 确定的 $k-1$ 阶 B 样条基.

证明. 设由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 可降阶.

(i) 设 $t_i \in \mathbf{T}, t_{k-1} < t_i < t_{n+1}$ 且 t_i 为单重节点, 则根据 B 样条曲线的基本性质^[14], $c(t)$ 在 t_i 处至少 C^{k-2} 连续. 而由于 $c(t)$ 可降阶, $c(t)$ 在 $[t_{k-1}, t_{n+1})$ 上为分段 $k-2$ 次多项式, 于是 $c(t)$ 在 t_i 处为 C^∞ 连续, 可见节点 t_i 可删除. (1) 得证.

(ii) 定义多项式样条空间如下:

$S(k-1, \tilde{\mathbf{T}}) = \{f(t), t \in [\tilde{t}_{k-2}, \tilde{t}_{\tilde{n}+1}) \mid \text{对于 } i = k-1, k, \dots, \tilde{n}+1, \text{ 若 } \tilde{t}_{i-1} < \tilde{t}_i, \text{ 则在 } [\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i) \text{ 上 } f(t) \text{ 为 } k-2 \text{ 次多项式; 对于 } i = k-1, k, \dots, \tilde{n}, f(t) \text{ 在 } t = \tilde{t}_i \text{ 处 } C^{k-l_i-1} \text{ 连续, 其中 } j \text{ 使得 } \tilde{t}_i = \tau_j\}$

由于 $c(t)$ 为可降阶的 k 阶 B 样条曲线并且(1)成立, 显然 $c(t)$ 的各分量都属于空间 $S(k-1, \tilde{\mathbf{T}})$, 而根据 B 样条理论^[14], 并注意到 $\tilde{\mathbf{T}}$ 的构造, 可知 $\{B_{i,k-1}(t)\}_{i=0}^{\tilde{n}}$ 为空间 $S(k-1, \tilde{\mathbf{T}})$ 的一组基, 所以 $c(t)$ 可表示成式(7)的形式. (2) 得证. 证毕.

由于对 B 样条曲线插入若干节点后并不改变曲线的形状, 所以对节点向量 $\tilde{\mathbf{T}}$ 增加若干节点后构成的节点向量也可以作为可降阶 B 样条曲线降阶后的节点向量.

3 B 样条曲线的降阶公式

若 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 可降阶, 则由定理 3 知,

要对 $c(t)$ 降阶, 只要求出 $c(t)$ 降阶后的新控制顶点 $q_i, i=0, 1, \dots, \tilde{n}$. 下面给出求新控制顶点 q_i 的降阶公式.

定理 4. 设由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 可降阶, 其降阶后的表示式由式(7)给出, 则其降阶后的新控制顶点有如下表示式:

$$\begin{bmatrix} q_{h-k+2} \\ q_{h-k+3} \\ \vdots \\ q_h \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{h,k-1} \bar{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{T} \begin{bmatrix} p_{s-k+1} \\ p_{s-k+2} \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix}, \quad k-2 \leq h \leq \tilde{n}, \tilde{t}_h < \tilde{t}_{h+1} \quad (8)$$

其中, s 满足 $\tilde{t}_h \leq t_s < t_{s+1} \leq \tilde{t}_{h+1}$, $\bar{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{T}$ 为由 $c(t)$ 在 $[t_s, t_{s+1})$ 上的系数矩阵的前 $k-1$ 行组成的矩阵,

$$\mathbf{D}_{h,k-1} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} d_{h-k+2,0} & d_{h-k+2,1} & \cdots & d_{h-k+2,k-2} \\ d_{h-k+3,0} & d_{h-k+3,1} & \cdots & d_{h-k+3,k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{h,0} & d_{h,1} & \cdots & d_{h,k-2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$d_{i,j} = \frac{j!}{(k-2)!} \varphi_{i,k-1}^{(k-j-2)}(t_s) / (t_s - t_{s+1})^j \quad (10)$$

$$\varphi_{i,k-1}(x) = \begin{cases} \prod_{v=1}^{k-2} (x - \tilde{t}_{i+v}), & k > 2 \\ 1, & k = 2 \end{cases} \quad (11)$$

证明. 设由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 可降阶. 对于任意的 h 和 $s, \tilde{t}_{k-2} \leq \tilde{t}_h \leq t_s < t_{s+1} \leq \tilde{t}_{h+1} \leq \tilde{t}_{\tilde{n}+1}$, 根据定理 1, 在 $[t_s, t_{s+1})$ 上 $c(t)$ 可表示成式(3)的形式. 由于 $c(t)$ 可降阶, 于是由定理 2 知, 在 $[t_s, t_{s+1})$ 上 $c(t)$ 可进一步表示为

$$c(t) = [1 \quad u \quad u^2 \quad \cdots \quad u^{k-2}] \bar{\mathbf{A}}_{s,k} \mathbf{T} \begin{bmatrix} p_{s-k+1} \\ p_{s-k+2} \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix},$$

$$u = (t - t_s) / (t_{s+1} - t_s), u \in [0, 1).$$

利用 Marsden 恒等式^[15]:

$$(x - t)^{k-2} = \sum_{i=h-k+2}^h \varphi_{i,k-1}(x) B_{i,k-1}(t), \quad t \in [\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1}), x \in \mathbb{R}.$$

其中 $\varphi_{i,k-1}(x)$ 由式(11)定义, 可得

$$\begin{aligned} u^j &= (t_s - t)^j / (t_s - t_{s+1})^j \\ &= \left[\frac{j!}{(k-2)!} \mathbf{D}_x^{k-j-2} (x - t)^{k-2} \Big|_{x=t_s} \right] / (t_s - t_{s+1})^j \\ &= \left[\frac{j!}{(k-2)!} \sum_{i=h-k+2}^h \varphi_{i,k-1}^{(k-j-2)}(t_s) B_{i,k-1}(t) \right] / (t_s - t_{s+1})^j, \\ &\quad t \in [t_s, t_{s+1}), j = 0, 1, \dots, k-2. \end{aligned}$$

即 $u^j = \sum_{i=h-k+2}^h d_{i,j} B_{i,k-1}(t)$, 其中 $d_{i,j}$ 由式(10)定义, 将该式代入式(3), 得

$$c(t) = [B_{h-k+2,k-1}(t), B_{h-k+3,k-1}(t), \dots, B_{h,k-1}(t)].$$

$$\mathbf{D}_{h,k-2}, \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{A}}_{s,k,T} \begin{bmatrix} p_{s-k+1} \\ p_{s-k+2} \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix}, \quad t \in [t_s, t_{s+1}).$$

而根据式(7)以及 B 样条基函数的有限支柱性质, 有

$$c(t) = [B_{h-k+2,k-1}(t), B_{h-k+3,k-1}(t), \dots, B_{h,k-1}(t)].$$

$$\begin{bmatrix} q_{h-k+2} \\ q_{h-k+3} \\ \vdots \\ q_h \end{bmatrix}, \quad t \in [\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1}).$$

注意到 $[t_s, t_{s+1}) \subseteq [\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1})$ 且 $c(t)$ 在 $[\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1})$ 上为 $k-2$ 次多项式, 由 $B_{h-k+2,k-1}(t), B_{h-k+3,k-1}(t), \dots, B_{h,k-1}(t)$ 在 $[\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1})$ 上的线性无关性即知式(8)成立.

在定理 4 中, 若 $[\tilde{t}_h, \tilde{t}_{h+1})$ 中不含 $\mathbf{T}$ 的任何节点, 则满足 $\tilde{t}_h \leq t_s < t_{s+1} \leq \tilde{t}_{h+1}$ 的区间 $[t_s, t_{s+1})$ 唯一, 此时 $t_s = \tilde{t}_h, t_{s+1} = \tilde{t}_{h+1}$, 否则, 对于任意一个满足上述条件的区间 $[t_s, t_{s+1})$ 式(8)都成立.

4 B 样条曲线的近似降阶方法及其算法

4.1 B 样条曲线的近似降阶方法

对于可降阶的 B 样条曲线, 可直接用降阶公式(式(8))进行降阶, 而对于不可精确降阶的 B 样条曲线, 可采用近似降阶方法, 即用较低阶的 B 样条曲线近似表示原曲线. 设由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$ 不可精确降阶, 则可通过如下两个步骤对 $c(t)$ 进行近似降阶^[10,11]:

(1) 利用约束优化方法对曲线 $c(t)$ 的控制顶点进行尽量小的扰动, 求出一条新的可降阶的同阶 B 样条曲线 $d(t)$.

(2) 对可降阶曲线 $d(t)$ 进行降阶.

下面用本文的结果实现上述近似降阶过程. 设 δ_i 为对控制顶点 p_i 的扰动, 扰动后的新控制顶点为 $r_i = p_i + \delta_i, i=0, 1, \dots, n$. 根据定理 2, 解如下的约束优化问题即可实现上述步骤(1):

$$\begin{cases} \min(\sum_{i=0}^n \|\delta_i\|_2^2) \\ \sum_{j=s-k+1}^s a_{k-1,j}(s)(p_j + \delta_j) = 0, \\ k-1 \leq s \leq n, t_s < t_{s+1} \end{cases}$$

其中, $a_{k-1,j}(s)$ 的定义见定理 2. 为此, 构造 Lagrange 函数

$$L = \sum_{i=0}^n \|\delta_i\|_2^2 + \sum_{s=k-1}^n \lambda_s^T \sum_{\substack{j=s-k+1 \\ t_s < t_{s+1}}}^s a_{k-1,j}(s)(p_j + \delta_j).$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_s} = 0$ 得如下线性方程组:

$$\begin{cases} 2\delta_i + \sum_{\substack{s=\max(k-1,i) \\ t_s < t_{s+1}}}^{\min(n,i+k-1)} \lambda_s a_{k-1,i}(s) = 0, i=0, 1, \dots, n \\ \sum_{j=s-k+1}^s a_{k-1,j}(s)\delta_j = - \sum_{j=s-k+1}^s a_{k-1,j}(s)p_j, \\ s = k-1, k, \dots, n, t_s < t_{s+1} \end{cases} \quad (12)$$

从该方程组解出 $\delta_i, i=0, 1, \dots, n$ 即得曲线 $c(t)$ 的可降阶的近似曲线 $d(t)$:

$$d(t) = \sum_{i=0}^n (p_i + \delta_i) B_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}).$$

利用定理 4 中的降阶公式对 $d(t)$ 进行降阶即可完成对原曲线 $c(t)$ 的近似降阶. 该近似降阶过程的误差估计如下:

$$\begin{aligned} \|c(t) - d(t)\|_2 &= \left\| \sum_{i=0}^n \delta_i B_{i,k}(t) \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{2} \max\{\|\delta_i\|_2 \mid i=0, 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

4.2 降阶曲线的节点向量

在近似降阶问题中, 若能够使得降阶后的曲线尽量保持原 B 样条曲线在各节点处的连续性阶且又达到尽可能高的近似程度, 则是较为理想的. 根据定理 3 的(1), 若 t_i 为原曲线的节点向量 $\mathbf{T}$ 在 (t_{k-1}, t_{n+1}) 中的一个单重节点, 则对于用约束优化方法得出的可降阶的近似曲线而言, 节点 t_i 可删除, 这就意味着降阶后曲线的段数减少, 在 t_i 处两段并为一, 这就可能影响降阶曲线对原曲线的近似程度. 一种极端的情况是, 若原曲线节点向量 $\mathbf{T}$ 在 (t_{k-1}, t_{n+1}) 中的所有节点都是单重的, 则最后求出的近似降阶曲线为低一阶的多项式曲线, 而显然用低一阶的多项式曲线比用低一阶的分段多项式曲线逼近原 B 样条曲线效果差.

对于上述问题, 可采用如下解决方法: 通过插入节点将原 B 样条曲线在 (t_{k-1}, t_{n+1}) 中的所有单重节点的重数增 1, 这样就使得降阶曲线与原曲线具有相同的段数, 以保证较好的近似效果. 这样处理的代价仅仅是降阶曲线在这些原单重节点处的连续性的阶数减 1, 而在其它节点处的连续性阶保持不变.

4.3 近似降阶算法

设 $c(t)$ 为由式(1)给出的 k 阶 B 样条曲线, 对其

近似降阶的算法如下.

算法 1. Approximate-Degree-Reduction.

{给定 k 阶 B 样条曲线 $c(t)$, 其控制顶点为 $p_0, p_1, \dots, p_n$, 节点向量为 $\mathbf{T} = (t_0, t_1, \dots, t_{n+k})$, 求 $c(t)$ 的近似降阶曲线的控制顶点 $q_0, q_1, \dots, q_{\bar{n}}$ }

(1) 对 $c(t)$ 插入节点使得在 (t_{k-1}, t_{n+1}) 中的所有单重节点的重数增 1, 所得的节点向量仍记为 $\mathbf{T}$;

(2) for $s = k-1$ to n do

if $t_s < t_{s+1}$ then 计算由式(4)定义的系数矩阵 $\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}}$;

(3) 用 $\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}}, k-1 \leq s \leq n, t_s < t_{s+1}$ 的最后一行按式(12)构成线性方程组; 解该方程组得 $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$;

for $i = 0$ to n do $p_i = p_i + \delta_i$;

(4) 按式(6)构成新的节点向量 $\tilde{\mathbf{T}} = \{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{\bar{n}+k-1}\}$

for $h = k-2$ to $\bar{n}$ do

if $\tilde{t}_h < \tilde{t}_{h+1}$ then

begin

求 s 使得 $\tilde{t}_h = t_s < t_{s+1}$;

取 $\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}}$ 的前 $k-1$ 行构成矩阵 $\bar{\mathbf{A}}_{s,k,\mathbf{T}}$;

计算由式(9)定义的矩阵 $\mathbf{D}_{h,k-1,\tilde{\mathbf{T}}}$;

if $h = k-2$ then $\bar{l}_h = k-1$ else $\bar{l}_h = \tilde{t}_h$

在 $\tilde{\mathbf{T}}$ 中的重数;

按式(8)计算 $q_{h-\bar{l}_h+1}, q_{h-\bar{l}_h+2}, \dots, q_h$;

end;

(5) 算法结束.

下面是关于算法 Approximate-Degree-Reduction 的实现的若干说明:

(1) 在步骤(1)中可用 Boehm 算法^[16]插入节点, 每插入一个节点的计算量为 $O(k)$.

(2) 在步骤(2)中可用文献[13]中给出的算法计算系数矩阵 $\mathbf{A}_{s,k,\mathbf{T}}$, 该算法的时间复杂性为 $O(k^3)$.

(3) 在步骤(4)中要计算矩阵 $\mathbf{D}_{h,k-1,\tilde{\mathbf{T}}}$ 的元素 $d_{i,j}, i = h-k+2, h-k+3, \dots, h, j = 0, 1, \dots, k-2$, 由式(10)知, 主要是计算 $\varphi_{i,k-1}^{(j)}(t_s), i = h-k+2, h-k+3, \dots, h, j = 0, 1, \dots, k-2$. 根据 $\varphi_{i,l}(x) = (x - \tilde{t}_{i+l-1})\varphi_{i,l-1}(x)$, 不难验证可按如下递推公式计算 $\varphi_{i,k-1}^{(j)}(t_s)$:

$$\varphi_{i,1}^{(0)}(t_s) = 1, \varphi_{i,1}^{(j)}(t_s) = 0, j = 1, 2, \dots, k-2,$$

$$\varphi_{i,l}^{(j)}(t_s) = (t_s - \tilde{t}_{i+l-1})\varphi_{i,l-1}^{(j)}(t_s) + j\varphi_{i,l-1}^{(j-1)}(t_s),$$

$$j = 0, 1, \dots, k-2, l = 2, 3, \dots, k-1.$$

(4) 不难估计出算法 Approximate-Degree-Reduction 的时间复杂性为 $O(k^3(n-k) + n^3)$.

5 例子

下面给出用算法 Approximate-Degree-Reduction 求 B 样条曲线的近似降阶曲线的两个计算例子.

例 1. B 样条曲线 $c(t)$ 的阶 $k=4$, 节点向量 $\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$, 控制顶点为 $p_0 = (170, 200), p_1 = (120, 240), p_2 = (120, 280), p_3 = (180, 300), p_4 = (180, 360), p_5 = (150, 380), p_6 = (250, 380), p_7 = (220, 360), p_8 = (220, 300), p_9 = (280, 280), p_{10} = (280, 240), p_{11} = (230, 200)$. 近似降阶曲线的节点向量为 $\tilde{\mathbf{T}} = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$, 控制顶点为 $q_0 = (168.8, 199.0), q_1 = (101.2, 265.1), q_2 = (195.9, 323.5), q_3 = (149.8, 385.3), q_4 = (250.2, 385.3), q_5 = (204.1, 323.5), q_6 = (298.8, 265.1), q_7 = (231.2, 199.0)$. 降阶前后的曲线及其控制多边形见图 1(a).

例 2. B 样条曲线 $c(t)$ 的阶 $k=5$, 节点向量 $\mathbf{T} = \{0, 1, 1, 2, 2.5, 4.2, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 8, 9\}$, 控制顶点为 $p_0 = (150, 250), p_1 = (180, 300), p_2 = (250, 310), p_3 = (230, 240), p_4 = (315, 200), p_5 = (375, 260), p_6 = (390, 320), p_7 = (340, 330)$. 近似降阶曲线的节点向量为 $\tilde{\mathbf{T}} = \{1, 1, 2, 2.5, 4.2, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 8\}$, 控制顶点为 $q_0 = (159.4, 266.9), q_1 = (208.6, 309.4), q_2 = (244.7, 279.9), q_3 = (279.4, 204.5), q_4 = (352.4, 230.2), q_5 = (386.4, 291.6), q_6 = (375.2, 331.1)$. 降阶前后的曲线及其控制多边形见图 1(b).

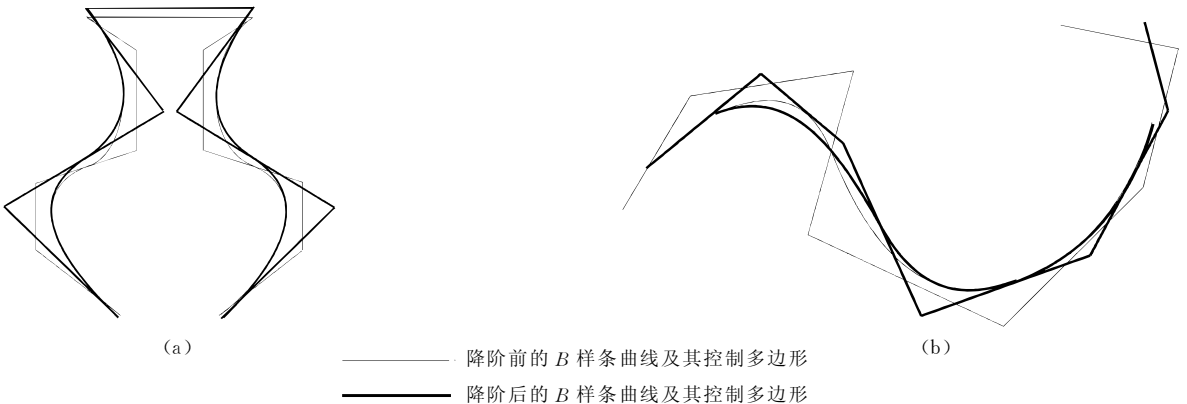


图 1 B 样条曲线的降阶

6 结 论

(1) 本文利用 B 样条曲线系数矩阵的有关结果,推导出 B 样条曲线的降阶公式,使得对可降阶 B 样条曲线的降阶不必解方程组,而只要直接用降阶公式求出降阶曲线的控制顶点。

(2) 对于一般的 B 样条曲线,根据本文的近似降阶方法,在用约束优化方法求出可降阶的近似曲线后,就可用降阶公式求近似降阶曲线,从而简化了降阶过程。

(3) 降阶曲线的节点向量的构造与降阶曲线的连续性和逼近性关系密切,本文提出的构造方案兼顾了连续性和逼近性。

(4) 以往的降阶方法往往对曲线的适用范围有所限制,如要求曲线为端点插值的等等。本文给出的近似降阶方法适用范围广,适用于任何 B 样条曲线,包括均匀的、非均匀的、端点插值的和非端点插值的。另外,本文给出的近似降阶算法易于实现。

参 考 文 献

- 1 Farin G. Algorithms for rational Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 1983, 15(2): 73~77
- 2 Watkins M A, Worsey A J. Degree reduction of Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 1988, 20(7): 398~405
- 3 Eck M. Degree reduction of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1993, 10(3,4): 237~251
- 4 Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(11): 845~851
- 5 Bogacki P, Weinstein S E, Xu Y. Degree reduction of Bézier

- curves by uniform approximation with endpoint interpolation. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9): 651-661
- 6 Hu s, Sun J, Jin T, Wang G. Approximate degree reduction of Bézier curves. *Tsinghua Science & Technology*, 1998, 3(2): 977~1000
- 7 Chen F, Lou W. Degree reduction of interval Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 2000, 32(10): 571~582
- 8 Piegl L, Tiller W. Algorithm for degree reduction of B-spline curves. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(2): 101~110
- 9 Wolters H J, Wu G, Farin G. Degree reduction of B-spline curves. *Computing Supplement*, 1998, 13: 235~241
- 10 Qin Kai-Huai, Huang Hai-Kun. New algorithm for degree reduction of B-spline curves. *Chinese Journal of Computers*, 2000, 23(3): 306~310(in Chinese)
(秦开怀,黄海昆. B 样条曲线降阶新方法. *计算机学报*, 2000, 23(3): 306~310)
- 11 Yong J, Hu S, Sun J, Tan X. Degree reduction of B-spline curves. *CAGD*, 2001, 18(2): 117~127
- 12 Yong Jun-Hai, Hu Shi-Min, Sun Jia-Guang. Degree reduction of uniform B-spline curves. *Chinese Journal of Computers*, 2000, 23(5): 537~540(in Chinese)
(雍俊海,胡事民,孙家广. 均匀 B 样条曲线的降阶. *计算机学报*, 2000, 23(5): 537~540)
- 13 Pan Ri-Jing. Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces and its algorithm. *Chinese Journal of Computers*, 2001, 24(4): 358~366(in Chinese)
(潘日晶. NURBS 曲线曲面的显式矩阵表示及其算法. *计算机学报*, 2001, 24(4): 358~366)
- 14 Schumaker L. *Spline Functions: Basic Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1981
- 15 Marsden M J. An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation. *Journal of Approximation Theory*, 1970, 3: 7~49
- 16 Boehm W. Inserting new knots into B-spline curves. *Computer-Aided Design*, 1980, 12(4): 199~201



PAN Ri-Jing, born in 1955, master, professor. Her major research interests include CAGD, algorithm design and analysis, etc.

YAO Zhi-Qiang, born in 1967, master, associate professor. His major research interests include algorithm design and analysis, graph and image processing, etc.

PAN Ri-Hong, born in 1953, associate professor. Her major research interests are in CAGD, etc.