否定知识的代数表示及在模糊系统设计中的应用

张胜礼[1),2)]　　李永明[1)]

1)(陕西师范大学计算机科学学院　西安　710119)

2)(兴义民族师范学院信息技术学院　贵州 兴义　562400)

摘　要　对于模糊系统中的否定知识的认识，首先从哲学层面上对潘正华提出的 3 种否定关系进行了研究，提出了矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系的本质特征．接着，在 Zadeh 提出的语言变量中引入 3 种否定的概念，得到了带有 3 种否定的语言变量．为了能够刻画这些否定关系的本质特征和内在联系，进一步研究了它们的集合基础，定义了一种新的带有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集 GFScom，并讨论了 GFScom 的一些基本运算及性质．在此基础上，给出了基于 GFScom 的具有一阶逼近精度和二阶逼近精度的模糊系统的设计方法，并分析了所设计的模糊系统的逼近性能．应用示例表明，GFScom 不仅丰富了模糊系统的推理功能，而且能在仅知道部分隶属函数分布的情况下设计出具有给定精度的模糊系统．

关键词　模糊知识；模糊集；否定关系；带 3 种否定的语言变量；广义模糊集 GFScom；模糊系统的设计；逼近性能

中图法分类号　TP18；O159　　　**DOI 号**　10.11897/SP.J.1016.2016.02527

Algebraic Representation of Negative Knowledge and Its Application to Design of Fuzzy Systems

ZHANG Sheng-Li[1),2)]　　LI Yong-Ming[1)]

1)(*School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an*　710119)

2)(*School of Information Technology, Xingyi Normal University for Nationalities, Xingyi, Guizhou*　562400)

Abstract　For negative knowledge cognition in fuzzy systems, three different sorts of negation developed by Pan are investigated and the intrinsic natural characteristic of contradictory, opposite and medium negative relationship is proposed. Subsequently, a linguistic variable with three types of negation is presented by considering three kinds of negation in the classical linguistic variable proposed by Zadeh. In order to sketch the natural features and intrinsic relationships between fuzzy knowledge and its three kinds of negation, we further investigate their set basis and define a novel type of generalized fuzzy sets with contradictory, opposite and medium negation, denoted by GFScom. And several basic algebraic operations of GFScom and its properties are studied. On this basis, the approach to construct the fuzzy system equipped with the first-order and second-order approximation accuracy is given, and the approximation capability of the systems is analyzed. The demonstrations in fuzzy systems show that using GFScom, we can, not only make the fuzzy reasoning capability of fuzzy systems much richer, but also design the fuzzy system to any degree of accuracy under condition of only knowing distribution of fewer membership functions.

Keywords　fuzzy knowledge; fuzzy sets; negative relationships; linguistic variables with three types of negation; generalized fuzzy sets GFScom; design of fuzzy systems; approximation capability

收稿日期：2015-01-06；在线出版日期：2015-07-22．本课题得到国家自然科学基金(11271237)、贵州省科学技术基金(黔科合 J 字[2012]2324 号)、贵州省教育厅自然科学研究重点项目(黔教合 KY 字[2015]408 号)和黔西南州科技计划项目(2015-1-51)资助．**张胜礼**，男，1982 年生，博士研究生，副教授，中国计算机学会(CCF)会员，主要研究方向为非经典计算理论、模糊系统．E-mail：zsl8203@163.com．**李永明**(通信作者)，男，1966 年生，博士，教授，博士生导师，主要研究领域为非经典计算理论、计算智能、格上拓扑学、量子计算与量子信息、模糊系统分析．E-mail：liyongm@snnu.edu.cn．

1 引 言

知识处理,尤其是模糊性知识处理是计算机科学领域,特别是人工智能方向的一个重要研究内容之一.随着知识处理研究的发展,对“否定知识”的认识和处理提出了新的要求,亦即经典数学以及带一种否定的非经典数学已不满足知识处理的需要.对此,国内外许多学者提出了不同的研究方法和思想.20世纪80年代,朱梧槚和肖奚安[1]提出了中介逻辑系统ML(Medium Logic),该系统有着完整的语构和较强的语义表达能力,且将矛盾对立概念和反对对立概念进行了严格区分,并认为反对对立概念有中介概念(对象)的存在.Wagner等人[2-3]认为否定是一个非清晰的概念,继而在计算知识处理系统中指出(至少)存在两种形式的否定:强否定(strong negation)表示明确的假和弱否定(weak negation)表示非真.Esteva等人[4-5]通过在严格基本逻辑(Strict Basic Logic)中引入一种新的一元联结词~(其语义是对合否定算子)而得到一种带有对合否定的严格基本逻辑(Strict Basic Logic with Involutive Negation),它实际上是一种具有两种否定的逻辑(另一种否定就是Hájek[6]建立的基本逻辑BL(Basic Logic)中的否定,即$\neg x = x \rightarrow 0$).Ferré[7]在LCA(Logical Concept Analysis)和自然语言中对否定概念提出一种认识上的扩充,即内涵的否定应为传统的否定(如“young/not young”和“happy/not happy”),外延的否定应解释为对立(如“hot/cold”and “tall/small”).Kaneiwa[8]提出一种具有经典否定和强否定的描述逻辑,其中经典否定用于刻画某一否定语句,而强否定则更适合于表达确定性的否定信息(或否定事实).换句话说,与经典否定相比,强否定指的是那些与原语句直接对立且排斥的信息.潘正华[9-10]从概念的层面上指出,在模糊性知识中应该区分矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系,并建立了一种带有矛盾否定、对立否定和中介否定的新模糊集FScom(Fuzzy Sets with Contradictory, Opposite and Medium negation).文献[11]对FScom做了改进,提出一种改进的模糊集IFScom(Improved Fuzzy Sets with Contradictory, Opposite and Medium negation).为了给FScom(IFScom)提供一种逻辑演算基础,文献[12-13]分别从公理化和自然演绎推理的角度给出了带有3种否定的模糊逻辑.基于中介逻辑系统ML,洪龙等人[14-15]从应用角度考虑,研究并建立了中介真值程度的数值化度量方法.文献[16]给出了带有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊推理方法,指出在模糊推理中考虑不同否定是可行的.同时,Bustince等人[17-18]指出,两个句子之间的否定通常与矛盾相关,并进一步指出,在有些情况下否定以分明的形式出现(如“x is small”和“x is not small”),而在另外情形下则以隐含方式出现(如“x is tiny”和“x is huge”),并提出新概念f-weak-contradiction,进而在此基础上研究模糊集之间的contradiction及contradiction的度量.

自Aristotle以来,形式逻辑就区分了矛盾对立和反对对立[19-20].文献[19]从玄学(metaphysics)、语言哲学(philosophy of language)和心灵哲学(philosophy of mind)发展历史的角度概述了矛盾(contradictory)和反对(contrary)及否定与其他逻辑算子之间的关系.文献[20]则研究了带有中性量词(intermediate quantifiers)的广义亚里士多德对立方形图(generalized Aristotelian square of opposition)的形式化理论,给出了contradictories, contraries和subcontraries的形式化定义.因此,语言哲学和逻辑学的研究中早就发现[1,8,19-20],有些词(概念)本身就隐含了其对另外某一词(概念)的“否定”,例如悲伤、讨厌、丑、懒惰、富裕和胆小等分别是对快乐、喜欢、美、勤劳、贫穷和勇敢等的“否定”.显然,这种形式的否定关系要比经典的否定“not”强很多,我们需要把这种形式的否定与经典的否定not区分开来,称这种形式的否定关系为对立否定关系.给定一个词(概念)w,记w的对立否定(如果存在)为$\neg\!\!\!\!=w$,从而w与$\neg\!\!\!\!=w$就表示一种对立否定关系.而w的经典否定not$w$记为$\neg w$,进而w和$\neg w$就构成一种矛盾否定关系.

在现实世界的各种知识中,大量存在于中介过渡状态的对象(概念),承认中介对象(概念)的存在已作为认识论的一条基本准则.所谓中介对象(概念),即它具有对立双方的部分性质.例如“半导体”就是“导体”和“绝缘体”的中介过渡对象,“中年人”是“年轻人”到“老年人”的中介过渡概念.潘正华等认为中介概念与对立双方概念之间的关系也是一种否定关系,称为中介否定关系.我们记w的中介否定为$\sim w$,于是$\sim w$与w(或$\neg\!\!\!\!=w$)之间的关系就是一种中介否定关系.

在模糊系统中,模糊知识是以规则的形式表达的,而每条模糊规则均可表示成如下标准形式[21-22]:

$$R^{(l)}: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^l \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^l,$$

THEN y is $B^l (l=1,2,\cdots,m)$

其中：A_i^l和B^l分别是论域$X_i \subseteq R$和$Y \subseteq R$上的模糊集；$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in X=X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$；$y \in Y$分别是输入、输出（语言）变量；$m$为规则数目.该形式是$n$输入单输出模糊规则的标准形式，其他形式的规则都可转化为这样的形式.在传统的模糊系统中，我们需要对每一个模糊子集A_i^l和B^l都建立一个隶属函数.正如文献[17]所说，因为存在大量的聚合函数（aggregation functions），且有许多不同的但有效的构造方法，因此，对于一个实用的系统而言，一个重要但困难的事情就是如何选择最适合的函数.这也意味着，一个实用的模糊系统中往往具有成百上千个不同的模糊子集，而如何为每一个模糊子集寻找到有效的隶属函数是一件非常困难的事情.

然而，通过对模糊规则的分析后发现，从否定的角度看，许多模糊子集之间并不是孤立的，而是可以通过上述3种否定关系联系起来.本文的工作之一就是给出这种联系的方法.

如上所知，模糊系统实际上就是从输入空间到输出空间的一个转换，其数学本质为一个复合映射.给定一个在紧集上连续的未知函数，希望设计一个模糊系统，使之能够以任意的精度逼近该未知函数.目前，模糊系统的设计方法需要在整个输入空间上恰当地构造出模糊子集的隶属函数的分布情况.本文另一个主要工作就是在已知部分隶属函数的情况下，并考虑上述3种否定的前提下给出如何设计模糊系统的方法.

此外，研究模糊系统的逼近性能是非常重要的，亦是必要的.自然地，我们希望设计出能以任意精度逼近所给定的某一未知函数（该函数通常要求在紧集上连续）.模糊系统的逼近性能在理论和应用上都取得了丰硕的成果[21-26].对于考虑了不同否定的模糊系统设计方法所设计出的系统，其是否也具有良好的逼近性能？本文的第3个工作就是给出相应的逼近性能分析.

对于模糊系统中的否定知识的认识，本文首先从哲学层面上对潘正华等人提出的3种否定关系进行了研究，提出了矛盾否定关系、对立否定关系和中介否定关系的本质特征.紧接着，在语言变量中引入3种否定的概念，得到了带有3种否定的语言变量.为了能够刻画这些否定关系的本质特征和内在联系，进一步研究了它们的集合基础，定义了一种新的带有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集GFScom，并讨论了GFScom的一些基本运算及性质.在此基础上，本文给出了基于GFScom的模糊系统的设计方法，并研究其逼近特性，得到了所设计的系统也是一种万能逼近器.

2　预备知识

2.1　一些基本概念

为了使模糊集合适用于各种不同的模糊现象，必须建立模糊集合的各种不同的运算.模运算是模糊集合运算的最一般形式.

定义1[6,21].　映射$T:[0,1]^2 \to [0,1]$称为三角模，如果T满足如下条件：

(1) $T(0,0)=0, T(1,1)=1$；

(2) $a \le c, b \le d \Rightarrow T(a,b) \le T(c,d)$；

(3) $T(a,b)=T(b,a)$；

(4) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$.

若三角模满足$T(a,1)=a(\forall a \in [0,1])$，则称$T$为$t$-模（$t$-norm）；若三角模$T$满足$T(a,0)=a(\forall a \in [0,1])$，则称$T$为$t$-余模或$s$-模（$s$-norm）.

例1.　下面是一些常见的t-模：

取小算子（minimum）：$T_0(a,b)=a \wedge b=\min\{a,b\}$；

代数积（algebraic product）：$T_1(a,b)=\mathrm{ab}$；

有界积或Lukasiewicz积（Lukasiewicz product）：$T_\infty(a,b)=\max\{0,a+b-1\}$.

而下面的模则是一些常见的s-模：

$S_0(a,b)=a \vee b=\max\{a,b\}$；

$S_1(a,b)=a+b-ab$；

$S_\infty(a,b)=\min\{1,a+b\}$.

定义2[21].　设$n:[0,1] \to [0,1]$满足

(1) $n(0)=1$，$n(1)=0$；　　（正则性）

(2) $\forall a,b \in [0,1]$，若$a \le b$，则$n(b) \le n(a)$；　　（逆序性）

则称n为伪补.若伪补n还满足

(3) $n(n(a))=a, \forall a \in [0,1]$，　　（对合性）

则称n为补.

例2.　设$s_p(x)=\dfrac{1-x}{1+px}, p>-1$，则$s_p$为补，称为Sugeno补.当$p=0$时，$s_p(x)=1-x$，$s_p=c$，即$c(x)=1-x$，称为线性补.

定义3[21].　(1)一个连续且严格递增的函数$f:[0,1] \to [0,1]$，若满足$f(0)=0, f(1)=1$，则称f为修饰子.修饰子若满足$f(x) \le x, \forall x \in [0,1]$，则称$f$为强修饰子.若满足$f(x) \ge x, \forall x \in [0,1]$，则称$f$为弱修饰子.若满足$f(x)+f(1-x)=1, \forall x \in$

$[0,1]$,则称 f 为调熵子.

(2) 一个语言词或修饰词是一个函数,它修饰一个词或一般地修饰一个模糊集的名称,若 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是修饰子,可将 f 扩张为 $f:F(U)\to F(U)$:$\forall A\in F(U)$,$B=f(A)\in F(U)$ 定义为 $B(u)=f(A(u))$,$\forall u\in U$.

这样,词 A 经修饰词 f 作用后产生一个复合词 $B=f(A)$,其中 $F(U)$ 表示论域 U 上的模糊子集的全体.

例 3. 常用的修饰词是 $f_p(x)=x^p$,$x\in[0,1]$,$p>0$. 一般地,$p=2$ 对应修饰词"非常(very)"、"多(much)",$p=4$ 对应"极(extremely)",$p=1.25$ 对应"相当(quite)",$p=0.25$ 对应"微"等.

2.2 FScom 及 IFScom

为方便计,我们对新模糊集 FScom 及 IFScom 做一简单介绍.

定义 4[27]. 设 U 是论域. 映射 $\mu_A:U\to[0,1]$ 确定了 U 上的模糊子集 A. 映射 μ_A 称为 A 的隶属函数,$\mu_A(x)$ 称为 x 对 A 的隶属程度(简称隶属度),简记为 $A(x)$.

定义 5[10]. 设 A 是 U 上的模糊子集,$\lambda\in(0,1)$.

(1) 映射 $f^{\urcorner}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$,若满足 $f^{\urcorner}(A(x))=1-A(x)$,则映射 $f^{\urcorner}$ 确定了 U 上的一模糊子集,记作 $A^{\urcorner}$,$A^{\urcorner}(x)=f^{\urcorner}(A(x))$. $A^{\urcorner}$ 称为 A 的对立否定集.

(2) 映射 $f^{\sim}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$,若满足

$$f^{\sim}(A(x))=\begin{cases}\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(A(x)-\lambda)+1-\lambda, & \text{当 } \lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right) \text{ 且 } A(x)\in(\lambda,1]\\[2ex] \dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}A(x)+1-\lambda, & \text{当 } \lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right) \text{ 且 } A(x)\in[0,1-\lambda)\\[2ex] \dfrac{1-2\lambda}{\lambda}A(x)+\lambda, & \text{当 } \lambda\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right] \text{ 且 } A(x)\in[0,\lambda)\\[2ex] \dfrac{1-2\lambda}{\lambda}(A(x)+\lambda-1)+\lambda, & \text{当 } \lambda\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right] \text{ 且 } A(x)\in(1-\lambda,1]\\[2ex] A(x), & \text{其他}\end{cases},$$

则映射 $f^{\sim}$ 确定了 U 上的一模糊子集,记作 $A^{\sim}$,$A^{\sim}(x)=f^{\sim}(A(x))$. $A^{\sim}$ 称为 A 的中介否定集.

(3) 映射 $f^{\neg}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$,若满足 $f^{\neg}(A(x))=\max(A^{\urcorner}(x),A^{\sim}(x))$,则 $f^{\neg}$ 确定了 U 上的一模糊子集,记作 $A^{\neg}$,$A^{\neg}(x)=f^{\neg}(A(x))$. $A^{\neg}$ 称为 A 的矛盾否定集.

以上定义的论域 U 上的模糊子集,称为"区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊集"(Fuzzy Sets with Contradictory negation, Opposite negation and Medium negation),简记为 FScom.

为了使新模糊集 FScom 能够更好地刻画模糊知识及其 3 种否定的规律,文献[11]对定义 5 中的(1)和(2)作如下改进,得到一种改进的模糊集 IFScom.

定义 6. 设 A 是 U 上的模糊子集,$\lambda\in(0.5,1)$.

(1) 若映射 $f^{\urcorner}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$ 满足

$$f^{\urcorner}(A(x))=\begin{cases}1-A(x), & \text{当 } A(x)\in[0,1-\lambda) \text{ 或 } A(x)\in(\lambda,1]\\ A(x), & \text{当 } A(x)\in[1-\lambda,\lambda]\end{cases},$$

则该映射 $f^{\urcorner}$ 确定了 U 上的一模糊子集,称为 A 的对立否定集,记作 $A^{\urcorner}$.

(2) 若映射 $f^{\sim}:\{A(x)\mid x\in U\}\to[0,1]$ 满足

$$f^{\sim}(A(x))=\begin{cases}\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}(1-A(x))+1-\lambda, & \text{当 } A(x)\in(\lambda,1]\\[2ex] \dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}A(x)+1-\lambda, & \text{当 } A(x)\in[0,1-\lambda)\\[2ex] \dfrac{1-\lambda}{2\lambda-1}(\lambda-A(x))+\lambda, & \text{当 } A(x)\in[1-\lambda,\lambda]\end{cases},$$

则该映射 $f^{\sim}$ 确定了 U 上的一模糊子集,称为 A 的中介否定集,记作 $A^{\sim}$.

3 3 种否定关系的本质

3.1 模糊概念中 3 种否定关系的本质特征

文献[9-11]对模糊知识中存在的 3 种否定关系的基本特征做了阐述. 为了更好地刻画 3 种否定之间的关系,根据文献[19-20]从哲学方面对"否定"认识的思想以及中介数学思想[1],我们通过对大量的客观实例进行研究后发现,3 种否定具有如下本质特征:

(1) 矛盾否定关系的本质

本质特征:"外延界限不分明,本质上非此即彼".

例如,在"velocity"这个概念下"Slow"和"not Slow"就是一对矛盾否定关系. 我们说"Slow"和"not Slow"在本质上非此即彼,是指存在着一对象 x,使得"x is Slow"和"x is not Slow"不能同时为真,也不能同时为假. 换句话说,存在着一对象 x 满足:x 对模糊子集"Slow"的隶属度为 1,而对模糊子

集“not Slow”的隶属度为 0，或者 x 对模糊子集“Slow”的隶属度为 0，而对模糊子集“not Slow”的隶属度为 1.

(2) 对立否定关系的本质

本质特征：“外延界限不分明，本质上不非此即彼”.

这里“本质上不非此即彼”是指在任意属概念之下，对立否定双方可以都为假，但不能两者都为真. 例如，在“emotion”这个概念下“happy”和“sad”之间的关系就是对立否定关系. 我们说“happy”和“sad”在本质上不非此即彼，是指可能存在着一对象 x，使得“x is happy”和“x is sad”都为假，但绝不存在对象 x 使得“x is happy”和“x is sad”都为真. 换句话说，也许存在着一对象 x，使得 x 对模糊子集“happy”和“sad”的隶属度都为 0，但绝对找不到一对象 x，使得 x 对模糊子集“happy”和“sad”的隶属度都为 1.

(3) 中介否定关系的本质

本质特征：“外延界限不分明，本质上非此非彼”.

例如，在“age”这个概念下的“medium”与对立否定概念“young”和“old”之间的关系就是一种中介否定关系. 我们说“medium”与对立否定概念“young”和“old”在本质上非此非彼，是指也许存在着某一“age”x，使得 x 对“young”和“old”的隶属度都为 0，而对“medium”的隶属度为 1. 进一步分析后我们发现，中介概念应该是对对立否定概念双方的“not”，进而我们认为，要精确刻画描述中介否定概念，就必须同时使用对应的对立双方概念进行描述，否则单用对立概念中的任何一个都不能对其进行较客观地表达. 通过对矛盾否定关系和中介否定关系的本质特征分析后发现，中介否定概念可以视为是对概念 w 的“矛盾否定”，同时也是对概念 $\neg w$ 的“矛盾否定”，因而我们认为中介否定 $\sim w$ 应该定义为 w 的矛盾否定与 $\neg w$ 的矛盾否定之“交”. 从下文可以看出，这种处理方式是合理恰当的.

需要指出的是，本文所称的对立否定(opposite negation)和中介否定(medium negation)与文献[20]中所称的反对(contrary)和小反对(subcontrary)是不同的. 因为文献[20]认为“大部分 B 是 A”(most B are A)与“大部分 B 是 not A”(most B are not A)”是一对反对关系，而根据中介数学的思想，我们认为“大部分 B 是 A”的对立否定面应为“小部分 B 是 A”. 类似地，在文献[20]中，“一些 B 是 A”(some B are A)与“一些 B 是 not A”(some B are not A)”是一对小反对，显然它们之间的关系并不是本文所称的中介否定关系. 因为中介否定关系指的是在同一个属概念之下，中介过渡状态(概念)与对立否定双方之间的一种关系，换句话说，对立否定双方在由一方转化为另一方的过程中所呈现出的“本质上非此非彼”性.

3.2 模糊概念中 3 种否定关系本质的形式化刻画

在知识中，知识是由概念所构成. 在形式逻辑中，概念是由其内涵和外延所确定. 概念的内涵就是指这个概念的含义，即该概念所反映的事物对象所特有的属性；而概念的外延就是指这个概念所反映的事物对象的范围，即具有概念所反映的属性的事物或对象. 概念的模糊性，一般指概念在外延上的不分明性，但其内涵则是分明的.

若 A 是一概念，分别用 $\mathrm{Int}(A)$ 和 $\mathrm{Ext}(A)$ 来表示 A 的内涵和外延.

定义 7[9-10]. 设 $U(\neq\varnothing)$ 为论域，$X(X\subseteq U)$ 为关于 U 中对象的一个概念. 对于 X，若存在一个划分：$\{X_1,\cdots,X_n\}$，$X_i\subseteq X$，$X_i\neq\varnothing$，$\bigcup_{i=1}^{n}X_i=X$，则称 X 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的属概念，$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 X 的种概念.

由于任何一对具有矛盾否定关系的概念和一对具有对立否定关系的概念，都是同一个属概念下的一对种概念，矛盾否定关系和对立否定关系的形式化刻画如下.

设一个属概念 $X=\bigcup_{i=1}^{n}X_i$，其中 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 X 的种概念. 若在 X 中存在种概念 X_i,X_j,X_k $(X_i\neq X_j\neq X_k)$，且都为模糊概念，则：

若 X_i 与 X_j 具有关系：$\{(X_i,X_j)|X_i\neq X_j,\mathrm{Ext}(X_i)\cap\mathrm{Ext}(X_j)\neq\varnothing,\mathrm{Int}(X_i)\cap\mathrm{Int}(X_j)=\varnothing,\mathrm{Int}(X_i)\cup\mathrm{Int}(X_j)=\mathrm{Int}(X)\}\subseteq X\times X$，那么，$X_i$ 与 X_j 之间的关系就是矛盾否定关系，简记为 CFC(Contradictory negative relationship in Fuzzy Concepts)；

进一步，若 X_i 与 X_k 具有关系：$\{(X_i,X_k)|X_i\neq X_k,X_i\neq X_j,X_k\neq X_j$，$X_i$ 与 X_j 具有 CFC，$\mathrm{Ext}(X_k)\subseteq\mathrm{Ext}(X_j),\mathrm{Int}(X_i)\cap\mathrm{Int}(X_k)=\varnothing,\mathrm{Int}(X_i)\cup\mathrm{Int}(X_k)\subset\mathrm{Int}(X)\}\subseteq X\times X$，那么，$X_i$ 与 X_k 之间的关系就是对立否定关系，记为 OFC(Opposite negative relationship in Fuzzy Concepts).

如前所述，对立否定概念为模糊概念时，它们之间存在中介(否定)概念，故而一对对立否定的模糊概念与其中介概念之间的关系可形式化表示为：

设一个属概念 $X=\bigcup_{i=1}^{n}X_i$，其中 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 X 的种概念. 若 X_i 与 X_j 具有 OFC，且存在 $X_m\subseteq X(m\neq i,m\neq j)$，使得 X_m 与 (X_i,X_j) 有关系：$\{(X_m,(X_i,X_j))|X_i$ 与 X'_i 具有 CFC，X_j 与 X'_j 具有 CFC，$\mathrm{Ext}(X_m)\cap\mathrm{Ext}(X_j)\neq\varnothing$，$\mathrm{Ext}(X_m)\cap\mathrm{Ext}(X_i)\neq\varnothing$，$\mathrm{Ext}(X'_i)\cap\mathrm{Ext}(X'_j)=\mathrm{Ext}(X_m)$，$\mathrm{Ext}(X_i)\cup\mathrm{Ext}(X_j)\cup\mathrm{Ext}(X_m)\subseteq\mathrm{Ext}(X)\}\subseteq X\times(X\times X)$，那么，$X_m$ 与 (X_i,X_j) 之间的关系就是中介否定关系，记为 MFC(Medium negative relationship in Fuzzy Concepts).

4 带有 3 种否定的语言变量 LVcom

定义 8. 称形如 $[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，(a,b) 或 $\{a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$ 为一有限数值集，记作 D，其中 $a,b\in R$，并分别称为 D 的左端点、右端点.

定义 9. 任给一论域 U 和有限数值集 D，称映射 $f:U\rightarrow D$ 为论域 U 的(一维)有限数值化映射.

语言变量[28]是 Zadeh 提出的一个基本概念. 它是指赋以语言值而不是数值的变量，例如年龄(age)，真值(truth)等都是语言变量. 一个语言变量 x 是一个在词集 $T(x)$ 上取值的变量，而每个词对应于一个模糊集. 既然在模糊系统中需要区分不同的"否定"，因而从知识处理的角度看，我们亦需要在语言变量中考虑区分一个原词及其矛盾否定、对立否定和中介否定之间的关系，也就是说需要刻画一个原词及其不同否定之间的语义关系. 为此，我们引入如下概念.

定义 10. 任给一论域 U，映射 f 为 U 的(一维)有限数值化映射. 一个带有矛盾否定、对立否定和中介否定的语言变量(Linguistic Variable with Contradictory, Opposite and Medium negation, LVcom)是一个五元组 $(X,T(x),f(U),G,M)$，其中 X 是变量的名称；$T(x)$(简称为 T)表示 X 的词集，即 X 的语言值的名称集；$f(U)$ 是一有限数值集，左、右端点分别为 a,b，它是 X 的取值范围；G 是生成规则，用以生成 X 的语言值的名称；M 是语义规则，对每个语言原词 $t\in T$，$M(t)$ 是 $f(U)$ 上的模糊集，并且用 $\neg t$，$\dashv t$，$\sim t$ 分别表示 t 的矛盾否定、对立否定和中介否定，其语义分别为

$M(\neg t)(u)=n(M(t)(u))$，

$M(\dashv t)(u)=M(a+b-u)$ 且 $M(t)(u)+M(\dashv t)(u)\leq 1$，

$$M(\sim t)(u)=M(\neg t)(u)*M(\neg\dashv t)(u)=n(M(t)(u))*n(M(t)(a+b-u)),$$

其中 $u\in f(U)$，$*$ 为 t-模，n 为补.

为方便计，用 LVcom 的名称 X 代表 LVcom.

若论域 U 是数值论域，f 为恒等映射，并且不考虑否定，这时 LVcom 即退化为 Zadeh 的语言变量.

语言原词 t 的对立否定 $\dashv t$ 的语义解释中的条件 $M(t)(u)+M(\dashv t)(u)\leq 1$ 是为了说明并非所有的模糊概念(语言原词)都存在对立否定概念(语言词). 但在实际计算中，一般不需要验证该条件. 对此进一步的讨论见下文.

例 4. 给定一 LVcom"数目"

X=数目；

T={少，中等，多，不少}；

$f(U)=\{1,2,\cdots,10\}$，其中 $a=1,b=10$；

G：按经验直接给出；

若取原词 t="少"，且 $M(t)=M(\text{少})=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}$，由 LVcom 的语义定义，我们有

$$M(\neg t)=M(\text{不少})=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10};$$

$$M(\dashv t)=M(\text{多})=\frac{0.5}{7}+\frac{0.7}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10};\text{又}$$

$$M(\neg\dashv t)=M(\text{不多})=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.5}{7}+\frac{0.3}{8},$$

故 $M(\sim t)=M(\text{中等})=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.5}{7}+\frac{0.3}{8}$；其中取 t-模为取小算子 min，n 为线性补.

下面，我们按照 FScom 的定义，重新计算出上述对应的模糊子集，记号采用本例的表示形式，计算如下：

令 t="少"，且 $M(t)=M(\text{少})=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}$，根据 FScom 的定义，我们有

$$M(\dashv t)=M(\text{多})=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

为了计算出模糊子集 $M(\sim t)=M(\text{中等})$，需要首先确定参数 λ 的值. 不妨令 $\lambda=0.6$，实际上该值是一个比较低的值，因为参数 λ 可视为模糊规则的置信度.

$$M(\sim t)=M(\text{中等})=\frac{0.4}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.45}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.4}{7}+\frac{0.4}{8}+\frac{0.4}{9}+\frac{0.4}{10};$$

$$M(\neg t)=M(\text{不少})=M(\dashv t)\cup M(\sim t)=\frac{0.4}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.45}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}.$$

从上面计算结果可以看出，我们对于词"多"、"中等"和"不少"的语义刻画显然不够精确，也就是说 FScom 对 3 种否定关系的处理需要改进. 例如在给定论域 $f(U)=\{1,2,\cdots,10\}$下，没有一个对象$u\in f(U)$完全隶属于模糊子集 M(中等)，这显然与客观思维不符；再者，元素 $1\in f(U)$对模糊子集 M(少)的隶属度为 1，对模糊子集 M(不少)的隶属度为 0.4，换句话说，1 已完全属于模糊子集 M(少)，而又部分地属于它的矛盾否定子集 M(不少)，这就更加与我们的直观思维不符. 也许有人会说，这可能是由于参数 λ 选择不恰当所致. 事实上，通过对 FScom 的分析，可以发现如下问题.

(1) 任给一个模糊子集 A，它的中介否定集 $A^{\sim}$ 是一个非正规模糊子集. 因为在 FScom 中，我们可以证明 $\forall x\in U$，都有 $1-\lambda\le A^{\sim}(x)\le\lambda$(当 $\lambda\in[0.5,1)$)或者 $\lambda\le A^{\sim}(x)\le 1-\lambda$(当 $\lambda\in(0,0.5]$)，这就意味着在论域 U 中不存在任意对象完全属于中介否定集 $A^{\sim}$，明显与我们的客观思维不符.

(2) 对一个模糊子集 A 的矛盾否定集 $A^{\neg}$，对立否定集 $A^{\dashv}$和中介否定集 $A^{\sim}$ 三者之间的关系的刻画不准确. 因为在 FScom 中有结论"$A^{\neg}=A^{\dashv}\cup A^{\sim}$"，据上述(1)的分析，可知 $\forall x\in U$，$A^{\neg}(x)=(A^{\dashv}\cup A^{\sim})(x)=\max(A^{\dashv}(x),A^{\sim}(x))\ge A^{\sim}(x)>0$. 这就是说，即使有一个对象 $x\in U$ 对模糊子集 A 的隶属度为 1，它也会部分属于其矛盾否定集 $A^{\neg}$.

(3) 从应用的角度看，FScom 所定义的 3 种否定算子比较单一，对于不同的模糊系统，我们往往需要选择不同的算子，以使对该模糊系统的否定知识的刻画、处理更符合客观实际. 但 FScom(或 IFScom)中，对否定算子的单一性定义则限制了其实际应用的广泛性.

(4) FScom 中的参数 λ 往往很难确定，经常需要领域专家给出，主观性比较强.

虽然 IFScom 在一定程度上对 FScom 做了改进，但其仍然有上述的(2)，(3)和(4)所述的缺陷.

定义 11.　若 LVcom 的词集 T 和语义 M 能够用一个递归算法来表示，则称它为带有矛盾否定、对立否定和中介否定的构成式语言(Constructive LVcom，CLVcom).

例 5.　给定 CLVcom"年龄".

X=年龄；

T={老，非常老，非常非常老，…}；

词集能被下列递归算法来生成：

G：$T^{i+1}=\{\text{老}\}\cup\{\text{非常 }T^{i}\}$，$T^{0}=\varnothing$，即 $T^{1}=\{\text{老}\}$，$T^{2}=\{\text{老，非常老}\}$，….

"老"是原词，"非常"是修饰词. 定义"老"为 $M(\text{老})=\int_{0}^{150}S(u;40,55,70)/u$，则 $M(\text{非常老})=(M(\text{老}))^{2}$，$M(\text{非常非常老})=(M(\text{老}))^{4}$，…. 此例中 LVcom 就是 CLVcom.

定义 12.　任给一个 LVcom，令 t_p为原词，f 为修饰词，$f(t_p)$表示 f 作用于 t_p而产生的一个复合词. 若 LVcom 的词集由下列被称为中介表达式的元素构成：

(1) t_p，$f(t_p)$为中介表达式；

(2) 若 A，B 为中介表达式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$\dashv A$，$\sim A$ 和$\neg A$ 都是中介表达式；

(3) 只有(1)和(2)所生成的才是中介表达式.

则称该 LVcom 为中介语言变量，其中$\wedge$，$\vee$，$\dashv$，$\sim$，$\neg$分别为"合取"、"析取"、"对立否定"、"中介否定"和"矛盾否定".

例 6.　中介语言变量"年龄".

X="年龄"；

T={年轻，不年轻，老，不老，非常年轻，不年轻且不老，年轻或老，…}；

若取原词 t="年轻"，f="非常"，则$\neg t$="不年轻"，$\dashv t$="老"，$\neg\dashv t$="不老"，$f(t)$="非常年轻"，$\sim t$="中年"，$(t\vee\dashv t)$="年轻或老"，$(\neg t\wedge\neg\dashv t)$="不年轻且不老"，…，则 T 可表示为 $T=\{t,\neg t,\dashv t,\neg\dashv t,f(t),\sim t,(t\vee\dashv t),(\neg t\wedge\neg\dashv t),\cdots\}$；

$f(U)=[0,100]$，其中左、右端点分别为 $a=0$，$b=100$；

G 这样生成：原词按经验给出，复合词按$\wedge$，$\vee$，$\dashv$，$\sim$，$\neg$和修饰词 f 合成；

若原词 t="年轻"定义为 $M(t)=M(\text{年轻})=\int_{0}^{100}[1-S(u;25,35,45)]/u$，其中

$$S(u;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}0, & u\le\alpha\\ 2\left(\dfrac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^{2}, & \alpha\le u\le\beta\\ 1-2\left(\dfrac{u-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^{2}, & \beta\le u\le\gamma\\ 1, & \gamma\le u\le b\end{cases},$$

这里 α,β,γ 是系数，$\alpha<\beta<\gamma$ 且 $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$. 从而根据 LVcom 的定义，有

$$M(老)=M(\neg t)=\int_0^{100}[1-S(u;25,35,45)]/[100-u]$$
$$=\int_0^{100}S(u;55,65,75)/u,$$
$$M(不非常老)=M(\neg f(\neg t))=n(M(f(\neg t)))=n(M(老)^2),$$
$$M(年轻或老)=M(t\vee\neg t)=M(年轻)\cup M(老),\cdots.$$

从例 6 可以看出，LVcom 中的中介语言变量可以表达更为丰富的词集，并且我们只要获得一个原词的语义，即对应模糊集的隶属函数，就可以通过简单地计算得出其他模糊子集的隶属函数，这为构建一个模糊系统时获取模糊子集的隶属函数提供了一种简便合理的方法.

5 带有 3 种否定的广义模糊集 GFScom

为了区分和处理模糊系统中模糊知识的 3 种不同的否定之间的内在本质和联系，我们需要从数学中最基本的概念—集合—出发，在 Zadeh 模糊集中引入上述 3 种否定.

5.1 广义模糊集 GFScom

由于任何论域 U 都可以进行有限数值化映射，进而得到(一维)有限数值集，因此，为方便计，以下讨论都把论域 U 视为一个有限数值集，并以 $F(U)$ 表示 U 上全体模糊子集构成的集合.

定义 13. 设 $A\in F(U)$，a,b 为 U 的左、右端点，$\forall u\in U$，$*$ 为 t-模，n 为补算子.

(1) 若映射 $A^{\neg}:U\to[0,1]$满足 $A^{\neg}(u)=n(A(u))$，称 $A^{\neg}$确定的模糊子集为 A 的 n 矛盾否定集. 特别地，若 n 为线性补，则 $A^{\neg}(u)=n(A(u))=1-A(u)$ 确定的模糊子集为 A 的矛盾否定集.

(2) 若映射 $A^{\neg}:U\to[0,1]$满足 $A^{\neg}(u)=A(a+b-u)$ 且 $A^{\neg}(u)+A(u)\le 1$，则称 $A^{\neg}$确定的模糊子集为 A 的对立否定集.

(3) 若映射 $A^{\sim}:U\to[0,1]$满足 $A^{\sim}(u)=A^{\neg}(u)*(A^{\neg})^{\neg}(u)=n(A(u))*n(A^{\neg}(u))=n(A(u))*n(A(a+b-u))$，称 $A^{\sim}$ 确定的模糊子集为 A 的 $*-n$ 中介否定集. 特别地，若 t-模 $*$ 取 min，n 取线性补，则称 $A^{\sim}(u)=\min\{1-A(u),1-A(a+b-u)\}$ 为 A 的中介否定集.

上述定义中给出的模糊集称为"带有矛盾否定、对立否定和中介否定的广义模糊集"(Generalized Fuzzy Set with Contradictory, Opposite and Medium negation, GFScom).

定义 14. 在 GFScom 中，模糊子集之间的包含、相等、并、交运算与 Zadeh 模糊集合一样，即有

(1) 设 A,B 为 GFScom，若 $\forall u\in U$，有 $A(u)\le B(u)$，则称 A 含于 B，或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$. 若 $\forall u\in U$，有 $A(u)=B(u)$，称 A 等于 B，记作 $A=B$.

(2) 设 A,B 为 GFScom，$\forall u\in U$，A 与 B 的并 $A\cup B$，交 $A\cap B$ 的隶属函数定义为

$$(A\cup B)(u)=A(u)\vee B(u)=\max\{A(u),B(u)\},$$
$$(A\cap B)(u)=A(u)\wedge B(u)=\min\{A(u),B(u)\}.$$

在 Zedah 模糊集中，其"否定"集(指本文中的矛盾否定集)可由其原模糊集通过补算子而得到. 自然地，我们希望由原模糊集合分别通过适当的对立否定算子、中介否定算子而得到其对立否定集和中介否定集. 那么如何刻画对立否定、中介否定算子呢？一个自然的想法是：给定一对对立否定概念 A,B，我们希望 A 与 B 能互为"镜像"，即 A,B 具有某种对称性，同时又不能同时为真，在 GFScom 中对对立否定算子的处理就是这种想法的具体体现；另一方面，在中介逻辑 ML[1] 中，有逻辑公式"$\sim A\ \models\!\!\!\dashv\ \neg A\wedge\neg\neg A$"，即$\sim A$ 与 $\neg A\wedge\neg\neg A$ 是逻辑等价的，又"$\wedge$"可用 t-模代替，反映到 GFScom 中就得到对中介否定算子的描述.

如上所知，任意的模糊概念都存在着与其对应的矛盾否定概念. 自然地，对任意的模糊概念而言，是否一定存在与其对应的对立否定概念？从哲学层面上来看，并非所有的模糊概念都存在对应的对立否定概念. 例如，在"人的性别"这个属概念下的种概念"中性人"就没有与其对应的对立否定概念，因为两个概念为对立否定概念指的是如果两个概念都有其自身的肯定内容，并且在同一内涵的更高级的概念中，两者之间存在最大的差异[1]. 再比如，在"速度"这个属概念之下的种概念"不快"也不存在与其对应的对立否定概念，或者说其对立否定概念无意义. 既然并非所有的模糊概念都存在着对应的对立否定概念，那么哪些模糊概念的对立否定概念不存在或者说无意义？关于这一点，我们将从集合的角度对其进行严格的论述，因为任意一模糊概念都唯一对应一个模糊集合.

据以上分析，我们可做如下规定.

规定. 令 A 为论域 U 上任一模糊子集，规定 $(A^{\neg})^{\neg}$ 不存在或无意义.

根据定义 13，容易看出上述规定是合理的. 事

实上，$\forall u\in U$，a，b 分别为 U 的左、右端点，n 为补算子，则 $A^{\neg}(u)=n(A(u))\in[0,1]$. 一般情况下 $n(A(u))\notin U$，故而 $(A^{\neg})^{╕}(u)=A(a+b-n(A(u)))$ 在一般情况下不存在，进而亦无意义. 即使 $n(A(u))\in U$，虽然可计算出 $(A^{\neg})^{╕}(u)$，但这时已没有实际意义. 对此，文献[13]亦有相应的结果.

以后，我们所称模糊子集 A 的矛盾否定集、对立否定集和中介否定集均是指 t-模 $*$ 取 min，n 取线性补的情形.

5.2 GFScom 的性质

定理 1. 设 A,B,C 均为论域 U 上的 GFScom，a,b 分别为 U 的左、右端点，则

(1) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；（交换律）

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；（结合律）

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；（分配律）

(4) $A\cup(A\cap B)=A$，
$A\cap(A\cup B)=A$；（吸收律）

(5) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；（幂等律）

(6) $U\cap A=A$，$U\cup A=U$，
$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\cup A=A$.（两极律）

证明. 由于上述的性质不涉及“否定”算子，故而其证明与 Zadeh 模糊集一样.　　证毕.

在 GFScom 中不仅考虑了矛盾否定，对立否定和中介否定，而且与 FScom（或 IFScom）相比，对这 3 种否定算子有了新的定义，因此，它还有如下一些特殊的性质.

性质 1. 设 A,B,C 均为论域 U 上的 GFScom，a,b 分别为 U 的左、右端点，则

(1) $A^{\neg\neg}=A$，(2) $A^{╕╕}=A$，(3) $A^{\sim}=A^{╕\sim}$.

证明. (1) $\forall u\in U$，$A^{\neg\neg}(u)=1-A^{\neg}(u)=1-(1-A(u))=A(u)$，所以 $A^{\neg\neg}=A$.

(2) $\forall u\in U$，$A^{╕╕}(u)=A^{╕}(a+b-u)=A(a+b-(a+b-u))=A(u)$，所以 $A^{╕╕}=A$.

(3) $\forall u\in U$，$A^{╕\sim}(u)=\min\{1-A^{╕}(u),1-A^{╕}(a+b-u)\}=\min\{1-A^{╕}(u),1-A(u)\}=\min\{1-A(u),1-A(a+b-u)\}=A^{\sim}(u)$，所以 $A^{\sim}=A^{╕\sim}$.

性质 1 中的(1)在 FScom（或 IFScom）是不成立的，只有(2)和(3)成立，这进一步说明了 GFScom 中对否定算子定义的合理性，因为它不仅体现了“对立之对立”等于其自身的中介思想[1]，还保留了经典数学中的“否定之否定”（指矛盾否定）等于其本身的思想.

性质 2. 设 A,B,C 均为论域 U 上的 GFScom，且 $(A\cup B)^{╕}$ 与 $(A\cap B)^{╕}$ 存在，即 $\forall u\in U$，$(A\cup B)^{╕}(u)+(A\cup B)(u)\le 1$，$(A\cap B)^{╕}(u)+(A\cap B)(u)\le 1$，则

(1) $(A\cup B)^{\neg}=A^{\neg}\cap B^{\neg}$，$(A\cap B)^{\neg}=A^{\neg}\cup B^{\neg}$；

(2) $(A\cup B)^{╕}=A^{╕}\cup B^{╕}$，$(A\cap B)^{╕}=A^{╕}\cup B^{╕}$.

证明. 由定义 13，14 易得.

性质 3. 设 A,B,C 均为论域 U 上的 GFScom，则 (1) $A^{\sim}=A^{\neg}\cap A^{╕\neg}$，(2) $(A\cup B)^{\sim}=A^{\sim}\cap B^{\sim}$.

证明. (1) 由定义 13，14 易得.

(2) 由定理 1 中的交换律、结合律、性质 2 以及性质 3 中的(1)知，

$$\begin{aligned}(A\cup B)^{\sim}&=(A\cup B)^{\neg}\cap(A\cup B)^{╕\neg}\\&=(A^{\neg}\cap B^{\neg})\cap(A^{╕}\cup B^{╕})^{\neg}\\&=(A^{\neg}\cap B^{\neg})\cap(A^{╕\neg}\cap B^{╕\neg})\\&=(A^{\neg}\cap A^{╕\neg})\cap(B^{\neg}\cap B^{╕\neg})\\&=A^{\sim}\cap B^{\sim}.\end{aligned}$$

性质 4. 设 A,B,C 均为论域 U 上的 GFScom，a,b 分别为 U 的左、右端点，则

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow B^{\neg}\subseteq A^{\neg}$；(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A^{╕}\subseteq B^{╕}$；(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow B^{\sim}\subseteq A^{\sim}$.

证明. (1) $\forall u\in U$，因 $A\subseteq B$，根据定义 14，$A(u)\le B(u)$，从而 $1-B(u)\le 1-A(u)$，据定义 13，则有 $B^{\neg}(u)\le A^{\neg}(u)$，故 $B^{\neg}\subseteq A^{\neg}$. 反之，同理可证.

(2) $\forall u\in U$，a,b 分别为 U 的左、右端点，则 $(a+b-u)\in U$. 若 $A\subseteq B$，根据定义 14，$A(a+b-u)\le B(a+b-u)$，即 $A^{╕}(u)\le B^{╕}(u)$，所以 $A^{╕}\subseteq B^{╕}$. 反之，若 $A^{╕}\subseteq B^{╕}$，从而 $A^{╕╕}\subseteq B^{╕╕}$，又由性质 1 中的(2)，可得 $A\subseteq B$.

(3) 若 $A\subseteq B$，据性质 4 中(1)和(2)，$B^{\neg}\subseteq A^{\neg}$，$B^{╕\neg}\subseteq A^{╕\neg}$，从而 $B^{\neg}\cap B^{╕\neg}\subseteq A^{\neg}\cap A^{╕\neg}$，即 $B^{\sim}\subseteq A^{\sim}$.

性质 5. 设 A 是论域 U 上的 GFScom，$*,\Delta\in\{╕,\sim,\neg\}$，则

$$A\cup A^{*}=U,\ A^{\Delta}\cup A^{*}=U,$$
$$A\cap A^{*}=\varnothing,\ A^{\Delta}\cap A^{*}=\varnothing$$

都不成立.

性质 5 说明了在 GFScom 中，排中律和矛盾律都不成立.

有了上述的性质准备，我们可得到下面的结论.

定理 2. 令 A 为论域 U 上任一模糊子集，则 $(A^{\sim})^{╕}$，$(A^{\neg})^{\sim}$ 和 $(A^{\sim})^{\sim}$ 都不存在或无意义.

证明. 只证 $(A^{\sim})^{╕}$，其余两个可类似证之.

据性质 2 中的(2)和性质 3 中的(1)，可知 $(A^{\sim})^{╕}=(A^{\neg}\cap A^{╕\neg})^{╕}=A^{\neg╕}\cap A^{╕\neg╕}$，又由上述规定可知 $A^{\neg╕}$ 不存在或无意义，从而 $A^{\neg╕}\cap A^{╕\neg╕}$ 不存在

或无意义,即$(A^{\sim})^{\dashv}$不存在或无意义. 证毕.

定理 2 告诉我们,对于矛盾否定算子¬,对立否定算子ㅋ和中介否定算子～而言,并非任意两两复合都有意义,具体情况见表 1.

表 1 3 种否定算子任意两两复合存在情况

	矛盾否定算子¬	对立否定算子ㅋ	中介否定算子～
$A^{\neg}$		×	×
$A^{\dashv}$			
$A^{\sim}$		×	×

5.3 3 种模糊集合 FScom、IFScom 及 GFScom 的比较

3 种模糊集 FScom、IFScom 及 GFScom 均在 Zadeh 模糊集合中考虑了 3 种不同的否定关系,都从概念的层面上区分、处理了模糊知识中存在的 3 种否定关系,扩展了 Zadeh 模糊集. 通过对 FScom、IFScom 及 GFScom 的定义分析后可以发现,FScom 及 IFScom 对矛盾否定、对立否定和中介否定的表达存在着不足(见第 4 节中的分析),而 GFScom 则完全克服了上述缺陷. 在 GFScom 中,一个模糊子集 A 的中介否定集 $A^{\sim}$ 可以为正规的,只要在论域 U 中存在 x_0,使得 $A(x_0)=0$ 且 $A^{\dashv}(x_0)=0$,则必有 $A^{\sim}(x_0)=1$. 因为每一个补算子 n 和 t-模都有着一定的实际应用背景,所以通过使用补算子 n 和 t-模来对矛盾否定、中介否定进行刻画,就会使得 GFScom 具有了应用上的广泛性,同时避免了 FScom 以及 IFScom 中参数 λ 的确定问题.

下面我们对 FScom 与 GFScom 的 3 种否定算子之间的关系做一说明,IFScom 与 GFScom 可做类似分析.

在 FScom 中,$\forall x\in U$,A 的对立否定集 $A^{\dashv}$ 被定义为 $A^{\dashv}(x)=1-A(x)$,就是 GFScom 中的矛盾否定集 $A^{\neg}$,即 FScom 中对立否定集与 GFScom 中的矛盾否定集相同;当 $A(x)\geq 0.5$ 时,因为在 GFScom 中有 $A^{\dashv}(x)+A(x)\leq 1$,所以 $A^{\dashv}(x)\leq 0.5$,进而 $A^{\dashv\neg}(x)\geq 0.5$,又 $A^{\neg}(x)\leq 0.5$,故而 $A^{\sim}(x)=A^{\neg}(x)\wedge A^{\dashv\neg}(x)=A^{\neg}(x)$,即,此时 GFScom 中的中介否定集与 FScom 中对立否定集相同;当 $A(x)<0.5$ 时,因此时在 FScom 中可证 $A^{\neg}(x)=\max(A^{\dashv}(x),A^{\sim}(x))=A^{\dashv}(x)$,所以,此时 FScom 中矛盾否定集与 GFScom 中的矛盾否定集完全相同,从而我们有如下结论.

命题. 设 A 是一模糊集.

FScom 中对立否定集与 GFScom 中的矛盾否定集相同;

当 $A(x)\geq 0.5$ 时,GFScom 中的中介否定集与 FScom 中对立否定集相同;

当 $A(x)<0.5$ 时,FScom 中矛盾否定集与GFScom 中的矛盾否定集相同.

6 基于 GFScom 的模糊系统的设计

据文献[22],模糊系统是一种万能逼近器,即模糊系统能以任意精度逼近紧集上的任意函数. 但是,仅仅知道最优模糊系统的存在性是远远不够的. 为了回答怎样找到最优模糊系统这一问题,首先必须知道对于要逼近的非线性函数 $g(x):U\subseteq R^n\rightarrow R$ 来说,什么信息是可以获得的. 一般情况下,我们可能会遇到如下 3 种情况:

(1) $g(x)$的解析式已知;

(2) $g(x)$的解析式未知,但对于任意 $x\in U$ 可以确定相应的 $g(x)$;

(3) $g(x)$的解析式未知,仅知道有限数量的输入-输出数据对$(x^j,g(x^j))$,其中 $x^j\in U$ 是不能任意选的.

第 1 种情况不是很有意义,因为若 $g(x)$的解析公式已知,就可以用 $g(x)$来达到模糊系统想要达到的任何目的,几乎不需要用模糊系统去取代 $g(x)$. 第 2 种情况更具现实性,本文主要对该情况进行研究. 第 3 种情况在实践中则更为常见,尤其在模糊控制中更是如此,因为控制系统的稳定性可能要求不可以任意选择输入值. 如何基于广义模糊集设计第 3 种情况的模糊系统,我们将另文给出.

因此,本文假定 $g(x)$的解析式未知,但对于任意的 $x\in U$,可以确定输入-输出数据对$(x,g(x))$. 而在本小节中,我们的主要任务是设计一个以某种最优方式逼近 $g(x)$的模糊系统.

6.1 一些基本概念和记号

定义 15[21-22]. 设 $U\subseteq R$,U 上的如下连续函数 A 称为伪梯形函数(Pseudo-Trapezoid-Shaped(PTS) function),

$$A(x;a,b,c,d,h)=\begin{cases}I(x), & x\in[a,b)\\ h, & x\in[b,c)\\ D(x), & x\in[c,d]\\ 0, & x\in U-[a,d]\end{cases},$$

其中 $a\leq b\leq c\leq d$,$a<d$,$I(x)\geq 0$ 为$[a,b)$上的严格递增函数,$D(x)\geq 0$ 为$[c,d]$上严格递减函数(如图 1 所示).

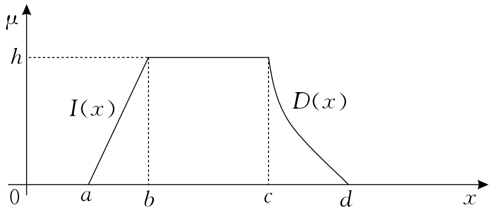

图 1　伪梯形隶属函数

若 U 上的正规模糊集为 PTS 函数时，则称其为 PTS 隶属函数，这时 $h=1$，从而也记为 $A(x;a,b,c,d)$.

若 $I(x)$，$D(x)$ 均为线性函数时，即 $I(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$，$D(x)=\dfrac{x-d}{c-d}$，则得梯形隶属函数，记为 $T(x;a,b,c,d)$. 进一步，若 $b=c$，则得三角形隶属函数，记为$\triangle(x;a,b,d)$. 所以说，PTS 隶属函数是一个隶属函数族.

定义 16[21-23]. U 上的模糊集 $A_1,\cdots,A_N$ 称为 U 上的完备分解，若 $\forall x\in U$，$\exists A_i$使得 $A_i(x)>0$，这时也称 $A_1,\cdots,A_N$为完备的.

定义 17[21-23]. U 上的模糊集 $A_1,\cdots,A_N$ 称为相容的，若对 $x\in U$，$A_i(x)=1$，则 $\forall j\neq i$，$A_j(x)=0$.

由 GFScom 的定义可知，若A为U 上的GFScom，显然模糊子集A 和其对立否定集$A^\neg$是相容的. 事实上，若对某一 $x\in U$，有 $A(x)=1$，又$A(x)+A^\neg(x)\leq 1$，从而$A^\neg(x)=0$；反之，同理可得. 故而模糊子集 A 和其对立否定集 $A^\neg$是相容的.

定义 18[21]. 对 U 上的两个模糊集 A，B，若 $\ker(A)>\ker(B)$，即 $\forall x\in\ker(B)$，$\forall x'\in\ker(A)$，都有 $x'>x$，则称 $A>B$，其中 $\ker(A)=\{x\in U\mid A(x)=1\}$，$\ker(B)=\{x\in U\mid B(x)=1\}$.

引理 1. 令 A 为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom. 若 A 为伪梯形函数，则其对立否定集$A^\neg$亦为伪梯形函数.

证明. 令 A 为如下形式的伪梯形函数

$$A(x;a,b,c,d,h)=\begin{cases}I(x), & x\in[a,b)\\ h, & x\in[b,c)\\ D(x), & x\in[c,d]\\ 0, & x\in U-[a,d]\end{cases},$$

其中 $a\leq b\leq c\leq d$，$a<d$，$I(x)>0$ 为$[a,b)$上的严格递增函数，$D(x)>0$ 为$[c,d]$上严格递减函数. 则

$$A^\neg(x)=A(\alpha+\beta-x;a,b,c,d,h)$$

$$=\begin{cases}I(\alpha+\beta-x), & (\alpha+\beta-x)\in[a,b)\\ h, & (\alpha+\beta-x)\in[b,c)\\ D(\alpha+\beta-x), & (\alpha+\beta-x)\in[c,d]\\ 0, & (\alpha+\beta-x)\in U-[a,d]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}D(\alpha+\beta-x), & x\in[\alpha+\beta-d,\alpha+\beta-c]\\ h, & x\in(\alpha+\beta-c,\alpha+\beta-b]\\ I(\alpha+\beta-x), & x\in(\alpha+\beta-b,\alpha+\beta-a]\\ 0, & x\in U-[\alpha+\beta-d,\alpha+\beta-a]\end{cases}.$$

显然上述函数为伪梯形函数，可简记为 $A^\neg(x;\alpha+\beta-d,\alpha+\beta-c,\alpha+\beta-b,\alpha+\beta-a)$. 证毕.

引理 2. 令 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 为 $U_1=\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$上的完备分解当且仅当 $A_1^\neg,A_2^\neg,\cdots,A_B^\neg$ 为 $U_2=\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$上的完备分解.

证明. 必要性. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 为 $U_1=\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$上的完备分解，即 $\forall x\in U_1$，$\exists A_i$ 使得 $A_i(x)>0$. 现设 $\forall x\in U_2$，必有 $\alpha+\beta-x\in U_1$，从而存在 A_i使得 $A_i(\alpha+\beta-x)>0$，相应地，有 $A_i^\neg(x)=A_i(\alpha+\beta-x)>0$，所以 $A_1^\neg,A_2^\neg,\cdots,A_N^\neg$ 为 $U_2=\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$上的完备分解.

充分性. 假定 $A_1^\neg,A_2^\neg,\cdots,A_N^\neg$ 为 $U_2=\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$上的完备分解. 由性质 1 中的(2)知，$A_1=(A_1^\neg)^\neg$，$A_2=(A_2^\neg)^\neg$，$\cdots$，$A_N=(A_N^\neg)^\neg$，从而由引理 2 中的必要性的证明可知 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U_1=\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$上的完备分解. 证毕.

引理 3. 令 A 为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom. 若 A 是正规模糊集，则其对立否定集 $A^\neg$ 也是正规的，并且还有若 $A\cap A^\neg=\varnothing$，则其中介否定集 $A^\sim$ 也是正规的.

证明. 因为 A 是 $U=[\alpha,\beta]$上的正规模糊集，则存在 $x\in U$，使得 $A(x)=1$，又 $\alpha+\beta-x\in U$，从而 $A^\neg(\alpha+\beta-x)=A(\alpha+\beta-(\alpha+\beta-x))=A(x)=1$. 此外，若 $A\cap A^\neg=\varnothing$，即存在 $x_0\in U$，使得 $A(x_0)=0$ 且 $A^\neg(x_0)=0$，对上述 x_0 而言，据定义 13，14 及性质 3，有 $A^\sim(x_0)=(A^\neg\cap A^{\neg\neg})(x_0)=\min\{A^\neg(x_0),A^{\neg\neg}(x_0)\}=\min\{1,1\}=1$. 证毕.

引理 4. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U=[\alpha,\beta]$上的相容的、正规的 PTS 型的 GFScom，$A_i(x)=A_i(x;a_i,b_i,c_i,d_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

(1) 存在排列 $i_1,i_2,\cdots,i_N$使得$A_{i_1}<A_{i_2}<\cdots<A_{i_N}$；

(2) 若 $A_1<A_2<\cdots<A_N$，则 $A_N^\neg<\cdots<A_2^\neg<A_1^\neg$.

证明. (1) 若 $i\neq j$，注意到 $\ker(A_i)=[b_i,c_i]$，

$\ker(A_j)=[b_j,c_j]$，由$\{A_i\}$相容知，$\ker(A_i)\cap\ker(A_j)=\varnothing$，从而必然 $\ker(A_i)<\ker(A_j)$或者 $\ker(A_j)<\ker(A_i)$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_N$可进行排全序，即存在排列 $i_1,i_2,\cdots,i_N$使得 $A_{i_1}<A_{i_2}<\cdots<A_{i_N}$.

(2) $A_1<A_2<\cdots<A_N$，若 $i<j$，注意到 $\ker(A_i)=[b_i,c_i]<\ker(A_j)=[b_j,c_j]$，据定义 13 和定义 15，有 $\ker(A_i^{╕})=[\alpha+\beta-c_i,\alpha+\beta-b_i]$，$\ker(A_j^{╕})=[\alpha+\beta-c_j,\alpha+\beta-b_j]$，从而 $\ker(A_j^{╕})<\ker(A_i^{╕})$，进而 $A_N^{╕}<\cdots<A_2^{╕}<A_1^{╕}$. 证毕.

由引理 1、2、3 及 4，我们容易得到如下结论.

定理 3. 令 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U_1=\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$上完备的、相容的、正规的 PTS 模糊集，则 $A_1^{╕},A_2^{╕},\cdots,A_N^{╕}$ 为 $U_2=\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$上的完备的、相容的、正规的 PTS 模糊集. 进一步，若 $A_1<A_2<\cdots<A_N$，则 $A_1<A_2<\cdots<A_N<A_N^{╕}<A_2^{╕}<A_1^{╕}$.

推论 1. 令 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_N$为 $U_1=\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$上完备的、相容的、正规的三角形模糊集，则 $A_1^{╕},A_2^{╕},\cdots,A_N^{╕}$为 $U_2=\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$上的完备的、相容的、正规的三角形模糊集. 进一步，若 $A_1<A_2<\cdots<A_N$，则 $A_1<A_2<\cdots<A_N<A_N^{╕}<\cdots<A_2^{╕}<A_1^{╕}$.

定理 4. 若 A 为 $U=[\alpha,\beta]$上的 GFScom，进而 A 的对立否定集存在，则模糊子集 A，其对立否定集 $A^{╕}$和 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$在 U 上是相容的、完备的，其中 $*$ 为 t-模，n 为补算子.

证明. (1) 先证相容性. 由上文可知，A 和 $A^{╕}$是相容的. 下证 A 与 $*-n$ 中介否定集$A^{\sim}$($A^{╕}$和$A^{\sim}$)亦是相容的. 若对某一$x\in U$，有$A(x)=1$，进而$A^{╕}(x)=0$，据定义 13 知其 n 矛盾否定集 $A^{\neg}(x)=n(A(x))=n(1)=0$ 且 $A^{╕\neg}(x)=n(A^{╕}(x))=n(0)=1$，又 $A^{\sim}(x)=A^{\neg}(x)*A^{╕\neg}(x)=0*1=0$；反之，若对某一$x\in U$，有$A^{\sim}(x)=1$，即 $A^{\sim}(x)=A^{\neg}(x)*A^{╕\neg}(x)=n(A(x))*n(A^{╕}(x))=1$，因$*$为 t-模，从而 $n(A(x))=n(A^{╕}(x))=1$，进而 $A(x)=A^{╕}(x)=0$. 所以，A 与 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$是相容的.

同理可证 A 的对立否定集 $A^{╕}$和 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$在 U 上亦相容. 所以，模糊子集 A，对立否定集 $A^{╕}$和 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$在 U 上是相容的.

(2) 再证完备性. 任取一 $x_0\in U$，若 $A(x_0)=0$ 且 $A^{╕}(x_0)=0$，即据定义 13，有 $A^{\sim}(x_0)=(A^{\neg}*A^{╕\neg})(x_0)=A^{\neg}(x_0)*A^{╕\neg}(x_0)=1*1=1$. 故而，模糊子集 A，对立否定集 $A^{╕}$和 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$在 U 上是完备的. 证毕.

6.2 一阶逼近模糊系统的设计

问题. 令$g(x)$为紧集$U=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n]\subseteq R^n$上的一个函数，$g(x)$解析形式未知. 假设对于任意的$x\in U$，可以确定输入-输出数据对$(x,g(x))$，任务是设计一个逼近$g(x)$的模糊系统.

下面，逐步设计一个此类模糊系统.

(1) 在$\left[\alpha_i,\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}\right]$上定义$\left\lceil\dfrac{N_i}{2}\right\rceil$($i=1,2,\cdots,n$，$\left\lceil\dfrac{N_i}{2}\right\rceil$表示不小于$\dfrac{N_i}{2}$的最小整数)个正规的、相容的、完备的广义模糊集 $A_1^{(i)},A_2^{(i)},\cdots,A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}$. 它们具有 PTS 隶属函数 $A_1^{(i)}(x;a_i^1,b_i^1,c_i^1,d_i^1),\cdots,A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}(x;a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil})$且 $A_1^{(i)}<A_2^{(i)}<\cdots<A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}$，其中 $a_i^1=b_i^1=\alpha_i$，且在$U_i=[\alpha_i,\beta_i]$上$A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}$中的参数满足：当 N_i为奇数时 $c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}=d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}=\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}$，当 N_i为偶数时 $c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}\leq\alpha_i+\beta_i-d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}<d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}\leq\alpha_i+\beta_i-c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$.

(2) 在 $U_i=[\alpha_i,\beta_i]$上，当 N_i为偶数时，求出$(A_1^{(i)})^{╕},(A_2^{(i)})^{╕},\cdots,(A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)})^{╕}$；当 N_i为奇数时，计算出$(A_1^{(i)})^{╕},(A_2^{(i)})^{╕},\cdots,(A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil-1}^{(i)})^{╕}$，并且对于任意 $x\in U_i$，令 $A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)\prime}(x)=A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}(\alpha_i+\beta_i-x)$. 具体为，当 N_i为偶数时令 $A_{N_i}^{(i)}(x;a_i^{N_i},b_i^{N_i},c_i^{N_i},d_i^{N_i})=(A_1^{(i)})^{╕}$，$A_{N_i-1}^{(i)}(x;a_i^{N_i-1},b_i^{N_i-1},c_i^{N_i-1},d_i^{N_i-1})=(A_2^{(i)})^{╕}$，$\cdots$，$A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}^{(i)}(x;a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1},b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1},c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1},d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1})=(A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)})^{╕}$，其中 $a_i^{N_i}=\alpha_i+\beta_i-d_i^1$，$b_i^{N_i}=\alpha_i+\beta_i-c_i^1$，$c_i^{N_i}=\alpha_i+\beta_i-b_i^1$，$d_i^{N_i}=\alpha_i+\beta_i-a_i^1$；$\cdots$；$a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}=\alpha_i+\beta_i-d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$，$b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}=\alpha_i+\beta_i-c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$，$c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}=\alpha_i+\beta_i-b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$，$d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}=\alpha_i+\beta_i-a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$；当 N_i为奇数时 $A_{N_i}^{(i)},A_{N_i-1}^{(i)},\cdots,A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil+1}^{(i)}$与偶数时定义相同，并令 $A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}\cup A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)\prime}$作为新的第$\left\lceil\dfrac{N_i}{2}\right\rceil$个模糊集，其中$\cup$为取大运算，为方便计，仍用符号 $A_{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}^{(i)}(x;a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},c_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil},d_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil})$表示，即 $a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}=a_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$，$b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}=b_i^{\lceil\frac{N_i}{2}\rceil}$，

$c_i^{\lceil \frac{N_i}{2} \rceil}=\alpha_i+\beta_i-b_i^{\lceil \frac{N_i}{2} \rceil}$，$d_i^{\lceil \frac{N_i}{2} \rceil}=\alpha_i+\beta_i-a_i^{\lceil \frac{N_i}{2} \rceil}$. 由定理 3 知，$A_1^{(i)},A_2^{(i)},\cdots,A_{N_i}^{(i)}$ 为 $U_i=[\alpha_i,\beta_i]$ 上的 N_i 个正规的、相容的、完备的广义模糊集且 $A_1^{(i)}<A_2^{(i)}<\cdots<A_{N_i}^{(i)}$.

(3) 定义 $e_j^1=\alpha_j$，$e_j^{N_j}=\beta_j$，$e_j^{i_j}=\frac{1}{2}(b_j^{i_j}+c_j^{i_j})$，$i_j=2,\cdots,N_j-1$，$j=1,2,\cdots,n$.

(4) 以如下形式组建 $m=N_1\times N_2\times\cdots\times N_n=\prod_{i=1}^{n}N_i$ 条 IF-THEN 规则：

$R_{i_1i_2\cdots i_n}$：IF x_1 is $A_{i_1}^{(1)}$ and $\cdots$ and x_n is $A_{i_n}^{(n)}$，THEN y is $C_{i_1\cdots i_n}$，

其中 $i_1=1,2,\cdots,N_1$；$\cdots$；$i_n=1,2,\cdots,N_n$，将模糊集 $C_{i_1i_2\cdots i_n}$ 的中心(用 $\bar{y}_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示)选择为

$$\bar{y}_{i_1i_2\cdots i_n}=g(e_1^{i_1},e_2^{i_2},\cdots,e_n^{i_n}) \tag{1}$$

(5) 采用单点模糊器[21-23]，中心平均解模糊器[21-23]，乘机推理法[21-23]，即 and 取代数积算子，蕴涵算子为 Mamdani 积型蕴涵算子(即 $a\to b=ab$，$\forall a,b\in[0,1]$)，则根据(4)中的 $\prod_{i=1}^{n}N_i$ 条规则构造的模糊系统 $f(x)$ 的分析表达式为

$$y=f(x)=\frac{\sum_{i_n=1}^{N_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{N_1}A_{i_1i_2\cdots i_n}(x)\bar{y}_{i_1i_2\cdots i_n}}{\sum_{i_n=1}^{N_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{N_1}A_{i_1i_2\cdots i_n}(x)}=\sum_{i_n=1}^{N_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{N_1}B_{i_1i_2\cdots i_n}(x)\bar{y}_{i_1i_2\cdots i_n} \tag{2}$$

其中分明输入为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U$，

$A_{i_1i_2\cdots i_n}(x)=A_{i_1}^{(1)}(x_1)A_{i_2}^{(2)}(x_2)\cdots A_{i_n}^{(n)}(x_n)$，

$$B_{i_1i_2\cdots i_n}(x)=\frac{A_{i_1i_2\cdots i_n}(x)}{\sum_{i_n=1}^{N_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{N_1}A_{i_1i_2\cdots i_n}(x)}=\frac{A_{i_1}^{(1)}(x_1)A_{i_2}^{(2)}(x_2)\cdots A_{i_n}^{(n)}(x_n)}{\sum_{i_n=1}^{N_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{N_1}A_{i_1}^{(1)}(x_1)A_{i_2}^{(2)}(x_2)\cdots A_{i_n}^{(n)}(x_n)}.$$

由于广义模糊集 $A_1^{(i)},A_2^{(i)},\cdots,A_{N_i}^{(i)}$ 是完备的，在每个 $x\in U$ 处都存在 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，使得 $A_{i_1}^{(1)}(x_1)A_{i_2}^{(2)}(x_2)\cdots A_{i_n}^{(n)}(x_n)\neq 0$，故而模糊系统(2)是良定义的，即其分母总是非零的.

上述设计方法中仅仅考虑了在 $\left[\alpha_i,\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\right]$ 上的隶属函数分布情况，若我们能在 $\left[\frac{\alpha_i+\beta_i}{2},\beta_i\right]$ 上找到适当的隶属函数分布情况，则据 GFScom 的定义，亦可做类似处理，继而得到一模糊系统.

6.3　二阶逼近模糊系统的设计

要设计的模糊系统与 6.2 节相同. 下面给出基于广义模糊集的具有二阶逼近精度的模糊系统的设计方法.

(1) 在 $\left[\alpha_j,\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}\right]$ 上定义 $\left\lceil\frac{N_j}{2}\right\rceil$($j=1,2,\cdots,n$；$\left\lceil\frac{N_j}{2}\right\rceil$ 表示不小于 $\frac{N_j}{2}$ 的最小整数)个广义模糊集 $A_1^{(j)}$，$A_2^{(j)},\cdots,A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)}$. 这些模糊集均为正规的、相容的和完备的广义模糊集，其三角形隶属函数为 $A_{i_j}^{(j)}(x_j)=\Delta_{i_j}^{(j)}(x_j;e_{i_j-1}^j,e_{i_j}^j,e_{i_j+1}^j)$($i_j=1,2,\cdots,\left\lceil\frac{N_j}{2}\right\rceil$)，其中 $e_0^j=e_1^j=\alpha_j$，$e_1^j<e_2^j<\cdots<e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j\le e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j$ 且当 N_j 为奇数时 $e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j=e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$，当 N_j 为偶数时 $e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j<\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$ 且 $e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j+e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j=\alpha_j+\beta_j$.

(2) 在 $U_j=[\alpha_j,\beta_j]$ 上，当 N_j 为偶数时求出 $(A_1^{(j)})^{\neg},(A_2^{(j)})^{\neg},\cdots,(A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)})^{\neg}$；当 N_j 为奇数时，计算出 $(A_1^{(j)})^{\neg},(A_2^{(j)})^{\neg},\cdots,(A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^{(j)})^{\neg}$，并且对于任意 $x\in U_j$，令 $A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)\prime}(x)=A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)}(\alpha_j+\beta_j-x)$. 具体地说，对于 $j=1,2,\cdots,n$，当 N_j 为偶数时令 $A_{N_j}^{(j)}(x_j)=\Delta_{N_j}^{(j)}(x_j;e_{N_j-1}^j,e_{N_j}^j,e_{N_j+1}^j)=(A_1^{(j)})^{\neg}$，$A_{N_j-1}^{(j)}(x_j)=\Delta_{N_j-1}^{(j)}(x_j;e_{N_j-2}^j,e_{N_j-1}^j,e_{N_j}^j)=(A_2^{(j)})^{\neg}$，$\cdots$，$A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^{(j)}(x_j)=\Delta_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^{(j)}(x_j;e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j,e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j,e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+2}^j)=(A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)})^{\neg}$，其中 $e_{N_j}^j=e_{N_j+1}^j=\beta_j$，$e_{N_j-1}^j=\alpha_j+\beta_j-e_2^j$；$e_{N_j-2}^j=\alpha_j+\beta_j-e_3^j$，$e_{N_j-1}^j=\alpha_j+\beta_j-e_2^j$，$e_{N_j}^j=\alpha_j+\beta_j-e_1^j=\beta_j$；$\cdots$；$e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j=e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j$，$e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j=e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j$，$e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+2}^j=\alpha_j+\beta_j-e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^j$；当 N_j 为奇数时 $A_{N_j}^{(j)}$，$A_{N_j-1}^{(j)},\cdots,A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^{(j)}$ 与偶数时定义相同，并令 $A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)}\cup A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)\prime}$ 作为新的第 $\left\lceil\frac{N_j}{2}\right\rceil$ 个模糊集，其中 $\cup$ 为取大运算，为方便计，仍用符号 $A_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)}(x_j)=\Delta_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^{(j)}(x_j;e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^j,e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j,e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j)$ 表示，即 $e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^j=e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^j$，$e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil}^j=\frac{\alpha_j+\beta_j}{2}$，$e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil+1}^j=\alpha_j+\beta_j-e_{\lceil \frac{N_j}{2}\rceil-1}^j$.

(3)和(4)分别与 6.2 节中的(4)和(5)相同,即所构造的模糊系统由式(2)给出,其中 $\bar{y}_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 由式(1)给定.

与传统的模糊系统设计方法相比(具体可参见文献[21-22]及其中的参考文献),本文所提出的基于 GFScom 的模糊系统的设计方法最主要优势在于:传统的模糊系统设计方法需要知道每一个模糊集的隶属函数,亦即需要在整个论域 U 上找到所有模糊子集的隶属函数分布情况. 如前所述,在一个具体的论域中寻找到一个模糊集的隶属函数是一件非常困难的事. 而本文所提出的模糊系统的设计方法,只需要建立一部分模糊子集的隶属函数,而后即可计算出其他隶属函数的分布情况,并且其所设计的模糊系统仍然具有逼近性能(具体分析见下文).

当所设计的模糊系统逼近精度要求不是很高的情况下,只要在论域 U 上找到广义模糊子集 A 的隶属函数分布情况,由定理 4 可知,模糊子集 A,其对立否定集 $A^{\neg}$ 和 $*-n$ 中介否定集 $A^{\sim}$ 就是 U 上相容的、完备的模糊集,进而就可以对所要逼近的函数 $g(x)$ 进行粗糙地逼近. 但传统的模糊系统的设计方法,在仅仅知道模糊子集 A 的隶属函数的情况下,则无法实现这一点.

7 基于 GFScom 设计的模糊系统的逼近精度

7.1 模糊系统的一阶逼近精度

以下讨论模糊系统(2)的逼近特性. 假设 $g(x)$ 为定义在 $U=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n]\subseteq R^n$ 上的被逼近函数,而 $f(x)$ 为由式(2)给出的模糊系统.

令 g 在 U 上的无穷范数为 $\|g\|_\infty=\sup_{x\in U}|g(x)|$,并分别令

$$\omega(g,h,U)=\sup\{|g(x)-g(y)|\,|\,|x_i-y_i|\le h_i,\ i=1,2,\cdots,n\},$$

$$U_{i_1 i_2\cdots i_n}=[e_1^{i_1},e_1^{i_1+1}]\times\cdots\times[e_n^{i_n},e_n^{i_n+1}],$$

其中 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)(h_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n)$,$e_j^1=\alpha_j$,$e_j^{N_j}=\beta_j$,$e_j^{i_j}=\dfrac{1}{2}(b_j^{i_j}+c_j^{i_j})$,$i_j=2,\cdots,N_j-1$;$j=1,2,\cdots,n$.

定理 5. 令 $f(x)$ 为由式(2)给出的模糊系统,$g(x)$ 为式(1)中的未知函数,则有

$$\max\{|g(x)-f(x)|\,|\,x\in U_{i_1 i_2\cdots i_n}\}\le\omega(g,h_{i_1 i_2\cdots i_n},U_{i_1 i_2\cdots i_n}),\ i_1 i_2\cdots i_n\in\hat{I} \tag{3}$$

$$\|g-f\|_\infty\le\omega(g,h,U) \tag{4}$$

其中 $\hat{I}=\{i_1 i_2\cdots i_n\,|\,i_j=1,2,\cdots,N_j-1;j=1,2,\cdots,n\}$,$h_{i_1 i_2\cdots i_n}=(h_{i_1}^1,h_{i_2}^2,\cdots,h_{i_n}^n)$,$h_{i_j}^j=e_j^{i_j+1}-e_j^{i_j}$,$h=(h_1,h_1\cdots,h_n)$,而 $h_j=\max\{h_{i_j}^j\,|\,i_j=1,2,\cdots,N_j-1\}$.

若 g 在 U 上连续可微,则

$$\|g-f\|_\infty\le\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty h_j\le h\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty \tag{5}$$

其中 $h=\max\{h_j\,|\,j=1,2,\cdots,n\}$.

证明. 首先容易验证下列结论成立:

(1) $U=\bigcup_{i_1 i_2\cdots i_n\in\hat{I}}U_{i_1 i_2\cdots i_n}$,其中 $\hat{I}=\{i_1 i_2\cdots i_n\,|\,i_j=1,2,\cdots,N_j-1;j=1,2,\cdots,n\}$;

(2) $\forall x\in U_{i_1 i_2\cdots i_n}$,$f(x)=$

$$\sum_{k_1 k_2\cdots k_n\in I_{2^n}}B_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}(x)\bar{y}_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n} \tag{6}$$

其中 $I_{2^n}=\{k_1k_2\cdots k_n\,|\,k_j=0,1;j=1,2,\cdots,n\}$. 注意到 $\sum_{k_1 k_2\cdots k_n\in I_{2^n}}B_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}(x)=1$ 及式(6),则

$$\forall x\in U_{i_1 i_2\cdots i_n}\ (i_1 i_2\cdots i_n\in\hat{I}),\ |g(x)-f(x)|\le\sum_{k_1 k_2\cdots k_n\in I_{2^n}}B_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}(x)|g(x)-\bar{y}_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}|\le\max\{|g(x)-\bar{y}_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}|\,|k_1\cdots k_n\in I_{2^n}\} \tag{7}$$

注意到 $\bar{y}_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}=g(e_1^{i_1+k_1},\cdots,e_n^{i_n+k_n})$ 以及 $(e_1^{i_1+k_1},\cdots,e_n^{i_n+k_n})\in U_{i_1\cdots i_n}$ $(k_1,\cdots,k_n\in I_{2^n})$,因此 $|x_j-e_j^{i_j+k_j}|\le(e_j^{i_j+1}-e_j^{i_j})(k_j=0,1;j=1,2,\cdots,n)$ 从而 $\forall x\in U_{i_1\cdots i_n}$,

$$|g(x)-\bar{y}_{i_1+k_1,\cdots,i_n+k_n}|\le\omega(g,h_{i_1\cdots i_n},U_{i_1\cdots i_n})\quad(k_1\cdots k_n\in I_{2^n}) \tag{8}$$

由式(7)及(8)则证得式(3)及(4).

另外,若 g 连续可微,则由多元函数的中值定理,有 $\omega(g,h,U)=\sup\{|g(x)-g(y)|\,\big|\,|x_j-y_j|\le h_j;j=1,2,\cdots,n\}\le\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty h_j\le h\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty$,即式(5)成立. 证毕.

因为 U 为紧集及 g 为 U 上的连续函数,从而 g 在 U 上一致连续. 这说明,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,只要 $\|h\|<\delta$,就有 $\omega(g,h,U)<\varepsilon$,从而定理 5 对应的模糊系统具有逼近性能,而且式(5)给出了该逼近器的一阶逼近精度分析.

由式(5)以及 h 的定义可以看出,通过对每个 x_i 定义更多的广义模糊集可以得到更为精确的逼近. 进而这一结论直观地说明了:模糊规则越多,所

产生的模糊系统越有效. 另外，由式(5)还可以进一步看出，为了设计一个具有预定精度的模糊系统，必须知道连续可微函数 $g(x)$ 关于 x_i 的导数边界，即 $\left\|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\|_\infty$. 同时，在设计过程中，还必须知道 $g(x)$ 在 $x=(e_1^{i_1},e_2^{i_2},\cdots,e_n^{i_n})(i_1=1,2,\cdots,N_1;\cdots;i_n=1,2,\cdots,N_n)$ 处的值.

由定理 5 的证明可以看出，将 $A_{i_1}^{(1)}(x_1)A_{i_2}^{(2)}(x_2)\cdots A_{i_n}^{(n)}(x_n)$ 变为 $\min\{A_{i_1}^{(1)}(x_1),\cdots,A_{i_n}^{(n)}(x_n)\}$ 后，其证明仍然是成立的. 所以在模糊系统的设计中使用最小推理法，即 and 取 min 算子，蕴涵算子为 Mamdani 取小型蕴涵算子(即 $a\to b=a\wedge b=\min\{a,b\}$，$\forall a,b\in[0,1]$)，其他部分保持不变，则所设计的模糊系统仍具有定理 5 中的逼近性质.

7.2　模糊系统的二阶逼近精度

定理 6.　设 $f(x)$ 为 6.3 节所设计的模糊系统，即广义模糊集 $A_{i_j}^j$ 为三角形隶属函数 $A_{i_j}^j(x_j)=\Delta_{i_j}^j(x_j;e_{i_j-1}^j,e_{i_j}^j,e_{i_j+1}^j)(i_j=1,2,\cdots,N_j;j=1,2,\cdots,n)$，其中 $e_0^j=e_1^j=\alpha_j$，$e_{N_j}^j=e_{N_j+1}^j=\beta_j$ 且 $e_1^j<e_2^j<\cdots<e_{N_j}^j$，采用单点模糊器，中心平均解模糊器以及乘积推理法，则

(1) $\forall x\in U, f(x)=\sum\limits_{i_1\cdots i_n\in I}\left[\prod\limits_{j=1}^n A_{i_j}^j(x_j)\right]\bar{y}_{i_1\cdots i_n}$　(9)

(2) 若 g 在 U 上连续可微，则

$$\|g-f\|_\infty\le\sum_{j=1}^n\frac{1}{2}h_j\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty\le\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right\|_\infty \tag{10}$$

(3) 若 g 在 U 上二阶连续可微，则

$$\|g-f\|_\infty\le\frac{1}{8}\sum_{j=1}^n(h_j)^2\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}\right\|_\infty\le\frac{1}{8}h^2\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}\right\|_\infty \tag{11}$$

其中 $I=\{i_1i_2\cdots i_n\,|\,i_j=1,2,\cdots,N_j;j=1,2,\cdots,n\}$，$h_{i_j}^j=e_{i_j+1}^j-e_{i_j}^j$，$h_j=\max\{h_{i_j}^j\,|\,i_j=1,2,\cdots,N_j-1\}$，$h=\max\{h_j\,|\,j=1,2,\cdots,n\}$.

证明.　(1) 由推论 1 知，$A_1^j,A_2^j,\cdots,A_{N_j}^j$ 为 $U_j=[\alpha_j,\beta_j]$ 上的 N_j 个正规的、相容的、完备的广义模糊集且 $A_1^j<A_2^j<\cdots<A_2^j$，又 $A_{i_j}^j$ 为三角形隶属函数，所以 $\sum\limits_{i_j=1}^{N_j}A_{i_j}^j(x_j)=1$，$\forall x_j\in[\alpha_j,\beta_j]$，由此则易得 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n\in I}\prod\limits_{j=1}^n A_{i_j}^j(x_j)=1$，从而 $B_{i_1\cdots i_n}(x)=\prod\limits_{j=1}^n A_{i_j}^j(x_j)$，由式(2)即得(9).

(2) 与(3)由推论 1 和文献[23]中定理 2 得到.

证毕.

8　应用示例

下面给出两个应用示例.

例 7.　令 $g(x)=\sin x$，$U=[-3,3]$，令 $\varepsilon=0.2$ 或 $\varepsilon=0.1$. 下面基于 GFScom 设计模糊系统 $f(x)$ 使得 $\sup_{x\in U}|g(x)-f(x)|<\varepsilon$.

因为 $\left\|\frac{d^2g}{dx^2}\right\|_\infty=1$，由定理 6，要使 $\frac{1}{8}\left\|\frac{d^2g}{dx^2}\right\|_\infty h^2<\varepsilon=0.2$，只需取 $h=1$，这时 $\|g-f\|_\infty\le\frac{1}{8}<\varepsilon=0.2$. 故而我们可用 $(3-(-3))/h+1=7$ 个广义模糊集去逼近 $g(x)$. 据 6.3 节设计步骤，首先，我们可先在 $[-3,0]$ 上定义 $\left\lceil\frac{7}{2}\right\rceil=4$ 个广义模糊集 $A_j(j=1,2,3,4)$ 满足

$$A_j=\Delta_j(x;e_{j-1},e_j,e_{j+1})=\begin{cases}I_j(x), & x\in[e_{j-1},e_j)\\ 1, & x=e_j\\ D_j(x), & x\in(e_j,e_{j+1}]\\ 0, & x\in[-3,3]-[e_{j-1},e_{j+1}]\end{cases},$$

其中 $I_j(x)=\frac{x-e_{j-1}}{e_j-e_{j-1}}$，$D_j(x)=\frac{x-e_{j+1}}{e_j-e_{j+1}}$，$e_j=-3+(j-1)h=-3+(j-1)$，$e_0=e_1=-3$，$e_4=e_5=0$.

其次，在 $[-3,3]$ 上求出 $A_j(j=1,2,3)$ 的对立否定集 $(A_j)^\neg$，令 $A_4'(x)=A_4(-x)$，其中 $x\in U=[-3,3]$，据定义 13 有

$$(A_j)^\neg=\Delta_j^\neg(x;-e_{j+1},-e_j,-e_{j-1})=\begin{cases}D_j(-x), & x\in[-e_{j+1},-e_j)\\ 1, & x=-e_j\\ I_j(-x), & x\in[-e_j,-e_{j-1})\\ 0, & x\in[-3,3]-[-e_{j+1},-e_{j-1}]\end{cases},$$

并记 $A_7=(A_1)^\neg$，$A_6=(A_2)^\neg$，$A_5=(A_3)^\neg$，令 $A_4\cup A_4'$ 为第 4 个模糊集，仍记为 A_4.

最后，模糊规则形式为

R_j: IF x is A_j，THEN $y=y_j(j=1,2,\cdots,7)$，

其中 $y_j=g(e_j)$，$e_j=-3+(j-1)h=-3+(j-1)$，$e_0=e_1=-3$，$e_7=e_8=3$. 从而对应模糊系统表达式为

$$f(x)=\sum_{j=1}^7 A_j(x)\sin(e_j).$$

类似地，$\varepsilon=0.1$，只需取 $h=0.75$，这时 $\|g-f\|_\infty\le0.09375<\varepsilon=0.1$. 故我们可用 $(3-(-3))/h+1=6/0.75+1=9$ 个广义模糊集去逼近 $g(x)$. 据 6.3 节设计步骤，可构造出如下模糊系统

R_j: IF x is B_j，THEN $y=y_j(j=1,2,\cdots,9)$，

其中$y_j=g(e_j)$，$e_j=-3+(j-1)h=-3+0.75(j-1)$，$e_0=e_1=-3$，$e_9=e_{10}=3$. 对应模糊系统表达式为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{9}B_j(x)\sin(e_j),$$

其中 $B_j=\Delta_j(x;e_{j-1},e_j,e_{j+1})$为三角形隶属函数.

例 7 中所构造的模糊系统 $y=f(x)$与所要逼近的函数 $g=\sin(x)$在 $U=[-3,3]$上的图形对比如图 2 所示. 可以看出，只要给定逼近精度，本文所构造的模糊系统就能以该精度逼近函数 $g=\sin(x)$.

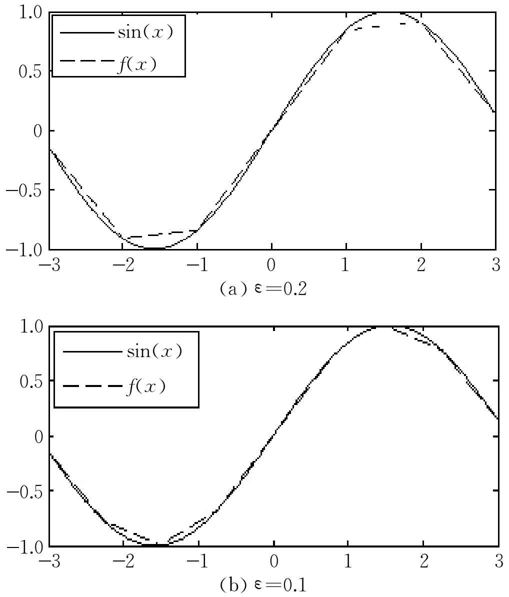

图 2 ε=0.2 和 ε=0.1 时系统函数 $y=f(x)$与原始函数 $g=\sin(x)$的比较

下面，进一步对 FScom、IFScom 以及 GFScom 的性能进行比较.

令 $g(x)=\sin(x)$（未知），$U=[-1,1]$，并且已知可用 3 个分别表示为“小”、“中”、“大”的模糊集去粗略逼近 $g(x)$. 若已知要设计的系统中其中一个表示模糊集 A=“小”的隶属函数为

$$A(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x\le 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

显然，A 的对立否定集 $A^{\neg}$=“大”，中介否定集 $A^{\sim}$=“中”. 下面分别基于 FScom、IFScom 及 GFScom 去设计这样的模糊系统.

因在 FScom 或 IFScom 中，需要首先确定参数 λ 的值，这里不妨取为 $\lambda=0.8$，进而可分别在 FScom 或 IFScom 中求出所对应的 $A^{\neg}$=“大”与 $A^{\sim}$=“中”的隶属函数.

分别基于 FScom、IFScom 及 GFScom 所设计的模糊系统对应的形式表达式为

$$f(x)=A(x)\sin(e_1)+A^{\sim}(x)\sin(e_2)+A^{\neg}(x)\sin(e_3),$$

其中 $A^{\neg}$，$A^{\sim}$ 是分别基于 FScom、IFScom 及 GFScom 所求出的隶属函数，$e_1=-1$，$e_2=0$，$e_3=1$. 具体的图形对比如图 3 所示，其中实线代表要逼近函数 $g=\sin(x)$，虚线、点线和星线分别表示基于 GFScom、FScom 及 IFScom 所构造的系统函数. 可以看出，基于 GFScom 所构造的系统对 $g=\sin(x)$的逼近效果明显优于分别基于 FScom 及 IFScom 所构造的系统.

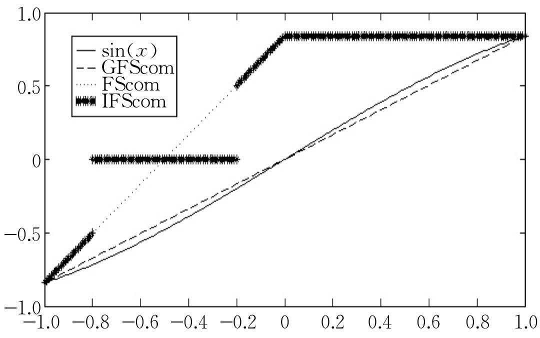

图 3 分别基于 GFScom、FScom 及 IFScom 所设计系统的对比

例 8. 某燃油锅炉供油阀门的开关程度和锅炉中水温相关，根据操作经验总结出一条模糊规则：“若水温高，则阀门关闭程度大”. 设水温 a 的论域 W 和阀门关闭程度 b 的论域 P 都分 5 档：$W=P=\{1,2,3,4,5\}$. 现在已知：

Fuzzy 集合 $A(a)$代表水温“高”，$A(a)=\frac{0.1}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.9}{5}$；

Fuzzy 集合 $B(b)$代表阀门关闭程度“大”，$B(b)=\frac{0.2}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1.0}{5}$.

问题：

(1) 若现在水温“低”，则阀门关闭程度如何？

(2) 若水温“适中”，则阀门关闭程度如何？

根据 GFScom 的定义，我们首先要对水温 a 的论域 W 和阀门关闭程度 b 的论域 P 进行转换，得到相应的有限数值集 W'和 P'. 因论域 W 和论域 P 本身就是有限数值化集，为方便计，有限数值化映射 f 为恒等映射，即 $W'=W$，$P'=P$.

这里还有一个问题，就是模糊规则“若水温高，则阀门关闭程度大”（表示为 $A(a)\rightarrow B(b)$）的 Fuzzy 蕴涵关系 $R(a,b)$如何求解？由于在模糊控制中最常用的蕴涵算子是 Mamdani 取小蕴涵. 首先将 Fuzzy 集合 $A(a)$和 $B(b)$写成向量形式为

$$A(a)=(0\quad 0.1\quad 0.4\quad 0.5\quad 0.9),$$

$$B(b)=(0\quad 0\quad 0.2\quad 0.5\quad 1.0),$$

于是所求模糊蕴涵关系为

$$R(a,b)=A(a)^{\mathrm{T}}\circ B(b)$$
$$=\begin{bmatrix}0\\0.1\\0.4\\0.5\\0.9\end{bmatrix}\circ(0\quad 0\quad 0.2\quad 0.5\quad 1.0)$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.1&0.1&0.1\\0&0&0.2&0.4&0.4\\0&0&0.2&0.5&0.5\\0&0&0.2&0.5&0.9\end{bmatrix},$$

其中∘为 sup-min 合成，下同.

(1) 水温“低”可看作水温“高”的对立否定集，据 GFScom 的定义，可得 Fuzzy 集水温“低”为

$$A^{\dashv}(a)=A(6-a)=\frac{0.9}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.1}{4},$$

写成向量的形式为 $A^{\dashv}(a)=(0.9\quad 0.5\quad 0.4\quad 0.1\quad 0)$，根据模糊推理的 CRI 合成算法[29]，我们可得

$$B_1(b)=A^{\dashv}(a)\circ R(a,b)$$
$$=(0.9\quad 0.5\quad 0.4\quad 0.1\quad 0)\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.1&0.1&0.1\\0&0&0.2&0.4&0.4\\0&0&0.2&0.5&0.5\\0&0&0.2&0.5&0.9\end{bmatrix}$$
$$=[0\quad 0\quad 0.2\quad 0.4\quad 0.4].$$

即此时阀门关闭的程度为 $B_1(b)=\frac{0.2}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.4}{5}$.

(2) 水温“适中”是水温“高”和“低”的中介否定集，根据 GFScom 的定义，要先分别求出水温“不高”$A^{\neg}(a)$和“不低”$A^{\dashv\neg}(a)$的隶属函数，于是有

$$A^{\neg}(a)=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.1}{5},$$
$$A^{\dashv\neg}(a)=\frac{0.1}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}.$$

从而 $A^{\sim}(a)=\frac{0.1}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.1}{5}$，写成向量形式为 $A^{\sim}(a)=(0.1\quad 0.5\quad 0.6\quad 0.5\quad 0.1)$，根据模糊推理的 CRI 合成算法，于是有

$$B_2(b)=A^{\sim}(a)\circ R(a,b)$$
$$=(0.1\quad 0.5\quad 0.6\quad 0.5\quad 0.1)\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.1&0.1&0.1\\0&0&0.2&0.4&0.4\\0&0&0.2&0.5&0.5\\0&0&0.2&0.5&0.9\end{bmatrix}$$
$$=[0\quad 0\quad 0.2\quad 0.5\quad 0.5].$$

即此时阀门关闭的程度 $B_2(b)=\frac{0.2}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.5}{5}$，可见比水温高时阀门关闭得要小，比水温低时阀门关闭得要大.

从上面的例 8 可以看出，本文给出的模糊性知识及其 3 种否定算子是合理有效的. 但在传统的模糊控制中，我们只能推出“若水温不高，则阀门关闭程度如何?”，因为在经典的模糊控制中只有一种“否定”，即“矛盾否定”. 这也进一步说明，在模糊系统中考虑区分不同的否定，至少可以带来如下益处：

(1) 符合哲学上对否定的认识；

(2) 丰富模糊系统的推理功能.

9 总 结

本文主要做了以下几个方面的工作：

(1) 针对潘正华等人提出的在模糊知识中否定知识应该明确地分为矛盾否定、对立否定和中介否定的相关思想，本文进一步研究得到了 3 种否定关系的本质特征.

(2) 语言变量是 Zadeh 提出的一个基本概念. 为了能使语言变量也能应用到一般的论域中，我们给出了(一维)有限数值化映射，它可以把任意论域映射为一有限数值集，进而可以在语言变量中考虑 3 种不同的否定，得到带有 3 种否定的语言变量 LVcom.

(3) 通过分析及实例计算后发现，FScom(IFScom)对 3 种否定的定义存在着不足. 为此，本文提出了广义模糊集 GFScom，它实际上可视为对 FScom 及 IFScom 的进一步改进，并研究了它的基本运算及相关性质.

(4) 从哲学上看，并不是所有的模糊概念都有其对立否定概念，我们从集合的角度对任意一模糊概念的对立否定概念的存在情况进行了严格的论述，得到了一些初步的结果.

(5) 给出了基于 GFScom 的模糊系统的设计方法，并研究了其逼近特性，得到了所设计的系统也是一种万能逼近器.

然而，需指出，这些都是一些初步的结果. 在今后的研究中可以从以下几个方面展开研究：

(1) 正如前面指出，本文所设计的模糊系统是对于任意 $x\in U$ 可以确定相应的要逼近函数 $g(x)$ 的值，而如何基于广义模糊集在仅知道有限数量的

输入-输出数据对的情形下设计模糊系统是下一步需要做的工作.

(2) 本文所构造的模糊系统,其蕴涵算子为Mamdani型蕴涵算子(即代数积算子和取小算子),而对于布尔型蕴涵算子(具体见文献[21,24-25]),如R-蕴涵算子、S-蕴涵算子及QL-蕴涵算子,其是否也是一种万能逼近器?

(3) 文献[30]给出了基于GFScom的模糊综合评判方法,它是一种完全基于计算的模糊综合评判方法,客观性较强.下一步,可以深入开展GFScom在模糊决策、常识推理等其他方面的应用研究.

致 谢 审稿人对本文提出了建设性意见,在此表示感谢!

参 考 文 献

[1] Zhu Wu-Jia, Xiao Xi-An. The Essentials of Mathematics. Nanjing: Nanjing University Press, 1996(in Chinese)
(朱梧槚, 肖奚安. 数学基础概论. 南京: 南京大学出版社, 1996)

[2] Wagner G. Web rules need two kinds of negation//Bry F, Henze N, Maluszynski J eds. Principles and Practice of Semantic Web Reasoning. LNCS 2901. Heidelberg: Springer Verlag, 2003: 33-50

[3] Analyti A, Antoniou G, Damásio C, Wagner G. Extended RDF as a semantic foundation of rule markup languages. Journal of Artificial Intelligence Research, 2008, 32(1): 37-94

[4] Esteva F, Godo L, Hájek P, Navara M. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. Archive Mathematical Logic, 2000, 39(2): 103-124

[5] Cintula P, Klement E P, Mesiar R, Navara M. Fuzzy logics with an additional involutive negation. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(3): 390-411

[6] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

[7] Ferré S. Negation, opposition, and possibility in logical concept analysis//Ganter B, Kwuida L eds. Formal Concept Analysis. LNCS 3874. Heidelberg: Springer Verlag, 2006: 130-145

[8] Kaneiwa K. Description logics with contraries, contradictories, and subcontraries. New Generation Computing, 2007, 25(4): 443-468

[9] Pan Zheng-Hua. One logical description of different negative relations in knowledge. Progress in Natural Science, 2008, 18(12): 1491-1499(in Chinese)
(潘正华. 知识中不同否定关系的一种逻辑描述. 自然科学进展, 2008, 18(12): 1491-1499)

[10] Pan Zheng-Hua. Three kinds of fuzzy knowledge and their base of set. Chinese Journal of Computers, 2012, 35(7): 1421-1428(in Chinese)
(潘正华. 模糊知识的3种否定及其集合基础. 计算机学报, 2012, 35(7): 1421-1428)

[11] Zhang Sheng-Li, Pan Zheng-Hua. An improved set description of negative knowledge processing in fuzzy knowledge. Journal of Shangdong University(Natural Science), 2011, 46(5): 103-109(in Chinese)
(张胜礼, 潘正华. 模糊知识中否定知识处理的一种改进的集合描述. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(5): 103-109)

[12] Pan Zheng-Hua. Three kinds of negation of fuzzy knowledge and their base of logic//Huang D S, Jo K H, Zhou Y Q, Han K eds. Intelligent Computing Theories and Technology. LNCS 7996. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2013: 83-93

[13] Zhang Sheng-Li. Formal deductive system of fuzzy propositional logic with different negations. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2014, 8(4): 494-505(in Chinese)
(张胜礼. 带有不同否定的模糊命题逻辑的形式演绎系统. 计算机科学与探索, 2014, 8(4): 494-505)

[14] Hong Long, Xiao Xi-An, Zhu Wu-Jia. Measure of medium truth scale and its applications (Ⅰ). Chinese Journal of Computers, 2006, 29(12): 2186-2194(in Chinese)
(洪龙, 肖奚安, 朱梧槚. 中介真值程度的度量及其应用(Ⅰ). 计算机学报, 2006, 29(12): 2186-2194)

[15] Hong Long, Xiao Xi-An, Zhu Wu-Jia. Measure of medium truth scale and its applications (Ⅱ). Chinese Journal of Computers, 2007, 30(9): 1551-1558(in Chinese)
(洪龙, 肖奚安, 朱梧槚. 中介真值程度的度量及其应用(Ⅱ). 计算机学报, 2007, 30(9): 1551-1558)

[16] Zhang Sheng-Li. Fuzzy reasoning with contradictory, opposite and medium negation. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2014, 27(7): 599-610(in Chinese)
(张胜礼. 带有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊推理. 模式识别与人工智能, 2014, 27(7): 599-610)

[17] Pradera A, Beliakov G, Bustince H. Aggregation functions and contradictory information. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 191: 41-61

[18] Bustince H, Madrid N, Aciego M O. The notion of weak-contradiction: Definition and measures. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(4): 1057-1069

[19] Speranza J L, Horn L R. A brief history of negation. Journal of Applied Logic, 2010, 8(3): 277-301

[20] Murinová P, Novák V. Analysis of generalized square of opposition with intermediate quantifiers. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 242: 89-113

[21] Li Yong-Ming. Analysis of Fuzzy Systems. Beijing: Science Press, 2005(in Chinese)

(李永明. 模糊系统分析. 北京：科学出版社，2005)

[22] Wang Li-Xin. A Course in Fuzzy Systems and Control. Englewood Cliff, NJ, USA: Prentice Hall, 1997

[23] Zeng Xiao-Jun, Singh M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(1): 44-63

[24] Li Yong-Ming, Shi Zhong-Ke, Li Zhi-Hui. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications—SISO cases. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(2): 147-157

[25] Li Yong-Ming, Shi Zhong-Ke, Li Zhi-Hui. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications—MIMO cases. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(2): 159-174

[26] Long Zu-Qiang, Liang Xi-Ming, Yang Li-Rong. Some approximation properties of adaptive fuzzy systems with variable universe of discourse. Information Sciences, 2010, 180: 2991-3005

[27] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353

[28] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249

[29] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44

[30] Zhang Sheng-Li, Li Yong-Ming. Application of generalized fuzzy sets GFScom to fuzzy comprehensive evaluation. Computer Science, 2015, 42(7): 125-128, 161(in Chinese)
(张胜礼，李永明. 广义模糊集 GFScom 在模糊综合评判中的应用. 计算机科学，2015，42(7)：125-128，161)

ZHANG Sheng-Li, born in 1982, Ph. D. candidate, associate professor. His research interests include non-classical computational theory, fuzzy systems.

LI Yong-Ming, born in 1966, Ph. D., professor and Ph. D. supervisor. His research interests include non-classical computational theory, computational intelligence, topology over lattices, quantum computation and quantum information, analysis of fuzzy systems.

Background

Negative information plays a very important role in knowledge representation and reasoning. Dealing with negation involves significant additional complexity. Nevertheless, the use of negation is very natural in many knowledge representation and reasoning systems, such as web semantics, natural language processing, default reasoning, negative queries (search of false information), etc.

In recent years, some scholars suggested that uncertain information processing requires different forms of negations in various fields. In 1980s, Zhu and Xiao[1] proposed the medium logic calculus system ML which strictly distinguishes the contradictory opposite and contrary opposite concept, and pointed out that there exists a medium object (concept) between pair of opposite concepts. Wagner et al.[2-3] considered that there exist (at least) two kinds of negation as follows: a weak negation expressing non-truth and a strong negation expressing explicit falsity, and established one type of partial logic with two kinds of negations. Ferré[7] introduced an epistemic extension of the notion of negation in Logical Concept Analysis and Natural Language, that is, the extensional negation is traditional negation, for instance, "young/not young" and "happy/not happy" and the intensional negation can be understood as opposition, for example, "hot/cold" and "tall/small". Esteva et al.[4-5] extended the strict basic logic SBL with a unary connective $\sim$. The semantic of $\sim$ is an arbitrary decreasing involution, i. e., the function n: $[0,1]\to[0,1]$ such that $n(n(x))=x$ and $n(x)\leq n(y)$ whenever $x\geq y$. The SBL with an involutive negation just is the fuzzy logics with both negations (the other negation is the negation in basic logic BL proposed by Hájek[6], namely, $\neg x=x\to 0$). Kaneiwa[8] proposed so-called description logic with classical and strong negation, where the classical negation represents the negation of a statement, and the other may be more suitable for expressing explicit negative information (or negative facts). In other words, the strong indicates information that is directly opposite and exclusive to a statement rather than its complementary negation. Pan[9-10] pointed out that there exist three kinds of negations-contradictory negation, opposite negation and medium negation-in fuzzy knowledge and its negative relationships, thereby established a novel fuzzy set called the Fuzzy Sets with Contradictory, Opposite and Medium negation, FScom for short. One kind of improved fuzzy sets IFScom (Improved Fuzzy Sets with Contradictory, Opposite and Medium negation) has been developed by Ref. [11]. In order to provide logic calculus tool for FScom (or IFScom), Pan[12] and Zhang[13] presented fuzzy logic with three kinds of negations from the axiomatization and natural calculus reasoning points of view, respectively. Zhang[16] did some work on fuzzy reasoning with three types of negation.

In fuzzy systems, fuzzy knowledge is characterized by fuzzy rules. As we know well, it is very difficult to construct the adequate and effective membership function of a fuzzy set. However, there exist hundreds of or thousands of different fuzzy subsets in an applied fuzzy system. Hence, it's very difficult to construct such many membership functions of fuzzy subsets. However, by analyzing the fuzzy rules, from the negative point of view, many fuzzy subsets are not mutually isolated but in connection with each other by means of the above-mentioned three kinds of negation. One of the most important aims of this paper is to give out this relevant method.

Given a nonlinear function, we are interested in constructing a fuzzy system that can approximate the function to any degree of approximation accuracy. This is clearly a problem that has important theoretical and practical implications. With the help of the generalized fuzzy sets GFScom, the additional main purpose of this paper is to offer a constructive procedure to build a fuzzy system for a given function.

The purpose of this paper is to investigate the general algebraic representation of negative knowledge in fuzzy system from the language variable and set foundation points of view, respectively. On this basis, the approach to construct the fuzzy system equipped with the first-order and second-order approximation accuracy is proposed, and the approximation capability of the system is analyzed

This research is supported in part by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 11271237, the Science and Technology Program of Guizhou Province of China under Grant No. 2324 [2012] Contract J, the Key Program of Natural Science Research of Education Department of Guizhou Province of China under Grant No. 408 [2015] Contract KY, and the Science and Technology Planning Project of Qianxinan Prefecture under Grant No. 2015-1-51.