

低秩张量和主动重构诱导的后期融合多核聚类

张 毅¹⁾ 田芷榕¹⁾ 王方地¹⁾ 王思为²⁾ 刘吉元³⁾ 刘新旺¹⁾ 祝 恩¹⁾

¹⁾ (国防科技大学计算机学院 长沙 410073)

²⁾ (军事科学院智能研究院 北京 100091)

³⁾ (国防科技大学系统工程学院 长沙 410073)

摘 要 基于后期融合策略的多核聚类通过在聚类决策层面进行融合,将多核聚类的计算效率提高到了线性计算复杂度,取得了良好的聚类性能,但它们仍存在以下两个局限性:(1)用于融合的基划分矩阵无法在聚类过程中进行学习优化,因此它们的性能直接受限于基划分矩阵的簇结构表示能力;(2)通过调整视图权重来研究视图间的一致性和互补性,却忽视了视图之间固有的高阶相关性,导致挖掘多核信息的能力欠缺。为了解决这些问题,本文提出了一种新颖的低秩张量与主动重构诱导的后期融合多核聚类算法(LTAR-LFMKC),突破了基划分矩阵表示能力的瓶颈,并学习到能凸显聚类结构的高阶跨视图信息。具体来说,该方法主动对决策层进行重建并在后期融合过程中进行校准和优化,通过将重建表示堆叠成张量使其在视图间凝练出更清晰的簇结构,并能直接学习到一致的聚类划分。本文提出的算法在大量基准数据集上提高了 22.9%~53.4% 的平均聚类性能,计算效率也提高了至数百倍,充分验证了 LTAR-LFMKC 的有效性和高效性。

关键词 多核聚类;后期融合;张量核范数;主动重构

中图法分类号 TP18 DOI 号 10.11897/SP.J.1016.2025.01991

Low-Rank Tensor and Active Reconstruction Induced Late Fusion Multiple Kernel Clustering

ZHANG Yi¹⁾ TIAN Zhi-Rong¹⁾ WANG Fang-Di¹⁾ WANG Si-Wei²⁾ LIU Ji-Yuan³⁾
LIU Xin-Wang¹⁾ ZHU En¹⁾

¹⁾ (College of Computer Science and Technology, Nation University of Defense Technology, Changsha 410073)

²⁾ (College of Intelligent Research, Academy of Military Sciences, Beijing 100091)

³⁾ (College of Systems Engineering, Nation University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract In the era of big data, the pressing need to integrate data from diverse sources and perspectives becomes increasingly apparent. Multiple kernel clustering (MKC), as a crucial data mining technique, exhibits unique advantages in capturing data features by combining multiple kernel functions, particularly in handling heterogeneous data from various sources. Consequently, it has been widely employed in the real world. The field of MKC has made significant strides, yet enhancing computational efficiency and clustering accuracy remains a focal point of research. Researchers are delving into a variety of efficient algorithms and techniques, including representation learning, neighborhood kernel learning, subspace clustering, and graph clustering. Among these, tensor nuclear norm technology garners significant attention for its deep exploration of the

收稿日期:2024-12-16;在线发布日期:2025-05-15。本课题得到国家科技创新 2030—重大项目(2022ZD0209103)、国家自然科学基金青年科学基金项目 A 类(62325604)、国家自然科学基金面上项目(62276271, 62476280, 62476281)、国家青年科学基金项目 C 类(62406369)资助。张 毅,博士,助理研究员,主要研究方向为多核学习、多视图聚类等。E-mail:zhangyi@nudt.edu.cn。田芷榕,本科生,主要研究方向为机器学习。王方地,硕士研究生,主要研究方向为机器学习。王思为,博士,助理研究员,主要研究方向为机器学习。刘吉元,博士,讲师,主要研究方向为联邦学习、多视图聚类等。刘新旺(通信作者),博士,教授,主要研究方向为多核学习、机器学习等。E-mail:xinwangliu@nudt.edu.cn。祝 恩,博士,教授,主要研究方向为人工智能、模式识别等。

structural makeup and higher-order information within multi-view data. For instance, Xie et al. introduced the multi-view subspace clustering method based on tensor singular value decomposition (t-SVD) method, proposing the multi-view subspace clustering approach based on tensor singular value decomposition (t-SVD-MS). In pursuit of greater robustness and clustering performance, Gao et al. explored a weighted tensor nuclear norm based on t-SVD, devising an efficient algorithm to optimize the minimization of the weighted tensor nuclear norm (WTNNM) problem. Nonetheless, tensor-based methods face the challenge of high computational complexity. Late fusion strategies offer an effective way to address complexity issues and boost computational efficiency. MKC based on late fusion strategy improves the computational efficiency of MKC to linear computational complexity by fusing at the clustering decision level, achieving encouraging clustering performance. However, they are still limited by the following two drawbacks: (1) The fused base partition matrices cannot be learned or optimized during the clustering process, leading their performance to be directly constrained by the clustering representation capability of the base partition matrices; (2) Existing methods explore consistency and complementarity among views by adjusting view weights but ignore the inherent higher-order correlations between views, resulting in a lack of ability to fully exploit multiple kernel information. To address the aforementioned challenges, this paper proposes a novel low rank tensor and active reconstruction induced late fusion multiple kernel clustering algorithm (LTAR-LFMKC), breaking the bottleneck of base partition matrix representation capability and learning meaningful high-order cross-view information. Specifically, this method actively reconstructs decision layers and calibrates them during the late fusion process. The reconstructed representations are stacked into a tensor to derive clearer cluster structures across views and directly learn a consistent clustering partition. To solve the resultant optimization problem, this paper carefully designs a six steps alternative optimization strategy, ensuring convergence into local optima while remains high computational efficiency. In addition, this paper carries out the comprehensive experiments on numerous benchmark datasets, and experimental results demonstrate the performance improvement of the proposed LTAR-LFMKC. Specifically, the clustering accuracy is improved by an average of 22.9% to 53.4% on benchmark datasets, and computational efficiency is enhanced by several hundred times, fully validating the effectiveness and efficiency of LTAR-LFMKC.

Keywords multiple kernel clustering; late fusion; tensor nuclear norm; active reconstruction

1 引 言

在大数据时代的背景下,如何有效地整合来自不同视角的多源数据成为一个亟待解决的问题。多核聚类(Multiple Kernel Clustering, MKC)作为一项重要的数据挖掘技术,通过组合多个核函数来捕捉数据的不同特征,在处理多源异构数据方面展现出了独特的优势^[1-2]。目前多核聚类已在生物信息学、计算机视觉和社会科学等多个领域得到了广泛应用^[3-8]。尽管多核聚类在理论和实践上都取得了显著进展,但如何进一步提高其计算效率和聚类精度仍然是当前研究的一个热点问题。为此,众多学者

投入了大量精力,探索更为高效的算法和技术^[9-12]。

近年来,为了改善多核聚类的性能,研究员已取得了显著进展并开发了多种新型算法。例如,Huang 等人^[13-14]研究了一系列表示学习方法,并提出最优核是基核的线性组合。进一步地,Liu 等人^[15-16]通过邻域核学习方法寻求基核的非线性组合,以更好地表示最优核。此外,Liu 等人^[17-18]在中引入了矩阵诱导正则化,以考虑核的选择。为降低计算复杂度,Zhang 等人^[19-20]提出后期融合方法,在聚类决策层面上最大限度地对齐视图。通过引入一个最小-最大框架^[21],Liu 将问题重新表述为一个平滑的最小化问题,并使用归约梯度下降算法高效地解决。在此基础上,Liu^[22-23]又引入了几种变体。

Zhang 等人^[24]提出了一种多阶段融合方式,以深化视图之间的融合程度。此外,许多基于子空间和图的聚类算法的性能在很大程度上取决于相似度图的质量^[25],Kang 等人^[26-27]通过核化的自表达子空间学习来学习更高质量的相似度图。Ren 等人^[28]综合考虑全局和局部结构信息,并考虑融合多个学得候选相似度图^[29-30],以获取一个共识相似度图。

在这些新兴的多核聚类方法中,张量核范数技术因其能够深入挖掘多视图数据的空间结构和高阶信息而受到了广泛关注。Xie 等人^[31]通过引入张量分解方法(t-SVD),提出了基于张量奇异值分解的多视图子空间聚类(t-SVD-MSD)方法。为了进一步提高鲁棒性和聚类性能,Gao 等人^[32]研究了基于 t-SVD 的加权张量核范数,并开发了一种高效算法来优化加权张量核范数最小化(WTNM)问题,统一低秩张量和图学习的多视图聚类(UGLTL^[33])也被进一步提出。尽管这些技术取得了巨大成功,但其至少为 $O(n^2 \log n)$ 的高计算复杂度难以被接受。为此,Chen 等人提出了张量学习诱导的多视图谱聚类(TLIMSD^[34]),试图提高计算效率。然而,该算法存在致命缺陷:即当视图数量大于簇的数量时,算法将无法运行。由此可见,对基于张量技术的多核聚类方法而言,如何降低计算复杂度仍是一个亟待解决的问题。

为了降低计算复杂度并提升计算效率,研究人员尝试采用后期融合策略,即在聚类决策层面进行融合。这不仅极大地提升了计算效率,实现了接近线性的计算复杂度,而且在聚类性能方面也取得了显著进步。尽管如此,基于后期融合策略的多核聚类仍然面临一些挑战。首先,这些基划分矩阵一般是由核矩阵通过特征值分解直接得到的,是数据预处理阶段的一部分(或称为初始化),而作为算法的输入,这些矩阵在聚类过程中无法进行学习优化。同时,简单的特征值分解无法得到非常理想的聚类划分结构,该结构却直接影响了聚类算法后续的学习过程。因此,通过初始化得到的基划分矩阵直接成为了聚类算法性能的瓶颈,若得到的基划分矩阵不佳,就可能无法充分利用核矩阵中的有效信息,或被核矩阵中的噪声信息严重干扰。这就意味着它们的聚类性能受到了基划分矩阵簇结构表示能力的限制。其次,现有的后期融合方法大多通过调整视图权重来探讨视图间的一致性和互补性,但这种做法忽视了视图之间潜在的高阶相关性,无法充分利用多核信息,从而限制了整体的聚类效果。

为了解决上述问题,本文提出了一种新颖的后期融合多核聚类算法——低秩张量与主动重构诱导的后期融合多核聚类(Low-Rank Tensor and Active Reconstruction-induced Late Fusion Multiple Kernel Clustering, LTAR-LFMKC)。该方法提出主动对基划分矩阵进行重构,根据聚类过程去动态地进行调整与适应,从而能够克服传统后期融合策略中基划分矩阵表示能力的瓶颈和对初始化的严重依赖,在算法优化过程中持续不断地学习、重构,使该重构过程与聚类结构的学习过程相辅相成。并且,该方法借助新兴的基于张量奇异值分解(t-SVD)的张量核范数技术,能够在挖掘数据中跨视图的空间结构和高阶信息,并大幅降低了算法计算复杂度。通过主动重构决策层,并在后期融合过程中进行校准和优化,LTAR-LFMKC 能够有效地从多个视角提炼出更清晰的簇结构,并直接学习到一致的聚类划分。

在算法设计上,我们提出了一种巧妙的方法来求解优化问题,即将重建表示堆叠成张量形式,这样不仅可以在视图间凝练出更清晰的簇结构,而且还能够直接学习到一致的聚类划分。实验结果显示,LTAR-LFMKC 在多个基准数据集上的聚类精度指标上平均提高了 22.9%~53.4%,并且计算效率也提高了至多数百倍,充分验证了所提出方法的有效性和高效性。这些结果表明,LTAR-LFMKC 在提高多核聚类性能的同时,也大幅提高了计算效率,为后续的研究提供了新的思路 and 方向。

本文的主要贡献总结如下:

(1) 本文首次提出了对基划分矩阵进行主动重构并动态优化的方法,以此突破了基于后期融合的多核聚类算法受限于基划分矩阵的簇结构表示能力瓶颈,大幅提高了算法的学习能力和聚类效果。

(2) 本文首次使用主动重构的动态基划分矩阵来构建张量,以捕获数据中跨视图的空间结构和高阶关联,使得主动重构策略与张量学习两个过程能够互相协助,从而取得较优的聚类效果。并且本文提出的方法大幅降低了基于张量方法的多核聚类的计算复杂度。

(3) 本文设计了一种基于交替方向乘子方法的轮替优化策略来求解所提出的 LTAR-LFMKC 算法。在 10 个基准数据集上进行的广泛实验表明,与最先进的多核聚类算法相比,本文提出的算法提高了平均聚类性能的 22.9%~53.4%,计算效率也提高了至多数百倍,验证了算法的有效性和高效性。

本文第 2 节中介绍了文献中的相关工作;第 3 节中对所提出的 LTAR-LFMKC 进行了详细的介绍,包括主要符号、算法的推导过程、优化方法、计算复杂度分析与讨论;第 4 节中,在 10 个基准数据集上进行了广泛的比较实验,并对结果进行了充分的讨论分析;第 5 节中对本文进行了总结与展望。

2 相关工作

2.1 多核 K 均值聚类

K 均值聚类算法意味着通过最小化簇内距离和最大化簇间距离将数据点划分为 k 个簇,其目标式可以表达为

$$\min_{\mathbf{S}, \mathbf{c}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k S_{ij} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_j\|^2 \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_i$ 表示第 i 个数据样本, $\mathbf{c}_j$ 表示第 j 个簇的中心, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 为聚类分配矩阵(其中如果第 i 个样本被分配给第 j 个簇,则 $S_{ij}=1$)。此外, n 和 k 分别表示样本和簇的数量。

在处理线性不可分的复杂数据时,相关研究工作常将其特征映射到高维的希尔伯特空间(RKHS)中。在此空间中,数据变为线性可分,故可较为方便地捕获其结构信息。值得注意的是,映射后特征的维度可能非常高甚至无穷大,因此一般通过利用核技巧来计算核矩阵,从而避免了显式的映射过程。接下来,通过令 $\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{L}^{(1/2)}$ 将聚类分配矩阵 $\mathbf{S}$ 松弛到实数域,其中 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 是对角线矩阵,对角线上的每个元素分别是聚类分配矩阵 $\mathbf{S}$ 相应列和的倒数。由此,核 K 均值聚类算法可以表达为

$$\min_{\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}} \text{Tr}(\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{H}^T)) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{K}$ 表示使用隐式映射函数 $\phi(\cdot)$ 计算出的核矩阵。

遵循多核学习^[35]的框架,核 K 均值(kernel k -means, KKM)方法可以扩展到多视图场景。其中,最佳的共识核矩阵一般假设为预定义的基本核矩阵的线性组合。因此,多核 K 均值聚类算法的框架可以公式化地表达为

$$\min_{\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}, \gamma \in \Delta} \text{Tr}(\mathbf{K}_\gamma(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}\mathbf{H}^T)) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{K}_\gamma = \sum_{p=1}^m \gamma_p^2 \mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}_p$ 是第 p 个视图的核矩阵, γ_p 是相应的核视图权重系数, $\Delta = \{\gamma \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{p=1}^m \gamma_p = 1, \gamma_p \geq 0, \forall p\}$, m 表示视图的数量。在现有文献中,多核 K 均值聚类算法通常采用坐标轮替下降优化方法,即保持其他变量固定的同时,迭代地对特定变量进行优化。

2.2 后期融合多核聚类

最近,文献[20]提出了一种后期融合多核聚类(Late Fusion Multiple Kernel Clustering, LFMKC)方法来解决多核聚类存在的计算复杂度挑战。与通过加权组合核矩阵 $\{\mathbf{K}_p\}_{p=1}^m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 来表示多视图分布信息的多核 K 均值聚类方法不同,后期融合多核聚类通过在聚类决策层面进行融合,利用较小的基划分矩阵 $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 来捕获每个核视图的数据分布。该策略显著降低了多核聚类过程中的时间和内存开销。后期融合多核聚类旨在通过融合各个基划分矩阵 $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m$ 来学习共识的聚类划分矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times k}$,其目标式可以表达为

$$\begin{aligned} \max_{\{\mathbf{T}_p\}_{p=1}^m, \gamma, \mathbf{H}} & \text{Tr}(\mathbf{H}^T \sum_{p=1}^m \gamma_p \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p) \\ \text{s. t. } & \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}, \mathbf{T}_p^T \mathbf{T}_p = \mathbf{I}, \forall p, \gamma \in \nabla \end{aligned} \quad (4)$$

其中, γ 表示不同核视图的权重系数, $\nabla = \{\gamma \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{p=1}^m \gamma_p^2 = 1, \gamma_p \geq 0, \forall p\}$, $\mathbf{T}_p \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 是第 p 个列置换矩阵,用于有效地对齐不同视图的基划分矩阵。通过式(4)可以观察到,后期融合多核聚类旨在通过最大化所有变量来优化目标函数。为此,其设计了坐标轮替下降法来优化方程。如文献[20]指出,后期融合多核聚类的线性计算复杂性和有效性,使之能够对大规模多视图数据进行聚类。

2.3 三阶张量的相关定义

2.3.1 张量奇异值分解

对于一个张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$,其张量奇异值分解(tensor singular value decomposition, t-SVD)可以因式分解为 $\mathcal{A} = \mathbf{U}^* \mathbf{S}^* \mathbf{V}^T$,其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 和 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 是正交矩阵, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 是一个 f -对角张量,其每个正面切片都是一个对角线矩阵。根据文献[36-37],上述张量奇异值分解可以通过傅里叶域中的矩阵奇异值分解来有效地解决,即 $\bar{\mathcal{A}}_k = \bar{\mathbf{U}}_k \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{V}}_k^T$,其中 $k=1, 2, \dots, n$ 。

2.3.2 基于张量奇异值分解的张量核范数

对于一个张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$,其基于张量奇异值分解的张量核范数(t-SVD based tensor nuclear norm, t-TNN)可以表示为

$$\|\mathcal{A}\|_{\odot} = \sum_{k=1}^{n_3} \|\bar{\mathcal{A}}_k\|_* = \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{i=1}^{\min(n_1, n_2)} \sigma_i(\bar{\mathcal{A}}_k) \quad (5)$$

其中, $\sigma_i(\bar{\mathcal{A}}_k)$ 表示 $\bar{\mathcal{A}}_k$ 的第 i 个最大奇异值。值得一提的是,根据文献[38-39],基于张量奇异值分解的张量核范数被证明是有效的,并且是多阶张量的 l_1

范式的最紧凸松弛。

3 方 法

符号系统 本文使用小写字母(例如 m)表示标量、书法体字母(例如 $\mathcal{H}$)表示张量、粗体小写字母(例如 $\mathbf{x}$)表示向量、粗体大写字母(例如 $\mathbf{H}$)表示矩阵。对于矩阵, $\|\mathbf{H}\|_*$ 表示矩阵的核范数, $\delta_i(\mathbf{H})$ 表示矩阵的第 i 个最大奇异值, $\|\mathbf{H}\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。对于三阶张量 $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 而言, $\|\mathcal{H}\|_{\mathbb{C}}$ 表示张量的基于张量奇异值分解的张量核范数, $fft(\mathcal{H}, [], 3)$ 表示沿第 3 维度的快速傅里叶变换(FFT), $ifft(\mathcal{H})$ 表示逆快速傅里叶变换(IFFT)。

为了清晰表示本文中的主要符号,我们将其总结在表 1 中。

表 1 本文使用的主要符号和含义

符号	含义
n	样本数量
k	簇的数量
m	视图数量
$\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times k \times m}$	由矩阵 $\mathbf{H}$ 堆叠成的张量
ρ, λ	权衡参数
$\phi(\cdot)$	核特征映射函数
$\gamma \in \mathbb{R}^m$	核权重系数
$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{k \times k}$	单位矩阵
$\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$	第 p 个视图的基核矩阵
$\mathbf{H}^* \in \mathbb{R}^{n \times k}$	共识的聚类划分矩阵
$\mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^{n \times k}$	第 p 个视图的基划分矩阵
$\mathbf{T}_p \in \mathbb{R}^{k \times k}$	第 p 个视图的列置换矩阵

3.1 算 法

多核 K 均值方法主要聚焦于学习一个最优的组合策略来获得最优核,从而学习到聚类划分矩阵,而核矩阵层面的融合往往会导致忽视来自不同视图的异质特点和互补信息。因此基于后期融合策略的多核聚类受到了广泛的研究,不仅在融合不同视图信息时能够获取到更直观的簇结构,在计算效率上也取得了较大的提升,达到了线性的计算复杂度。然而,现有的后期融合多核聚类算法无法在聚类过程中进行动态优化需要融合的基划分矩阵,因此他们的性能直接受限于基划分矩阵的簇结构表示能力瓶颈;此外,虽然他们通过学习视图权重来研究视图间的一致性和互补性,却忽视了视图之间固有的高阶相关性,导致欠缺挖掘多核信息的能力。

为了解决这些问题,本文提出了一种低秩张量学习和动态重构诱导的新型动态后期融合多核聚类算法,突破了基划分矩阵表示能力的瓶颈,并学习到有意义的高阶跨视图信息。该方法主动对决策层进行重构

并在后期融合聚类过程中进行动态的校准与优化,将动态重构表示堆叠成张量,使其在视图间凝练出更清晰的簇结构,并能直接学习到一致的聚类划分。

我们首先引入 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 对后期融合多核聚类的基划分矩阵 $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m$ 进行重构,通过 F 范数来保证重构的质量,并对其施加相同的列正交约束,在后续的迭代过程中不断对其进行动态的校准和优化。然而,由于聚类是一项无监督学习任务, $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m$ 和 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 中的聚类结构在不同视图中并不一定能很好地同时与样本标签对齐。为了解决这一问题,我们引入了可学习的列置换矩阵 $\{\mathbf{T}_p\}_{p=1}^m$ 来将不同视图间的聚类结构进行整合,表达式为

$$\min_{\{\hat{\mathbf{H}}_p, \mathbf{T}_p\}_{p=1}^m} \sum_{p=1}^m \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_F^2$$

$$\text{s. t. } \hat{\mathbf{H}}_p^T \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{I}, \mathbf{T}_p^T \mathbf{T}_p = \mathbf{I} \quad (6)$$

在此基础上,为了构建端到端的一步多核聚类模型,我们将跨视图的共识聚类划分矩阵 $\mathbf{H}^*$ 的学习融入目标函数中。同样地,我们引入了可学习的列置换矩阵 $\{\hat{\mathbf{T}}_p\}_{p=1}^m$ 来将不同视图的聚类划分进行对齐。表达式为

$$\min_{\mathbf{H}^*, \{\hat{\mathbf{H}}_p, \hat{\mathbf{T}}_p, \mathbf{T}_p\}_{p=1}^m} \left\| \mathbf{H}^* - \sum_{p=1}^m \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p \right\|_F^2 + \lambda \sum_{p=1}^m \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_F^2$$

$$\text{s. t. } \mathbf{H}^{*T} \mathbf{H}^* = \hat{\mathbf{H}}_p^T \hat{\mathbf{H}}_p = \hat{\mathbf{T}}_p^T \hat{\mathbf{T}}_p = \mathbf{T}_p^T \mathbf{T}_p = \mathbf{I} \quad (7)$$

此外,为了探索与挖掘视图间固有的高阶相关性信息,我们将动态重构的基划分矩阵 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 堆叠成张量形式,并引入了基于奇异值分解的张量核范数对其施加约束,表达式为

$$\min_{\mathbf{H}^*, \{\hat{\mathbf{H}}_p, \hat{\mathbf{T}}_p, \mathbf{T}_p\}_{p=1}^m} \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_F^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_F^2 + \rho \|\mathcal{H}\|_{\mathbb{C}}$$

$$\text{s. t. } \mathbf{H}^{*T} \mathbf{H}^* = \hat{\mathbf{H}}_p^T \hat{\mathbf{H}}_p = \hat{\mathbf{T}}_p^T \hat{\mathbf{T}}_p = \mathbf{T}_p^T \mathbf{T}_p = \mathbf{I} \quad (8)$$

其中, $\mathcal{H}$ 表示由 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 堆叠成的张量, λ 和 ρ 是两个权衡参数。

对于最终的共识聚类划分矩阵的获取, KCGT^[40] 等方法采用相似度图张量的切片平均和来表示共识划分,然而在实践中这一做法破坏了矩阵原本的特性与约束,导致不能保证具有显著的聚类划分结构。而本文提出的 LTAR-LFMKC 能够直接学习到最终的共识聚类划分矩阵,并且能够保持聚类划分结构的列正交约束始终没有被破坏。

从式(8)中可以看出,本文提出的 LTAR-LFMKC 对后期融合聚类的基划分矩阵进行了动态重构,并且通过引入基于奇异值分解的张量核范数来捕获视图间的高阶关联,既能很好突破后期融合聚类性能受限的瓶颈,又保持了算法的高计算效率,也能使算法更专注于对多个核视图的信息进行直观的探索。实验章节中的大量实验事实验证了本文提出的 LTAR-LFMKC 算法的有效性和高效性。

3.2 优 化

为了解决由式(8)产生的优化问题,本文采用交替方向乘子方法(ADMM)来求解所 LTAR-LFMKC,即更新一个特定变量的同时保持其他变量不变。为了保证式(8)中张量 $\hat{\mathcal{H}}$ 的独立性,我们遵循 ADMM 的原则引入了辅助张量变量 $\mathcal{A}$ 并得到增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbf{H}^*, \{\hat{\mathbf{H}}_p, \hat{\mathbf{T}}_p, \mathbf{T}_p\}_{p=1}^m) \\ &= \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_{\text{F}}^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_{\text{F}}^2 \\ &+ \rho \|\hat{\mathcal{A}}\|_{\mathbb{C}} + \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{A} - \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \\ &\text{s. t. } \mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{H}^* = \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{H}}_p = \hat{\mathbf{T}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{T}}_p = \mathbf{T}_p^{\text{T}} \mathbf{T}_p = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k \times m}$ 表示拉格朗日乘子, $\mu > 0$ 为惩罚因子。

我们采用交替最小化策略,可以将方程(9)中的问题分为五个子问题。每个子问题在其他变量保持固定的情况下,单独优化特定的变量。

$\mathbf{H}^*$ 子问题:通过固定其他变量,关于 $\mathbf{H}^*$ 的子问题可以表示为

$$\min_{\mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{H}^* = \mathbf{I}} \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_{\text{F}}^2 \quad (10)$$

通过展开 Frobenius 范数和并对其进行化简可以得到以下等价形式的矩阵对齐问题:

$$\max_{\mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{H}^* = \mathbf{I}} \text{Tr}(\mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{B}) \quad (11)$$

其中, $\mathbf{B} = \sum_{p=1}^m \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p$ 。针对该形式的问题,本文引入以下定理来进行求解。

定理 1. 假设问题(11)中的矩阵 $\mathbf{B}$ 的奇异值分解形式为 $\mathbf{B} = \mathbf{S}_k \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_k^{\text{T}}$, 其中 $\mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\mathbf{\Sigma}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$, 则问题(11)的闭式解为 $\mathbf{H}^* = \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^{\text{T}}$ 。

证明^[41]。通过奇异值分解,问题可以改写为 $\text{Tr}(\mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{S} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^{\text{T}}) = \text{Tr}(\mathbf{V}^{\text{T}} \mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{S} \mathbf{\Sigma})$, 其中, $\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{\text{T}} \mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{S}$, 满足 $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{\text{T}} = \mathbf{V}^{\text{T}} \mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{S} \mathbf{S}^{\text{T}} \mathbf{H}^* \mathbf{V} = \mathbf{I}_k$ 。有 $\text{Tr}(\mathbf{V}^{\text{T}} \mathbf{H}^{*\text{T}} \mathbf{S} \mathbf{\Sigma}) = \text{Tr}(\mathbf{Q} \mathbf{\Sigma}) \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i$ 。因此问题(11)的解可表示为 $\mathbf{H}^* = \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^{\text{T}}$ 。

证毕。

我们可以很容易地通过对 $\mathbf{M}$ 执行经济型 k 秩奇异值分解(economic rank- k SVD)计算得到 $\hat{\mathbf{T}}_p$ 的闭式解。假设矩阵 $\mathbf{M}$ 具有 k 秩的截断奇异值分解(truncated SVD)形式如 $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 该问题的最优闭式解为 $\mathbf{U} \mathbf{V}^{\text{T}}$ 。因此式(11)中的问题具有以下形式的闭式解:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{U} \mathbf{V}^{\text{T}} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 分别为的截断型 SVD 的左右奇异值矩阵。

$\hat{\mathbf{H}}$ 子问题:通过固定其他变量,可以通过以下问题来更新 $\hat{\mathbf{H}}$:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{H}}_p} \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_{\text{F}}^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_{\text{F}}^2 \\ &+ \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{A} - \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \right) \right\|_{\text{F}}^2, \text{ s. t. } \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (13)$$

而对于每一个核视图来说,式(13)中的问题可以表示为以下 m 个子问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{H}}_p} \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_{\text{F}}^2 + \lambda \|\hat{\mathbf{H}}_p - \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p\|_{\text{F}}^2 \\ &+ \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{A} - \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \right) \right\|_{\text{F}}^2, \text{ s. t. } \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (14)$$

上述式(14)中的问题通过展开 Frobenius 范数,我们可以化简得到以下等价的问题:

$$\begin{aligned} & \max_{\hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{I}} \text{Tr}(\hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \mathbf{H}^* \hat{\mathbf{T}}_p + \lambda \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p + \rho \mu \hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \mathbf{Q}_p) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{Q}_p$ 表示 $\mathcal{Q} = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{Y}}{\mu}$ 的第 p 个切片。令 $\mathbf{M}_p =$

$\mathbf{H}^* \hat{\mathbf{T}}_p^{\text{T}} + \lambda \mathbf{H}_p \mathbf{T}_p + \rho \mu \mathbf{Q}_p$, 式(15)可以表示为以下问题:

$$\max_{\hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{I}} \text{Tr}(\hat{\mathbf{H}}_p^{\text{T}} \mathbf{M}_p) \quad (16)$$

通过定理 1, 我们可以直接得到问题(16)的最优解为:

$$\hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{U}_p \mathbf{V}_p^{\text{T}} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{U}_p$ 和 $\mathbf{V}_p$ 分别为 $\mathbf{M}_p$ 的截断型 SVD 的左右奇异值矩阵。

$\hat{\mathbf{T}}$ 子问题:通过固定其他变量,我们可以通过以下问题来更新 $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\min_{\hat{\mathbf{T}}_p^{\text{T}} \hat{\mathbf{T}}_p = \mathbf{I}} \sum_{p=1}^m \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_{\text{F}}^2 \quad (18)$$

对于每一个核视图来说,式(18)中的问题可以

表示以下 m 个独立的子问题:

$$\min_{\hat{\mathbf{H}}_p, \hat{\mathbf{T}}_p} \|\mathbf{H}^* - \hat{\mathbf{H}}_p \hat{\mathbf{T}}_p\|_F^2 \quad (19)$$

再通过化简可以得到以下等价形式的问题:

$$\min_{\hat{\mathbf{T}}_p} \text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}_p^T \hat{\mathbf{H}}_p^T \mathbf{H}^*) \quad (20)$$

通过定理 1, 我们可以得到问题(20)的最优解为:

$$\hat{\mathbf{T}}_p = \hat{\mathbf{U}}_{ip} \hat{\mathbf{V}}_{ip}^T \quad (21)$$

其中, $\hat{\mathbf{U}}_{ip}$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_{ip}^T$ 分别为 $\hat{\mathbf{H}}_p^T \mathbf{H}^*$ 的截断型 SVD 的左右奇异值矩阵。

T 子问题: 与更新 $\hat{\mathbf{T}}$ 的过程相似, 我们首先可以将求解 $\mathbf{T}$ 的问题化简为如下的 m 个独立子问题:

$$\max_{\mathbf{T}_p} \text{Tr}(\mathbf{T}_p^T \mathbf{H}_p^T \mathbf{H}_p) \quad (22)$$

通过定理 1, 我们可以得到问题(22)的最优解为

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{U}_{ip} \mathbf{V}_{ip}^T \quad (23)$$

其中, $\mathbf{U}_{ip}$ 和 $\mathbf{V}_{ip}^T$ 分别为 $\mathbf{H}_p^T \hat{\mathbf{H}}_p$ 的截断型 SVD 的左右奇异值矩阵。

A 子问题: 通过固定其他变量, $\mathcal{A}$ 子问题是一个 t-TNN 最小化问题, 可以通过解决以下问题来解决:

$$\min_{\mathcal{A}} \rho \|\mathcal{A}\|_{\odot} + \frac{\mu}{2} \left\| \mathcal{A} - \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \right) \right\|_F^2 \quad (24)$$

令 $C = \hat{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{Y}}{\mu}$, 为了解决式(24)中的 t-TNN 最小化问题, 需要引入以下定理来通过利用 c 的张量 tubal-shrinkage 运算来求解。

定理 2^[42]. 给定 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $l = \min(n_1, n_2)$, 其中 $\mathcal{A} = \mathbf{U}^* \mathbf{S}^* \mathbf{V}^T$, 从而问题 $\min_{\mathcal{A}} \rho \|\mathcal{A}\|_{\odot} + 1/2 \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|_F^2$ 的全局最优解可张量 tubal-shrinkage 运算给出, 结果遵循 $\mathcal{A} = \Gamma_{\tau}(\mathcal{B}) = \mathbf{U}^* \text{ifft}(\mathbf{P}_{\tau}(\overline{\mathcal{B}}))^* \mathbf{V}^T$ 。该表达式中 $\overline{\mathcal{B}} = \text{fft}(\mathcal{B}, [], 3)$, $\mathbf{P}_{\tau}(\overline{\mathcal{B}})$ 的第 i 个正面切片, $\mathbf{P}_{\tau}(\overline{\mathcal{B}}_i) = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$, 其中 $\xi = \text{sign}(\sigma_i(\mathcal{B}_i)) \max(\sigma_i(\mathcal{B}_i) - \tau, 0)$ 。

因此根据该定理, 我们可以直接利用现有张量计算工具, 从而得到式(24)中问题的全局最优解。

更新 $\mathcal{Y}$ 和 μ : 拉格朗日乘子 $\mathcal{Y}$ 和惩罚因子 μ 在优化过程中可以通过下式进行更新:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{Y} + \mu(\mathcal{F} - \mathcal{A}) \\ \mu &= \tau \times \mu \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\tau > 1$ 旨在加快收敛速度, 在本文方法中默认设置 $\tau = 2$ 为常量。

最后, 我们在算法 1 中总结了 LTAR-LFMKC

的优化求解过程。

算法 1. LTAR-LFMKC

输入: 基划分矩阵 $\mathbf{H}$ 、簇个数 k 、权衡参数 λ 和 ρ

输出: 最终的聚类划分矩阵 $\mathbf{H}^*$

1. 初始化

$$\mathcal{A} = \Phi(\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_m), \hat{\mathbf{H}}_p = \mathbf{H}_p, \hat{\mathbf{T}}_p = \mathbf{I}, \forall p$$

2. WHILE 未收敛 DO

3. 通过求解式(12)来更新 $\mathbf{H}^*$;

4. 通过求解式(17)来更新 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$;

5. 通过求解式(21)来更新 $\{\hat{\mathbf{T}}_p\}_{p=1}^m$;

6. 通过求解式(23)来更新 $\{\mathbf{T}_p\}_{p=1}^m$;

7. 通过求解式(24)来更新 $\mathcal{A}$;

8. 通过求解式(25)来更新 $\mathcal{Y}$ 和 μ ;

9. 判断是否达到收敛条件。

10. END WHILE

3.3 讨论

3.3.1 计算复杂度

在数据预处理阶段, LTAR-LFMKC 的计算复杂度主要分为两个阶段: 数据预处理阶段和算法迭代阶段。

在数据预处理阶段, $\mathbf{H}_p$ 是由核矩 $\mathbf{K}_p$ 的前 k 个最大特征值对应的特征向量组成, 得到 $\mathbf{H}_p$ 的过程可以看作算法数据的预处理过程, 一般采用特征值分解, 也可采用奇异值分解进行加速, 但仅需在预处理阶段执行一次, 并视作算法的输入。由于仅需前 k 个特征向量且 $k \ll n$, 可以采用 Lanczos 迭代法, 复杂度可降至 $O(n^2, k)$, 则计算得到全部 $\mathbf{H}_p$ 的预处理过程所需计算复杂度为 $O(n^2 mk)$; 若采用奇异值分解进行加速, 其计算复杂度为 $O(nsk + sk^2)$, 其中 s 为锚点数量。

在每轮迭代过程中, 所提出的 LTAR-LFMKC 的计算复杂度如下。更新式(12)中的 $\mathbf{H}^*$ 涉及截断型 SVD 和矩阵乘法, 需要 $O(nk^2 + nk)$ 的计算复杂度; 相似的, 更新式(17)中的 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 需要 $O(mnk^2 + nk)$ 的计算复杂度; 更新式(21)中的 $\{\hat{\mathbf{T}}_p\}_{p=1}^m$ 和更新式(23)中的 $\{\mathbf{T}_p\}_{p=1}^m$ 都需要 $O(mnk^2 + mk^3)$ 的计算复杂度; 而更新式(24)中的 $\mathcal{A}$ 涉及求解近邻运算符, 需要 $O(mmk \log(m) + mnk^2)$ 的计算复杂度。综上, LTAR-LFMKC 每轮迭代的总计算复杂度为 $O(3nmk^2 + mk^3 + nmk \log(m))$, 而一般情况下 $n \gg k, k > \log m$, 因此 LTAR-LFMKC 的计算复杂度可以简化为 $O(nmk^2)$ 。

3.3.2 与现有算法的对比

LTAR-LFMKC 采用了后期融合多核聚类的基本框架, 并且首次对基划分矩阵进行主动重构并

动态优化,以此突破了基于后期融合的多核聚类算法受限于基划分矩阵的簇结构表示能力瓶颈;而现有的基于后期融合的聚类算法,例如 LFMKC、OPLFMKC 等均不能直接对基划分矩阵进行优化学习,它们的聚类性能将直接受限于初始的基划分矩阵。此外,LTAR-LFMKC 首次使用主动重构的动态基划分矩阵来构建张量,以捕获数据中跨视图的空间结构和高阶关联,使得主动重构策略与张量学习两个过程能够互相协助,从而取得较优的聚类效果。并且本文提出的方法大幅降低了基于张量方法的多核聚类的计算复杂度。具体来说,现有基于张量学习的聚类算法大多基于图学习,例如基于低阶张量的多视图聚类邻近学习(LTBPL^[43])、统一低秩张量和图学习的多视图聚类(UGLTL^[33])、张量图学习的多视图子空间聚类(WTNM^[32])和基于耦合图张量学习的多核聚类(KCGT^[40])而它们的计算复杂度为 $O(n^3m + n^2m^2)$ 或 $O(n^3m + n^2ms)$,其中 s 表示锚点数量。基于张量奇异值分解的多视图子空间聚类(t-SVD-MSD)方法也有着至少为 $O(n^2\log n)$ 的高计算复杂度。为此,张量学习诱导的多视图谱聚类(TLIMSC^[34])提出以提高计算效率。然而,该算法存在一个致命缺陷,即当视图数量大于簇的数量时,算法将无法运行。

对于经典的多核聚类算法,其计算复杂度一般为 $O(n^3)$,例如常见的局部化多核 K 均值聚类(LMKKM^[3])、最优邻居多核聚类(ONKC^[15])、带矩阵诱导正则化项的多核 K 均值聚类(MKKM-MR^[17])、局部对齐最大化的多核聚类(LKAM^[44])、居核子空间分割的多核聚类(NKSS^[45])、结构保护的多核聚类(SPMKC^[28])、局部化的简单多核 K 均值聚类(LSMKKM^[22])、无超参数的局部化简单多核 K 均值聚类(HFLSMKKM^[23]),它们的计算复杂度均为 $O(n^3 + n^2m)$;层次化多核聚类(HMKC^[46])的计算复杂度为 $O(n^3m)$ 。

因此,LTAR-LFMKC 的 $O(nmk^2)$ 计算复杂度与常见 MKC 算法的至少为 $O(n^3)$ 的计算复杂度形成了显著的差距,在实验章节的计算效率分析中也可以看到本文提出算法的优越性。

4 实 验

4.1 实验设置

4.1.1 数据集

本文使用多个基准数据集来评估 LTAR-LFMKC 的综合聚类性能,包括 ProteinFold^①、Caltech101^②、

Plant^③、Nonpl^④、4Area^[47]、Scene15^[48]、CCV^④、Flower102^⑤、ALOI100^⑥、Reuters^⑦。表 2 总结了所使用数据集的统计信息。其中,样本数量(694~18758)、核的数量(2~69)和簇的数量(3~102)都有较大的选择范围,提供了公平的实验环境来评估不同算法的聚类性能。

表 2 数据集的统计信息

数据集	样本数量	核的数量	簇的数量
ProteinFold	694	12	27
Plant	940	69	4
Nonpl	2732	69	3
Caltech101	3060	48	102
4Area	4236	2	4
Scene15	4485	2	15
CCV	6773	3	20
Flower102	8189	4	102
ALOI100	10800	4	100
Reuters	18758	5	6

4.1.2 对比方法

除了 LTAR-LFMKC 之外,我们还与从最近文献中选择的数十种 MKC 算法进行了比较。具体来说,本实验采用平均核 K 均值聚类算法(Avg-KKM)、最优单核 K 均值聚类算法(SB-KKM)作为基准算法,还选择了一些经典的 MKC 算法,包括多核 K 均值聚类(MKKM^[13])、局部化的多核 K 均值聚类(LMKKM^[3])、最优邻居多核聚类(ONKC^[15])、带矩阵诱导正则化项的多核 K 均值聚类(MKKM-MR^[17])、局部对齐最大化的多核聚类(LKAM^[44])。

此外,我们选了一些最新的方法,包括基于后期融合策略的方法,即后期融合多核聚类(LFMKC^[20])、单步后期融合多视图聚类(OPLFMVC^[19]);基于子空间和基于图的方法,即邻居核子空间分割的多核聚类(NKSS^[45])、结构保护的多核聚类(SPMKC^[28])、层次化多核聚类(HMKC^[46])、自加权积分空间快速多视图聚类(AIMC^[49])、高效正交多视图子空间聚类(OMSC^[50])、基于图的多视图聚类(GMC^[51]);基于最小最大优化的方法,即简单多核 K 均值聚类(SMKKM^[21])、局部化的简单多核 K 均值聚类(LSMKKM^[22])、无超参数的局部化简单多核 K 均

① mkl.ucsd.edu/dataset/protein-fold-prediction

② <https://www.vision.caltech.edu/datasets/>

③ <https://bmi.inf.ethz.ch/supplements/protsubloc/>

④ www.ee.columbia.edu/ln/dvmm/CCV/

⑤ <https://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data/flowers/>

⑥ <http://elki.dbs.ifi.lmu.de/wiki/DataSets/MultiView/>

⑦ <https://kdd.ics.uci.edu/databases/reuters21578/>

值聚类(HFLSMKKM^[23]);基于张量的方法,即张量学习诱导的多视图谱聚类(TLIMSC^[34])、基于低阶张量的多视图聚类邻近学习(LTBPL^[43])、统一低秩张量和图学习的多视图聚类(UGLTL^[33])、张量图学习的多视图子空间聚类(WTNNM^[32])、基于耦合图张量学习的多核聚类(KCGT^[40])。

为了保持一致性,对于每一个对比算法,我们采用了它们公开的源代码,并在同一实验环境中进行所有实验。关于算法参数的设置,本文遵循文献或作者的指导方针。具体来说, MKKM-MR、LFMKC、LSMKKM、TLIMSC 共 1 个超参数; ONKC、LKAM、NKSS、HMKC、OMSC、LTBPL、KCGT 和本文提出的 LTAR-LFMKC 共两个超参数。

4.1.3 评估指标

我们应用四个常用的标准:聚类准确性(ACC)、

标准化互信息(NMI)、纯度(PUR)和兰德指数(RI)。我们从聚类性能、收敛和进化、聚类划分、参数敏感性、时间复杂性和消融研究方面评估了所提出的 LTAR-LFMKC。

对于所有数据集,预先指定了簇的真实数量 k 并作为输入给出。另外,所有实验都重复了 20 次以消除 K 均值聚类的随机性所带来的负面影响,并且在实验结果中汇报其均值和标准差。

4.2 对比实验

表 3 至表 6 展示了前面提到算法的聚类性能(ACC、NMI、PUR 和 RI 指标)对比结果,其中‘—’表示相应结果由于内存不足或难以接受的开销从而无法获取,其中 TLIMSC 算法不支持核视图数量大于簇的数量的情形。我们加粗并标红了最优结果,次优和第三的结果分别用蓝色和橙色表示。通过对比实验结果,我们能够观察得到以下结论:

表 3 本文提出的 LTAR-LFMKC 与二十余种对比算法的聚类性能(ACC%)结果表

算法\数据集	ProteinFold	Plant	Nonpl	Caltech101	4Area	Scenel5	CCV	Flower102	ALOI100	Reuters
Avg-KKM	29.0±1.5	61.3±0.9	49.7±0.2	28.6±0.8	83.0±0.0	43.2±1.8	19.6±0.6	27.1±0.8	64.5±1.3	45.5±1.5
SB-KKM	33.8±1.3	51.2±1.1	57.5±0.1	33.9±0.8	74.7±0.0	39.3±0.2	20.1±0.2	33.0±1.0	64.7±1.6	47.2±0.0
MKKM	27.0±1.1	56.1±0.6	49.3±0.2	16.6±0.4	74.5±0.0	41.2±0.1	18.0±0.5	22.4±0.5	6.4±0.1	45.4±1.5
LMKKM	22.4±0.7	—	—	—	73.7±0.0	40.9±0.1	18.6±0.1	—	67.3±1.4	—
ONKC	36.3±1.5	41.4±0.2	56.7±0.0	28.2±0.9	71.1±0.0	39.9±1.4	22.4±0.3	39.5±0.7	67.9±1.3	41.8±1.2
MKKM-MR	34.7±1.8	50.3±0.8	50.4±0.0	28.5±0.8	71.7±0.0	38.4±1.1	21.2±0.9	40.2±0.9	68.5±1.5	46.2±1.4
LKAM	37.7±1.2	47.6±0.0	55.0±0.0	24.8±0.8	49.9±3.8	41.4±0.5	20.4±0.3	41.4±0.8	65.2±1.0	45.5±0.0
LFMKC	33.0±1.4	59.5±0.6	48.7±0.2	31.5±1.1	83.3±0.3	45.8±1.0	25.1±0.5	38.4±1.2	68.4±1.4	45.7±1.6
NKSS	36.4±0.7	43.3±0.0	—	—	61.6±2.6	40.4±0.3	20.0±0.2	41.7±0.8	65.1±1.2	—
SPMKC	17.8±0.5	51.4±0.1	51.0±0.0	—	74.3±0.0	38.0±0.1	16.2±0.2	25.6±0.4	51.9±1.5	—
HMKC	35.3±1.5	64.2±0.1	54.3±0.1	—	89.2±0.0	50.5±0.1	32.8±0.5	47.7±1.3	70.3±1.9	46.9±0.4
SMKKM	34.7±1.9	49.5±0.5	52.0±0.0	30.6±0.9	70.8±0.0	43.6±1.0	22.2±0.7	42.5±0.8	64.3±1.4	45.5±0.7
OPLFMVC	31.1±2.6	47.3±3.1	45.4±0.6	28.5±1.2	65.3±1.5	43.9±1.8	23.7±0.9	30.4±1.0	52.3±2.1	43.9±1.0
LSMKKM	36.3±1.5	57.1±0.8	69.3±0.0	30.5±0.8	71.8±0.4	44.5±1.6	21.5±0.9	43.8±1.0	66.5±1.3	47.1±1.0
AIMC	33.6±0.0	47.9±0.0	45.9±0.0	27.2±0.0	63.1±0.0	44.5±0.0	24.5±0.0	41.0±0.0	54.5±0.0	43.2±0.0
OMSC	31.8±0.0	56.5±0.0	44.4±0.0	28.9±0.0	67.2±0.0	41.7±0.0	25.1±0.0	38.9±0.0	48.6±0.0	42.4±0.0
HFLSMKKM	33.8±1.1	43.6±0.1	76.7±0.0	25.1±0.5	59.0±2.0	41.7±0.4	18.5±0.3	35.8±0.8	64.8±1.0	37.5±0.8
GMC	29.3±0.0	39.4±0.0	48.3±0.0	24.4±0.0	29.5±0.0	26.9±0.6	16.8±0.4	34.1±0.0	77.9±0.0	—
TLIMSC	34.6±0.0	—	—	27.2±0.0	35.9±0.0	42.1±0.0	16.0±0.0	32.4±0.0	78.4±0.0	33.1±0.0
LTBPL	32.1±1.1	48.2±0.0	63.9±0.0	—	42.7±1.2	40.1±0.7	—	—	—	—
UGLTL	51.1±1.7	68.6±1.2	77.2±0.0	87.6±1.6	71.5±0.0	94.4±5.1	43.7±1.3	65.8±2.3	84.5±1.4	—
WTNNM	43.2±1.7	68.0±0.1	61.7±0.0	—	65.2±0.0	76.1±1.2	47.7±0.0	61.7±0.9	—	—
KCGT	54.0±3.0	56.4±0.0	49.8±0.0	86.6±2.0	84.2±0.0	77.6±2.0	39.7±0.5	78.8±2.1	81.8±1.6	—
平均性能	34.3±13	52.8±0.5	55.4±0.1	34.6±0.8	66.7±0.6	46.8±1.0	24.3±0.5	41.1±0.9	63.5±1.2	43.8±0.8
LTAR-LFMKC	62.2±3.2	88.8±0.6	82.2±0.0	88.0±1.0	97.4±0.0	96.8±2.9	79.0±3.0	79.6±1.9	86.4±1.2	93.5±5.7

(1) LFMKC 被文献[20]提出以显著改进算法的计算效率,同时聚类性能也超过了很多对比算法,但其聚类性能仍存在明显的瓶颈。另一方面, HMKC 引入了层次化方法以最大化有利的细节并取得了性能提升。例如, LFMKC 在所有数据集上的 ACC 性能平均指标分别以 3.42%、2.93%、5.05%、6.42%、9.50% 的优势超过了 ONKC、MKKM-MR、

LKAM、NKSS、SPMKC;而 HMKC 在所有数据集上的 ACC 性能平均指标又分别以 4.81%、11.64%、14.76%、7.34%、11.99%、3.70% 的优势超过了 LFMKC、NKSS、SPMKC、SMKKM、OPLFMVC、LSMKKM。可以看到在所有非张量算法中, HMKC 的聚类性能基本达到了最优的程度。

(2) 纵观所有的对比算法,我们可以很容易发现

表 4 本文提出的 LTAR-LFMKC 与二十余种对比算法的聚类性能(NMI%)结果表

算法\数据集	ProteinFold	Plant	Nonpl	Caltech101	4Area	Scenel5	CCV	Flower102	ALOI100	Reuters
Avg-KKM	40.3±1.3	26.5±0.9	17.2±0.5	50.0±0.5	62.2±0.0	41.3±0.7	16.8±0.4	46.0±0.5	77.7±0.7	27.4±0.4
SB-KKM	41.1±1.1	16.9±1.1	11.3±0.0	53.4±0.5	53.9±0.0	37.9±0.1	17.7±0.1	48.7±0.4	80.3±0.5	25.5±0.0
MKKM	38.0±0.6	19.5±0.5	15.0±0.5	40.1±0.3	53.8±0.0	38.6±0.1	15.0±0.4	42.7±0.2	22.3±0.2	27.3±0.4
LMKKM	34.7±0.6	—	—	—	52.7±0.0	38.8±0.1	14.4±0.1	—	79.7±0.5	—
ONKC	44.4±0.9	10.5±0.2	11.8±0.0	49.9±0.5	46.2±0.0	37.7±0.6	18.5±0.2	56.1±0.4	79.8±0.5	22.3±0.4
MKKM-MR	43.7±1.2	20.4±0.4	14.8±0.0	50.2±0.5	47.0±0.0	37.3±0.6	18.0±0.4	56.7±0.5	80.9±0.6	25.3±0.7
LKAM	46.2±0.6	13.9±0.0	16.0±0.0	47.6±0.4	21.6±2.0	42.1±0.1	17.6±0.2	56.9±0.3	78.2±0.4	29.9±0.0
LFMKC	41.7±1.1	23.4±0.8	13.0±0.1	52.5±0.5	62.2±1.5	42.7±0.2	20.1±0.3	54.9±0.4	79.6±0.5	27.4±0.4
NKSS	46.5±0.5	14.2±0.0	—	—	38.8±1.1	39.4±0.2	16.9±0.2	58.6±0.2	78.4±0.5	—
SPMKC	27.3±0.5	24.2±0.0	11.7±0.0	—	53.2±0.0	39.3±0.1	12.1±0.1	42.3±0.2	69.4±1.0	—
HMKC	45.3±1.1	32.9±0.4	10.7±0.0	—	69.7±0.1	45.9±0.1	27.6±0.2	61.5±0.4	80.8±0.6	30.4±0.5
SMKKM	44.4±1.1	16.9±0.9	11.2±0.0	51.8±0.5	45.8±0.0	40.6±0.6	18.2±0.3	58.6±0.5	77.7±0.7	27.7±0.2
OPLFmvc	40.0±2.0	13.3±1.0	8.4±0.4	49.1±0.7	50.6±3.4	41.3±0.8	18.1±0.7	47.2±0.4	72.4±0.9	24.8±1.5
LSMKKM	45.2±1.2	20.8±1.0	22.6±0.0	51.8±0.6	44.6±2.2	41.4±0.8	17.8±0.4	60.0±0.5	79.9±0.4	27.0±0.6
AIMC	42.9±0.0	13.9±0.0	7.9±0.0	48.3±0.0	36.1±0.0	41.6±0.0	19.0±0.0	54.6±0.0	72.2±0.0	24.3±0.0
OMSC	38.0±0.0	20.9±0.0	7.5±0.0	48.9±0.0	41.5±0.0	39.0±0.0	19.1±0.0	52.8±0.0	67.6±0.0	24.7±0.0
HFLSMKKM	44.7±0.6	18.6±0.1	32.0±0.0	48.2±0.2	37.3±0.8	44.0±0.3	15.1±0.2	55.1±0.3	78.7±0.4	18.6±0.8
GMC	25.9±0.0	0.8±0.0	9.8±0.0	31.4±0.0	0.9±0.0	18.9±0.5	15.6±0.2	41.9±0.0	80.3±0.0	—
TLIMSC	39.7±0.0	—	—	47.3±0.0	5.4±0.0	40.7±0.0	10.7±0.0	48.2±0.0	85.9±0.0	7.9±0.0
LTBPL	43.4±0.7	10.7±0.0	8.3±0.0	—	9.8±0.8	36.1±0.3	—	—	—	—
UGLTL	73.2±1.2	43.3±0.7	48.9±0.0	96.1±0.5	56.3±0.1	94.4±2.1	58.9±0.5	89.4±0.5	94.1±0.4	—
WTNNM	51.0±0.8	35.1±0.1	21.5±0.0	—	37.7±0.0	74.7±0.5	38.9±0.1	74.7±0.4	—	—
KCGT	75.7±1.7	23.1±0.0	5.7±0.0	94.9±0.7	65.2±0.0	82.4±0.9	35.9±0.3	94.1±0.4	91.4±0.7	—
平均性能	44.1±0.9	20.0±0.4	15.3±0.1	53.6±0.4	43.1±0.6	45.0±0.4	21.0±0.3	57.2±0.3	76.5±0.5	24.7±0.5
LTAR-LFMKC	74.3±1.6	75.7±1.3	61.1±0.0	96.1±0.3	91.9±0.0	95.5±1.3	76.1±1.0	90.6±0.9	94.0±0.3	87.4±7.0

表 5 本文提出的 LTAR-LFMKC 与二十余种对比算法的聚类性能(PUR%)结果表

算法\数据集	ProteinFold	Plant	Nonpl	Caltech101	4Area	Scenel5	CCV	Flower102	ALOI100	Reuters
Avg-KKM	37.4±1.7	61.3±0.9	72.5±0.2	30.5±0.8	83.0±0.0	47.8±1.4	23.7±0.5	32.3±0.6	66.6±1.3	53.0±0.4
SB-KKM	39.4±1.2	53.2±0.5	65.3±0.1	35.8±0.8	74.7±0.0	42.8±0.1	23.3±0.2	38.4±0.7	67.3±1.3	53.9±0.0
MKKM	33.7±1.1	56.1±0.6	71.2±0.2	18.0±0.5	74.5±0.0	44.3±0.2	22.2±0.5	27.8±0.4	6.8±0.1	52.9±0.5
LMKKM	31.2±1.0	—	—	—	73.7±0.0	44.3±0.2	22.0±0.1	—	69.5±1.3	—
ONKC	42.7±1.3	49.0±0.1	62.3±0.1	30.1±0.9	71.1±0.0	43.6±0.9	24.6±0.3	45.6±0.7	70.1±1.2	52.6±0.3
MKKM-MR	41.9±1.4	56.7±0.1	60.4±0.0	30.6±0.8	71.7±0.0	42.4±1.0	23.7±0.7	46.3±0.8	70.7±1.3	52.2±0.6
LKAM	43.7±0.8	54.5±0.0	61.6±0.1	26.8±0.7	50.6±0.2	46.0±0.3	23.3±0.2	48.0±0.6	67.0±0.8	55.4±0.0
LFMKC	39.3±1.5	59.5±0.6	69.7±0.1	33.6±0.9	83.3±0.3	49.4±0.5	28.2±0.4	44.6±0.8	70.6±1.3	53.2±0.4
NKSS	44.8±0.6	46.1±0.0	—	—	64.1±1.8	44.1±0.2	23.6±0.3	48.8±0.4	67.2±0.9	—
SPMKC	23.7±0.7	59.0±0.1	63.9±0.0	—	74.3±0.0	42.6±0.1	20.8±0.3	31.2±0.4	54.8±1.2	—
HMKC	42.9±1.9	64.2±0.1	64.1±0.0	—	89.2±0.0	53.1±0.1	36.5±0.4	54.5±0.8	72.3±1.5	53.9±0.1
SMKKM	41.8±1.5	54.3±0.3	60.4±0.0	32.7±0.8	70.8±0.0	48.4±1.3	25.3±0.5	48.6±0.7	66.4±1.3	53.3±0.0
OPLFmvc	36.4±2.6	50.5±2.4	64.3±0.9	29.8±1.3	73.7±3.5	46.8±1.7	26.9±0.8	34.7±0.7	54.3±2.0	51.7±1.2
LSMKKM	42.6±1.5	58.5±1.1	70.6±0.0	32.5±0.9	71.8±0.4	49.3±1.6	24.7±0.6	50.2±0.9	69.1±1.1	52.9±0.2
AIMC	38.9±0.0	55.5±0.0	61.9±0.0	28.5±0.0	63.1±0.0	48.6±0.0	28.6±0.0	44.6±0.0	56.3±0.0	52.8±0.0
OMSC	37.2±0.0	57.6±0.0	63.0±0.0	30.0±0.0	67.2±0.0	44.8±0.0	27.9±0.0	42.3±0.0	50.9±0.0	49.8±0.0
HFLSMKKM	41.8±0.9	54.7±0.0	76.7±0.0	27.5±0.5	61.5±1.4	46.0±0.4	21.5±0.3	43.7±0.6	67.3±1.0	46.9±0.8
GMC	32.6±0.0	39.7±0.0	66.8±0.0	26.8±0.0	31.6±0.0	27.9±0.6	20.9±0.4	38.9±0.0	79.0±0.0	—
TLIMSC	38.0±0.0	—	—	28.7±0.0	37.4±0.0	46.4±0.0	19.0±0.0	38.1±0.0	79.7±0.0	34.1±0.0
UGLTL	64.8±2.0	70.2±0.3	81.8±0.0	90.6±1.2	75.3±0.0	95.4±3.5	53.1±0.9	80.4±1.1	87.9±1.1	—
WTNNM	49.3±1.1	68.0±0.1	68.0±0.0	—	65.2±0.0	80.9±0.5	49.7±0.0	69.0±0.6	—	—
KCGT	68.5±2.2	56.4±0.0	61.4±0.0	88.9±1.7	84.2±0.0	82.2±0.4	43.4±0.3	88.2±1.1	84.3±1.4	—
平均性能	41.4±1.3	55.9±0.4	66.5±0.1	36.6±0.7	67.7±0.6	50.4±0.8	27.9±0.4	47.4±0.6	65.6±1.0	51.2±0.3
LTAR-LFMKC	73.6±2.1	88.8±0.6	85.2±0.0	90.8±0.8	97.4±0.0	97.0±2.0	81.2±1.5	86.9±1.1	88.6±0.9	94.1±4.7

表 6 本文提出的 LTAR-LFMKC 与二十余种对比算法的聚类性能(RI%)结果表

算法\数据集	ProteinFold	Plant	Nonpl	Caltech101	4Area	Scenel5	CCV	Flower102	ALOI100	Reuters
Avg-KKM	14.4±1.8	24.6±1.2	17.6±0.3	15.5±0.7	62.4±0.0	26.0±1.1	6.6±0.2	15.5±0.5	51.4±1.5	21.8±1.4
SB-KKM	15.1±1.2	13.9±0.9	16.8±0.1	20.1±0.5	55.5±0.0	21.4±0.1	6.7±0.1	18.9±0.6	54.6±1.1	23.6±0.0
MKKM	12.1±0.7	17.4±0.6	15.8±0.4	6.2±0.3	55.4±0.1	22.6±0.1	5.7±0.2	12.1±0.4	2.0±0.1	21.8±1.4
LMKKM	7.8±0.4	—	—	—	52.0±0.0	22.9±0.1	5.6±0.0	—	55.2±1.1	—
ONKC	18.0±1.1	9.8±0.1	14.2±0.0	15.1±0.7	47.1±0.0	23.5±0.9	7.7±0.1	24.9±0.5	55.4±1.1	20.3±0.3
MKKM-MR	17.2±1.5	19.0±0.2	8.5±0.0	15.1±0.6	48.0±0.0	22.7±0.9	7.2±0.3	25.5±0.6	56.5±1.1	23.1±0.6
LKAM	20.1±1.1	9.1±0.0	10.4±0.0	12.4±0.5	16.6±1.6	24.8±0.4	6.9±0.1	27.2±0.6	53.9±0.9	24.1±0.0
LFMKC	16.1±1.5	21.7±0.8	14.1±0.2	17.7±0.8	62.8±1.0	27.3±0.4	9.4±0.2	25.5±1.0	54.3±1.2	22.1±1.6
NKSS	18.5±0.6	9.2±0.0	—	—	35.9±1.7	22.8±0.1	6.2±0.2	27.5±0.5	54.3±1.3	—
SPMKC	4.4±0.3	19.1±0.0	11.2±0.0	—	43.4±0.0	21.2±0.1	4.2±0.1	14.5±0.4	32.2±2.4	—
HMKC	19.0±1.6	31.0±0.2	12.8±0.0	—	74.8±0.1	32.5±0.1	14.0±0.2	34.2±1.1	58.4±1.6	22.6±0.5
SMKKM	17.6±1.9	16.9±0.8	8.0±0.0	17.2±0.6	46.5±0.0	25.4±0.9	7.5±0.2	28.5±0.8	51.5±1.4	22.1±0.8
OPLFMVC	15.4±2.3	11.3±1.8	9.1±0.6	15.1±0.8	50.1±4.2	26.6±1.0	7.9±0.6	19.4±1.0	43.2±1.8	20.6±0.5
LSMKKM	19.9±1.2	19.7±1.4	35.0±0.0	17.2±0.8	43.1±0.4	26.3±1.4	7.3±0.3	29.7±0.9	55.5±1.0	21.6±0.2
AIMC	19.0±0.0	13.5±0.0	8.5±0.0	14.1±0.0	32.2±0.0	28.0±0.0	9.0±0.0	29.8±0.0	45.1±0.0	20.0±0.0
OMSC	15.9±0.0	20.8±0.0	7.8±0.0	15.7±0.0	39.7±0.0	25.9±0.0	7.8±0.0	26.9±0.0	37.4±0.0	17.8±0.0
HFLSMKKM	18.6±1.0	12.0±0.0	48.8±0.0	12.5±0.4	30.4±0.3	25.7±0.1	6.3±0.1	23.2±0.6	54.4±0.9	13.6±0.7
GMC	2.9±0.0	0.0±0.0	11.1±0.0	0.9±0.0	0.0±0.0	2.5±0.0	5.6±0.2	2.0±0.0	26.9±0.0	—
TLIMSC	15.3±0.0	—	—	12.2±0.0	2.0±0.0	24.7±0.0	4.0±0.0	19.0±0.0	69.7±0.0	0.5±0.0
LTBPL	15.7±0.8	7.5±0.0	20.0±0.0	—	9.6±0.8	23.0±0.5	—	—	—	—
UGLTL	43.3±2.3	42.8±0.4	46.3±0.0	86.8±1.5	57.2±0.1	92.314.8	35.8±1.1	66.4±1.9	82.7±1.2	—
WTNNM	24.4±1.1	31.6±0.1	17.8±0.0	—	35.6±0.0	67.1±1.2	26.1±0.0	51.2±1.1	—	—
KCGT	47.4±3.4	18.3±0.0	6.1±0.0	85.1±1.9	63.1±0.0	73.1±2.4	21.4±0.3	80.6±2.2	78.0±1.7	—
平均性能	18.2±1.2	17.6±0.4	17.0±0.1	22.3±0.6	41.9±0.5	30.8±0.8	10.0±0.2	28.7±0.7	51.1±1.1	19.7±0.6
LTAR-LFMKC	50.3±2.9	74.0±1.0	57.5±0.0	87.2±1.1	93.2±0.0	94.3±2.9	70.3±3.0	77.0±2.4	83.1±1.1	88.1±10.4

基于张量学习的聚类算法,诸如 LTBPL、UGLTL、WTNNM 和 KCGT,它们的聚类性能都保持在一个显著的领先地位。这展现了旨在挖掘视图间潜在高阶关联的张量学习的有效性。例如,WTNNM 在七个数据集上的 ACC 性能指标上平均领先了所有非张量算法平均性能的 17%;UGLTL 在九个数据集上的 ACC 性能平均指标领先了约 24%,即除了我们提出的 LTAR-LFMKC 算法外,UGLTL 的性能平均指标以显著的差距达到了最优。

而与此同时,LTAR-LFMKC 提出了主动重构的思想,突破了基划分矩阵表示能力的瓶颈,在所有数据集上均达到了稳定一致的最优水平,其中 ACC 性能指标在九个数据集上分别以 11.1%、20.2%、5%、0.4%、25.9%、2.4%、35.3%、13.8%、1.9% 超越了 UGLTL,分别以 8.2%、32.4%、32.4%、1.4%、13.2%、19.2%、39.3%、0.8%、4.6% 超越了 KCGT。很容易看出本文提出的算法保持了一个显著的领先地位。

总而言之,LTAR-LFMKC 在所有数据集上表现出了显著优于对比算法的聚类性能,提高了所有对比算法平均性能的 22.9%~53.4%,验证了我们提出的低秩张量与主动重构学习的有效性和高效性。这个简单且性能优异的想法可能会吸引深入的

研究和应用。

4.3 演化过程分析

本文提出的算法采用了 ADMM 优化算法,理论上可以保证快速收敛到局部最优解^[52]。此外,为了研究 LTAR-LFMKC 的演化过程,我们计算了每一轮迭代过程中的聚类性能和函数损失。为了展示学习过程,在图 1、图 2 中绘制了 LTAR-LFMKC 迭

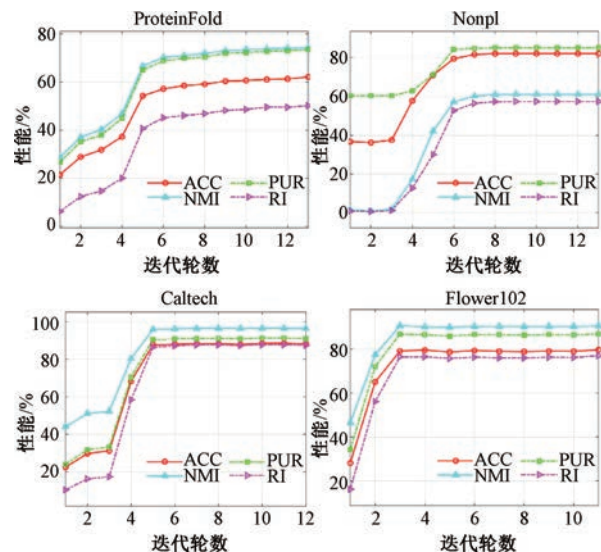


图 1 LTAR-LFMKC 的聚类性能随着迭代次数的变化曲线

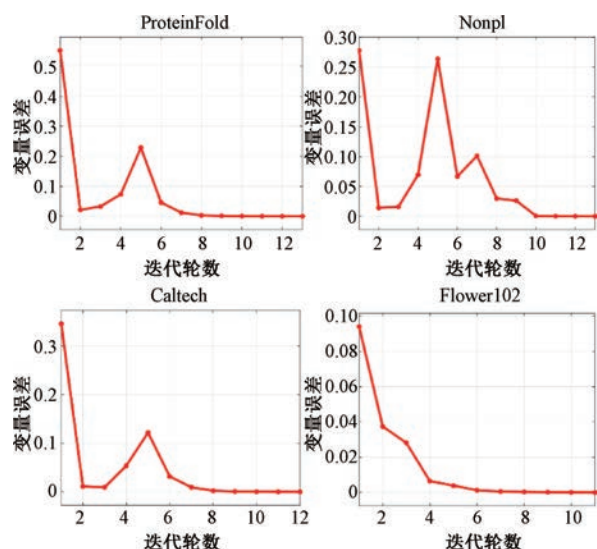


图2 LTAR-LFMKC 的变量误差
随着迭代次数的变化曲线

代中的性能和损失曲线。实验结果表明,函数损失值会在前期的学习过程中波动几次,一般在5至6

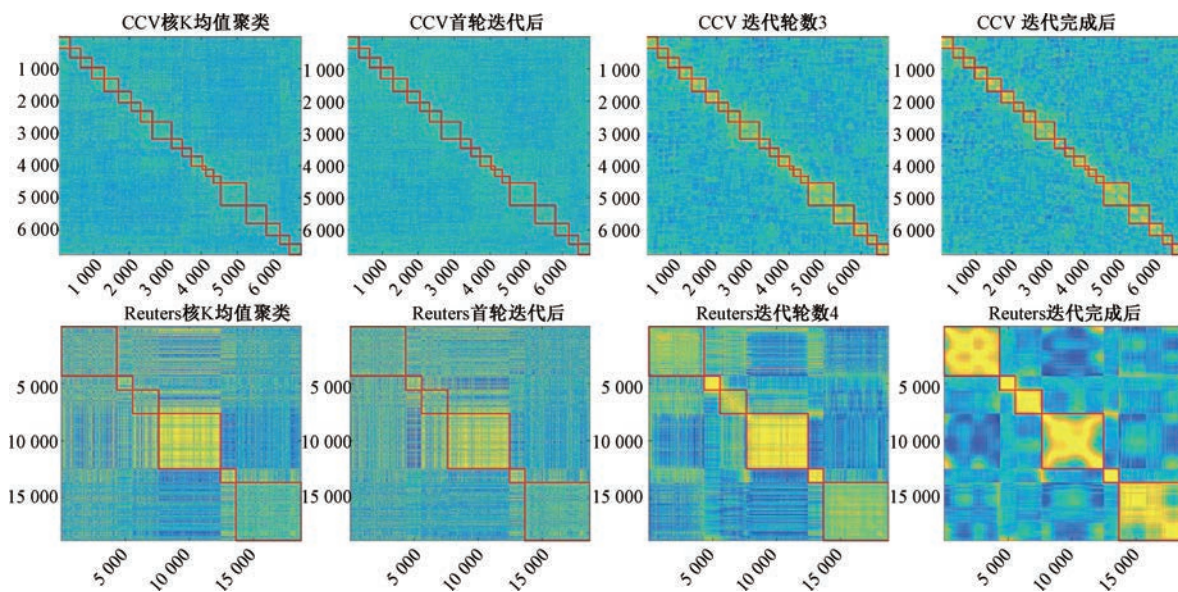


图3 第一列图片表示平均核K均值聚类学习到的聚类划分。右侧三列分别代表LTAR-LFMKC在首轮迭代后、学习过程中、迭代完成后学习到的聚类划分

4.5 计算效率分析

最后,为了评估算法的计算复杂性,我们记录了所有方法的时间开销(以秒为单位),并在表7中进行报告,其中具有超参数的算法,我们报告的是其平均运行时间(即假设有2个超参数,每个超参数有5个取值可能,共运行算法25次,则其平均运行时间=总运行时间/25次)。正如表中所展示的,本文提出的LTAR-LFMKC在所有基准数据集上都运行得最快或基本最快。尽管WTNNM的聚类性能较

轮迭代后开始稳定,而后快速地下降并收敛到局部最优解;而聚类性能先快速上升而后趋于平稳,能够相应地体现聚类质量在学习过程中不断提高而后达到稳定。这一演化过程充分证明了LTAR-LFMKC学习过程的有效性和必要性。

4.4 簇结构分析

我们进一步研究了LTAR-LFMKC学习过程的簇划分结构,并在图3中绘制了可视化结果,其中红色方框标出的是真实标签对应的簇结构。实验结果表明,LTAR-LFMKC通过挖掘视图之间的高阶相关性来使得簇划分更具有可区分性,表现为更清晰的块对角结构。根据右侧三列图片可以看出,从首轮迭代后到迭代中期再到迭代完成后,簇划分结构在学习过程中具有非常明显的改善,这也对应了表3至表6中的聚类性能的大幅提升。由此可见,提取互补信息和挖掘视图之间的高阶相关性增强了对内在簇结构的揭示,这种结构有助于在保持本质联系的同时消除较弱的联系。

为优越,但它通常是所有对比算法中计算效率最低的,例如在Nonpl数据集上单次运行时间约为20小时,而在更大的数据集上即使内存能够满足其计算需求,它的时间开销也难以承受。除了TIMSC的运行时间明显低于平均运行时间,其他基于张量学习的对比算法,即LTBPL、UGLTL、WTNNM、KCGT都需要较长的时间开销。综上所述,本文提出的LTAR-LFMKC在大幅提高了聚类性能的同时,计算效率也比大多数常见的多核聚类算法和张

量聚类算法更具有优越性,在计算复杂度上取得了非常显著的降低。这使得我们提出的 LTAR-LFMKC

能够真正有效地应用于实际任务中的大规模多视图数据聚类。

表 7 本文提出的 LTAR-LFMKC 与对比算法的单次运行时间对比表

(单位:s)

算法\数据集	ProteinFold	Plant	Nonpl	Caltech101	4Area	Scenel5	CCV	Flower102	ALOI100	Reuters
MKKM	0.8964	2.2695	20.864	78.596	3.6623	12.313	25.943	73.470	138.22	301.36
LMKKM	387.04	—	—	—	185.14	665.57	2797.8	—	39247	—
ONKC	2.2594	12.656	123.60	140.42	46.755	79.285	268.68	414.45	639.93	2159.1
MKKM-MR	1.2601	8.8523	85.126	78.368	6.7474	12.420	30.355	99.434	126.04	398.62
LKAM	1.8104	28.169	361.15	265.42	119.69	168.39	569.29	1106.2	2194.9	5656.5
LFMKC	1.0644	1.5419	11.031	49.880	3.7660	8.0331	24.395	77.743	96.819	41.380
NKSS	21.684	516.39	—	—	366.38	651.82	2197.9	6757.0	11362	—
SPMKC	16.177	70.697	586.28	—	225.60	1373.8	4337.6	19193	69022	—
HMKC	14.164	26.238	138.16	—	16.971	37.208	122.24	1837.1	3415.5	1724.3
SMKKM	2.8167	13.746	18.159	119.79	44.819	18.915	68.214	393.37	410.38	937.09
OPLFMVC	0.5692	1.3099	6.7930	39.992	1.0738	2.3429	6.4595	85.706	123.27	49.162
LSMKKM	2.4147	3.4047	60.010	235.42	104.79	262.69	989.30	2059.6	3237.4	9531.5
AIMC	0.6204	0.7790	3.3778	28.795	0.6562	<u>2.2632</u>	<u>4.2910</u>	<u>43.917</u>	<u>63.091</u>	19.736
OMSC	4.2627	5.1713	22.769	296.71	17.626	24.322	42.777	383.98	520.82	138.50
HFLSMKKM	55.654	84.367	152.75	2481.2	560.95	1054.8	2621.3	43898	4838.1	5800.1
GMC	1.9474	17.564	180.58	226.23	7.6763	37.545	196.31	486.11	682.20	—
TLIMSC	2.8264	—	—	536.17	42.795	64.295	180.86	441.99	876.23	9400.3
LTBPL	73.129	518.88	14859	—	6502.3	6638.9	—	—	—	—
UGLTL	2.9899	34.669	918.91	967.05	63.093	62.496	317.14	867.96	2442.9	—
WTNNM	76.943	2800.6	70398	—	1783.1	1298.4	13255	34717	—	—
KCGT	17.762	193.97	253.35	236.72	836.05	1211.6	3989.3	328.49	603.33	—
平均时间	30.253	207.55	4412.5	365.32	475.81	595.89	1458.8	5402.8	6678.8	2415.0
LTAR-LFMKC	0.4855	0.6920	<u>4.7921</u>	52.539	<u>0.7829</u>	1.6039	3.5653	21.458	46.669	<u>29.267</u>

4.6 聚类参数分析

如公式(8)所示,LTAR-LFMKC 引入了两个权衡参数 ρ 和 λ ,它们在该算法中仅进行了粗略调整。为了进一步研究这两个参数在不同数据集上对算法的影响,我们进行了一个单独的实验来分析它们的敏感性和效果,并将结果绘制在图 4、图 5 中。如图所示,这两个参数对聚类性能都有着明显的影响,这表明了公式中的每一项都具有重要的作用。这个参数在不同数据集上对聚类性能的影响都有着非常相似的规律,并且分别在 $10^{[0,1]}$ 和 $2^{[3,5]}$ 的小范围区间之间实现了稳定的聚类效果。由此可见,LTAR-LFMKC 引入的这两个权衡参数对聚类性能具有显著的提升作用,并具有跨数据集的规律性与一致性。同时该聚类参数分析能够指导本文提出算法在各个数据集上的调整策略。

4.7 可视化案例

为了更直观地了解 LTAR-LFMKC 的效果,本文进行了额外的可视化应用研究,即图片的像素级聚类任务,该任务的效果亦可以看作是图像分割。具体来说,先通过人工智能大模型生成一张分辨率

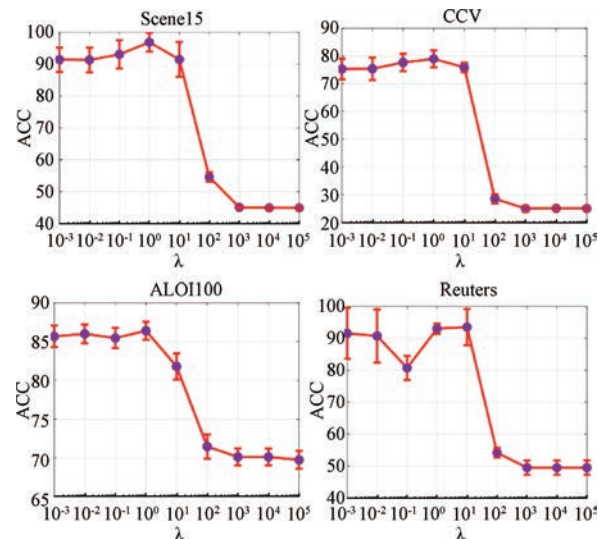


图 4 参数 λ 在变化范围内的不同取值对 LTAR-LFMKC 的聚类性能影响

为 500×500 的带有“计算机学报”字样的彩色风景图,然后将其每个元素看作一个样本点,并假设共分为 15 个簇,对其进行聚类。图 6 中左侧第一张图片为生成的原图,第二张为 K 均值聚类的结果,第三张

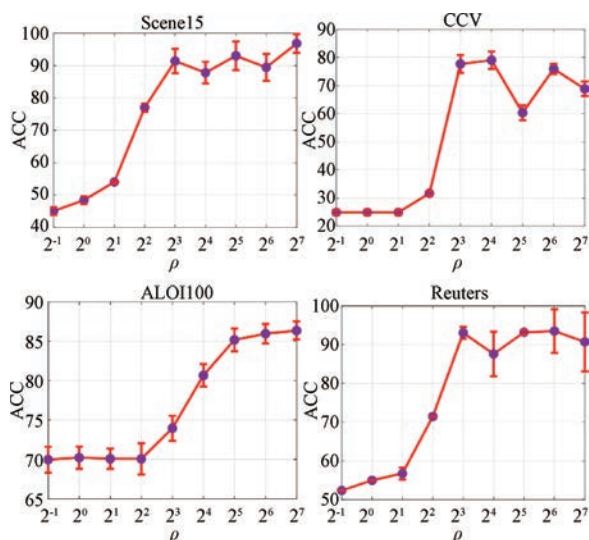


图5 参数 ρ 在变化范围内的不同取值对 LTAR-LFMKC 的聚类性能影响



图6 像素级聚类案例研究。第一张图片表示原图,右侧三张分别代表 KMeans、SMKMM 和 LTAR_LFMKC 的聚类结果

聚类结果,而仅学习低秩张量子空间表示(如 LTB-PL、UGLTL、WTNNM、KCGT)也无法取得更进一步的提升。因此,本文提出了 LTAR-LFMKC 算法来主动重构并学习基划分矩阵、通过张量学习来捕获高阶的跨视图关联,并且在优化过程中引入了列置换矩阵来对齐视图。为了分别研究这三部分的贡献,我们设计了四项消融测试,其中第一项测试 $\mathcal{L}_1$ 表示既不对基划分矩阵进行主动重构也舍弃基于张量奇异值分解的张量核范数(即仅保留对应模型(8)中的第一项,且 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 直接用 $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m$ 替代)、第二项测试 $\mathcal{L}_2$ 表示不对基划分矩阵进行主动重构(即仅保留对应模型(8)中的第一项和第三项,且 $\{\hat{\mathbf{H}}_p\}_{p=1}^m$ 直接用 $\{\mathbf{H}_p\}_{p=1}^m$ 替代)、第三项测试 $\mathcal{L}_3$ 表示舍弃了基于张量奇异值分解的张量核范数(即仅保留对应模型(8)中的第一项和第二项)、第四项测试 $\mathcal{L}_4$ 表示不采用列置换矩阵来对齐视图(即删去了对应模型(8)中的 $\{\mathbf{T}_p\}_{p=1}^m$ 和 $\{\hat{\mathbf{T}}_p\}_{p=1}^m$)。这些测试在所有基准数据集上进行,表8中汇报了它们聚类性能的 ACC 指标,从该表中的实验结果可以看出,在所有基准数据集上,与 $\mathcal{L}_1$ 同时舍弃两个部分相

为采用基于 SVD 加速的规模化 SMKMM 聚类^[53]的结果,第四张为本文所提出的 LTAR-LFMKC 聚类的结果。如图所示,其他两个方法无法将融入远处山影的近处山坡与树分隔开,并且对海水海浪也无法很好地进行刻画,而本文所提出的 LTAR-LFMKC 将原图中的不同物体分割得较为清晰。从该可视化案例可以清晰地看出本文提出方法相较于其他算法的性能优越性。

4.8 消融实验

为了进一步研究性能优越的因素,我们针对提出的 LTAR-LFMKC 的各部分进行了消融实验,包括对基划分矩阵主动重构的作用、张量学习引导的作用以及通过列置换矩阵对齐视图间基划分的策略。从大量实验结果可以看出,仅通过后期融合策略(如 LFMKC、OPLFMVC)无法获得足够满意的

比, $\mathcal{L}_2$ 和 $\mathcal{L}_3$ 都取得了明显的性能提升,并且 LTAR-LFMKC 与 $\mathcal{L}_2$ 和 $\mathcal{L}_3$ 相比,也取得了一致性的提高,这表明了对基划分矩阵主动重构、张量学习引导这两个过程都对聚类性能有明显的改善作用,并且它们同时进行能够更优地提升聚类效果。与 $\mathcal{L}_4$ 不采用列置换矩阵来对齐视图相比,LTAR-LFMKC 也取得了较为显著的性能提升。这些测试表明了主动重构和张量学习的重要性,也验证了通过列置换矩阵对齐视图间基划分策略的必要性。

表8 消融实验的聚类性能(ACC%)结果表

数据集	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_4$	LTAR-LFMKC
ProteinFold	30.3 $\pm$ 1.9	54.5 $\pm$ 2.8	31.1 $\pm$ 1.8	56.4 $\pm$ 3.1	62.2$\pm$3.2
Plant	51.7 $\pm$ 0.4	78.6 $\pm$ 0.4	75.5 $\pm$ 0.8	78.6 $\pm$ 0.1	88.8$\pm$0.6
Nonpl	39.4 $\pm$ 0.7	76.4 $\pm$ 1.2	43.9 $\pm$ 0.0	70.7 $\pm$ 0.0	82.2$\pm$0.0
Caltech101	27.6 $\pm$ 0.6	82.6 $\pm$ 1.8	66.9 $\pm$ 2.0	85.7 $\pm$ 1.7	88.0$\pm$1.0
4Area	83.0 $\pm$ 0.0	95.2 $\pm$ 0.0	91.8 $\pm$ 0.0	96.0 $\pm$ 0.0	97.4$\pm$0.0
Scene15	43.3 $\pm$ 1.8	91.4 $\pm$ 3.8	72.2 $\pm$ 1.7	90.3 $\pm$ 5.0	96.8$\pm$2.9
CCV	19.8 $\pm$ 0.7	73.9 $\pm$ 3.2	24.7 $\pm$ 1.1	76.4 $\pm$ 3.0	79.0$\pm$3.0
Flower102	27.0 $\pm$ 0.9	77.7 $\pm$ 2.2	74.8 $\pm$ 2.0	79.6 $\pm$ 2.4	79.6$\pm$1.9
ALOI100	64.3 $\pm$ 1.2	85.5 $\pm$ 1.5	85.0 $\pm$ 2.1	85.8 $\pm$ 1.7	86.4$\pm$1.2
Reuters	45.4 $\pm$ 1.5	91.6 $\pm$ 8.0	56.5 $\pm$ 0.0	89.9 $\pm$ 4.2	93.5$\pm$5.7

5 总结与展望

本文提出了一种新颖的低秩张量与主动重构诱导的后期融合多核聚类算法(LTAR-LFMKC)。为了解决基于后期融合策略的多核聚类所面临的两个重要缺陷,本文通过主动对决策层进行重建并在后期融合过程中进行校准和优化,将重建表示堆叠成张量使其在视图间学习高阶关联性并凝练出更清晰的簇结构。借助 t-TNN 约束方法与 ADMM 优化方法,本文可以有效地对提出的 LTAR-LFMKC 算法进行快速的学习优化,将复杂度降低为每次迭代 $O(nmk^2)$ 。并且 LTAR-LFMKC 算法能够直接学习到一致的聚类划分,而无需额外的步骤将不同视图的聚类表示再次进行融合。在大量基准数据集上的实验结果有力地证明了所提出的 LTAR-LFMKC 算法的高效性和有效性。此外,本文提出算法的局限性体现在模型中含有 2 个超参数,因此在实际应用中受调参工作的限制。未来的工作将计划在保持计算效率和聚类性能的情况下,改进为无超参数或能够自动调参的自适应算法;此外,可扩展算法以解决实际聚类应用中存在的数据噪声、数据缺失等挑战性问题。

参 考 文 献

- [1] Marin D, Tang M, Ayed I B, Boykov Y. Kernel clustering: density biases and solutions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2017, 41(1): 136-147
- [2] Blanco Valencia X P, Becerra M A, Castro Ospina A E, Ortega Adarme M, Viveros Melo D, PeluffoOrdñez D H, et al. Kernel-based framework for spectral dimensionality reduction and clustering formulation: A theoretical study. *Advances in Distributed Computing and Artificial Intelligence Journal Regular Issue*, 2017, 6(1): 31-40
- [3] Gönen M, Margolin A A. Localized data fusion for kernel k-means clustering with application to cancer biology//*Proceedings of the Neural Information Processing Systems 27*. Montreal, Canada, 2014: 1305-1313
- [4] Peng X, Huang Z, Lv J, Zhu H, Zhou J T. COMIC: Multi-view clustering without parameter selection//*Proceedings of the International Conference on Machine Learning*. Long Beach, USA, 2019: 5092-5101
- [5] Zhou S, Zhu E, Liu X, Zheng T, Liu Q, Xia J, Yin J. Subspace segmentation-based robust multiple kernel clustering. *Information Fusion*, 2020, 53: 145-154
- [6] Zhang Y, Liu X, Wang S, Liu J, Dai S, Zhu E. One-stage in-complete multi-view clustering via late fusion//*Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia*. Chengdu, China, 2021: 2717-2725
- [7] Wang R, Lu J, Lu Y, Nie F, Li X. Discrete and parameter-free multiple kernel k-means. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, 31: 2796-2808
- [8] Tang C, Zheng X, Zhang W, Liu X, Zhu X, Zhu E. Unsupervised feature selection via multiple graph fusion and feature weight learning. *Science China Information Sciences*, 2023, 66(5): 152101
- [9] Gönen M, Alpaydm E. Multiple kernel learning algorithms. *The Journal of Machine Learning Research*, 2011, 12: 2211-2268
- [10] Kumar A, & Daumé H. A co-training approach for multi-view spectral clustering//*Proceedings of the International Conference on Machine Learning*. Bellevue, USA, 2011: 393-400
- [11] Chitta R, Jin R, Jain A K. Efficient kernel clustering using random fourier features//*Proceedings of the IEEE 12th International Conference on Data Mining*. Brussels, Belgium, 2012: 161-170
- [12] Kumar A, Rai P, Daumé H. Co-regularized multi-view spectral clustering//*Proceedings of the Neural Information Processing Systems*. Granada, Spain, 2011: 1413-1421
- [13] Huang H, Chuang Y, Chen C. Multiple kernel fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, 20(1), 120-134
- [14] Bang S, Yu Y, Wu W. Robust multiple kernel k-means clustering using Min-Max optimization. *arXiv preprint*, 2018 arXiv:1803.02458
- [15] Liu X, Zhou S, Wang Y, Li M, Dou Y, Zhu E, Yin J. Optimal neighborhood kernel clustering with multiple kernels//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. San Francisco, USA, 2017: 31(1)
- [16] Liu J, Liu X, Xiong J, Liao Q, Zhou S, Wang S, Yang Y. Optimal Neighborhood Multiple Kernel Clustering with Adaptive Local Kernels. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2020, 34(6): 2872-2885
- [17] Liu X, Dou Y, Yin J, Wang L, Zhu E. Multiple kernel k-means clustering with matrix-induced regularization//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Phoenix, USA, 2016: 30(1)
- [18] Hu J, Li M, Zhu E, Wang S, Liu X, Zhai Y. Consensus multiple kernel k-means clustering with late fusion alignment and matrix-induced regularization. *IEEE Access*, 2019, 7: 136322-136331
- [19] Liu X, Liu L, Liao Q, Wang S, Zhang Y, Tu W, Tang C, Liu J, Zhu E. One pass late fusion multi-view clustering//*Proceedings of the International Conference on Machine Learning*. Virtual, 2021: 6850-6859
- [20] Wang S, Liu X, Zhu E, Tang C, Liu J, Hu J, Xia J, Yin J. Multi-view clustering via late fusion alignment maximization//*Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint*

- Conference on Artificial Intelligence. Macao, China, 2019; 3778-3784
- [21] Liu X. Simplemkkm: Simple multiple kernel k-means. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2023; 5174-5186
- [22] Liu X, Zhou S, Liu L, Tang C, Wang S, Liu J, Zhang Y. Localized simple multiple kernel k-means//*Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*. Virtual, 2021; 6850-6859
- [23] Liu X. Hyperparameter-free localized simple multiple kernel K-means with global optimum. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2023, 45(7): 8566-8576
- [24] Zhang Y, Liu X, Liu J, Dai S, Zhang C, Xu K, Zhu E. Fusion multiple kernel k-means//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Vancouver, Canada, 2022, 36(8): 9109-9117
- [25] Huang J, Nie F, Huang H. A new simplex sparse learning model to measure data similarity for clustering//*Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Buenos Aires, Argentina, 2015; 3569-3575
- [26] Kang Z, Lu X, Yi J, Xu Z. Self-weighted multiple kernel learning for graph-based clustering and semi-supervised classification. *arXiv preprint*, 2018 *arXiv*:1806.07697
- [27] Ren Z, Sun Q, Wu B, Zhang X, Yan W. Learning latent low-rank and sparse embedding for robust image feature extraction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 29; 2094-2107
- [28] Ren Z, Sun Q. Simultaneous global and local graph structure preserving for multiple kernel clustering. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 32(5): 1839-1851
- [29] Ren Z, Mukherjee M, Lloret J, Venus P. Multiple kernel driven clustering with locally consistent and selfish graph in industrial IoT. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 17 (4): 2956-2963
- [30] Ren Z, Yang S X, Sun Q, Wang T. Consensus affinity graph learning for multiple kernel clustering. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51 (6): 3273-3284
- [31] Xie Y, Tao D, Zhang W, et al. On unifying multi-view self-representations for clustering by tensor multi-rank minimization. *International Journal of Computer Vision*, 2018, 126; 1157-1179
- [32] Gao Q, Xia W, Wan Z, et al. Tensor-SVD based graph learning for multi-view subspace clustering//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. New York, USA, 2020, 34(04): 3930-3937
- [33] Wu J, Xie X, Nie L, Lin Z, Zha H. Unified graph and low-rank tensor learning for multi-view clustering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 28(12): 5910-5922
- [34] Chen Mansheng, Cai Xiaosha, Lin Jiaqi, Wang Changdong, Huang Dong, Lai Jianhuang. Tensor learning-induced multi-view spectral clustering. *Chinese Journal of Computers*, 2024 (1): 52-68 (in Chinese)
- (陈曼生,蔡晓莎,林佳奇,王长东,黄东,赖建煌. 张量学习诱导的多视图谱聚类. *计算机学报*, 2024(1): 52-68)
- [35] Rakotomamonjy A, Bach F R, Canu S, et al. SimpleMKL. *Journal of Machine Learning Research*. 2008, 9: 2491-2521
- [36] Kilmer M E, Braman K, Hao N, Hoover R C. Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, 34(1): 148-172
- [37] Kilmer M E, Martin C D. Factorization strategies for third-order tensors. *Linear Algebra and its Applications*, 2011, 435(3): 641-658
- [38] Zhang Z, Ely G, Aeron S, Hao N, Kilmer M. Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on tensor-SVD//*Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Columbus, USA, 2014; 3842-3849
- [39] Semerci O, Hao N, Kilmer M E, Miller E L. Tensor-based formulation and nuclear norm regularization for multienergy computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2014, 23(4): 1678-1693
- [40] Ren Z, Sun Q, Wei D. Multiple kernel clustering with kernel k-means coupled graph tensor learning//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2021, 35(11): 9411-9418
- [41] Wang S, Liu X, Zhu E. Late fusion multi-view clustering via global and local alignment maximization. *arXiv preprint*, 2022 *arXiv*: 2208.01198
- [42] Zhou P, Lu C, Feng J, et al. Tensor low-rank representation for data recovery and clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 43 (5): 1718-1732
- [43] Chen M, Wang C, Lai J. Low-rank tensor based proximity learning for multi-view clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 35(5): 5076-5090
- [44] Li M, Liu X, Wang L, Dou Y, Yin J, Zhu E. Multiple kernel clustering with local kernel alignment maximization//*Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. New York, USA, 2016; 1704-1710
- [45] Zhou S, Liu X, Li M, Zhu E, Liu L, Zhang C, Yin J. Multiple kernel clustering with neighbor-kernel subspace segmentation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 31(4): 1351-1362
- [46] Liu J, Liu X, Wang S, Zhou S, Yang Y. Hierarchical multiple kernel clustering//*Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Honolulu, USA, 2019, 35(10): 8671-8679
- [47] Perozzi B, Akoglu L, Iglesias Sánchez P, Müller E. Focused clustering and outlier detection in large attributed graphs//*Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. 2014; 1346-1355
- [48] Lazebnik S, Schmid C, Ponce J. Beyond bags of features: Spatial pyramid matching for recognizing natural scene cate-

- gories//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. New York, USA, 2006, 2: 2169-2178
- [49] Chen M, Liu T, Wang C, Huang D, Lai J. Adaptively-weighted integral space for fast multiview clustering//Proceedings of the 30th ACM International Conference on Multimedia. Nice, France, 2019: 3774-3782
- [50] Chen M, Wang C, Huang D, Lai J, Yu P S. Efficient orthogonal multi-view subspace clustering//Proceedings of the 28th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Washington, USA, 2022: 127-135
- [51] Wang H, Yang Y, Liu B. GMC: Graph-Based multi-view clustering. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2020, 32(6): 1116-1129
- [52] Wen J, Han N, Fang X, Fei L, Yan K, Zhan S. Low-rank preserving projection via graph regularized reconstruction. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(4): 1279-1291
- [53] Liang W, Tang C, Liu X, et al. On the consistency and large-scale extension of multiple kernel clustering. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2024, 46(10): 6935-6947



ZHANG Yi, Ph. D., assistant researcher. His research interests include multiple kernel learning, multi-view clustering and data mining.

TIAN Zhi-Rong, undergraduate student. Her research interests include machine learning.

WANG Fang-Di, postgraduate student. His research interests include multi-view clustering, machine learning.

WANG Si-Wei, Ph. D., assistant researcher. His re-

search interests include data mining, multi-view clustering and machine learning.

LIU Ji-Yuan, Ph. D., lecturer. His research interests include federated learning, multi-view clustering and machine learning.

LIU Xin-Wang, Ph. D., professor. His research interests include multiple kernel learning, machine learning and data mining.

ZHU En, Ph. D., professor. His research interests include artificial intelligence and pattern recognition.

Background

In the era of big data, the pressing need to integrate data from diverse sources and perspectives becomes increasingly apparent. Multiple kernel clustering (MKC), as a crucial data mining technique, exhibits unique advantages in capturing data features by combining multiple kernel functions, particularly in handling heterogeneous data from various sources. Consequently, it has been widely employed in the real world.

The field of multiple kernel clustering has made significant strides, yet enhancing computational efficiency and clustering accuracy remains a focal point of research. Researchers are delving into a variety of efficient algorithms and techniques, including representation learning, neighborhood kernel learning, subspace clustering, and graph clustering. Among these, tensor nuclear norm technology garners significant attention for its deep exploration of the structural makeup and higher-order information within multi-view data. For instance, Xie et al. introduced the multi-view subspace clustering method based on tensor singular value decomposition (t-SVD) method, proposing the multi-view subspace clustering approach based on tensor singular value decomposition (t-SVD-MS). In pursuit of greater robustness and clustering performance, Gao et al. explored a weighted tensor nuclear norm based on t-SVD, devising an efficient algorithm to optimize the minimization of the weighted tensor nuclear norm (WTNNM) problem. Nonetheless, tensor-

based methods face the challenge of high computational complexity. Late fusion strategies offer an effective way to address complexity issues and boost computational efficiency. Yet, these strategies are constrained by the representational capabilities of the base partition matrix cluster structure and overlook the potential higher-order relationships among views.

To address the aforementioned challenges, we propose a novel late fusion multiple kernel clustering algorithm—Low-Rank Tensor and Active Reconstruction-induced Late Fusion Multiple Kernel Clustering (LTAR-LFMKC). This method surpasses the bottleneck of representational capacity in traditional late fusion strategies. Leveraging the emerging tensor nuclear norm technique based on tensor singular value decomposition (t-SVD), it can effectively explore spatial structures and higher-order information across data views while significantly reducing computational complexity. By making decisions at the active reconstruction level and calibrating and optimizing during the late fusion process, LTAR-LFMKC can adeptly distill clearer cluster structures from multiple perspectives, leading to directly learned consistent clustering partitions.

This work was supported by the National Science and Technology Innovation 2030 Major Project (No. 2022ZD0209103) and the National Natural Science Foundation of China (Nos. 62325604, 62276271, 62406369, 62476280, 62476281).