粗糙模糊集的近似表示

张清华[1),2)] 王 进[1)] 王国胤[1)]

[1)](重庆邮电大学计算智能重庆市重点实验室 重庆 400065)

[2)](重庆邮电大学理学院 重庆 400065)

摘 要 粗糙模糊集是利用粗糙集的Pawlak知识空间来近似刻画一个模糊集(不确定概念)的理论模型.粗糙模糊集用上、下近似模糊集作为目标概念的边界模糊集,它没有给出在当前知识基下如何得到目标模糊概念的近似模糊集或近似精确集的方法.文中首先给出模糊集的相似度(近似度)的概念,定义了Pawlak知识空间U/R下的阶梯模糊集、均值模糊集、0.5-精确集等概念;然后分析得出U/R知识空间下的均值模糊集是所有阶梯模糊集中与目标模糊集最接近的模糊集,U/R知识空间下0.5-精确集是目标模糊集最接近的近似精确集;分析了均值模糊集、0.5-精确集分别与目标模糊集之间的相似度随知识粒度变化的变化规律.从新的视角提出了不确定性目标概念的近似表示和处理的方法,促进了不确定人工智能的发展.

关键词 粗糙集;粒计算;粗糙模糊集;相似度;知识粒度

中图法分类号 TP301 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2015.01484

The Approximate Representation of Rough-fuzzy Sets

ZHANG Qing-Hua[1),2)] WANG Jin[1)] WANG Guo-Yin[1)]

[1)](*Chongqing Key Laboratory of Computational Intelligence, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065)

[2)](*School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing* 400065)

Abstract Rough-fuzzy set describes a fuzzy set (or an uncertain concept) by Pawlak's knowledge space in the classical rough set model. In rough-fuzzy sets model, upper-approximation fuzzy set and lower-approximation fuzzy set are considered as two boundary fuzzy sets of the target concept, and there are few methods for constructing a fuzzy approximation set or a crisp approximation set of a target fuzzy concept in current knowledge base. In this paper, the concept of similarity is presented first and then the definitions of step-fuzzy set, average-fuzzy set and 0.5-crisp set of a fuzzy set are proposed in the knowledge space U/R. The conclusions that the average-fuzzy set is the best fuzzy approximation set of the target fuzzy set in all step-fuzzy sets and the 0.5-crisp set also is the best crisp approximation set of the target fuzzy set in all crisp sets in Pawlak's knowledge space are presented and proved. Moreover, the similarity degree between the average-fuzzy set and the target fuzzy, and the similarity degree between the 0.5-crisp set and the target fuzzy set are discussed respectively and the change rules of these similarity degrees with the changing knowledge granularity are analyzed in detail. This paper proposed a method in a new perspective to represent and process the uncertain target concept, and these results will promote the development of uncertain artificial intelligence.

Keywords rough sets; granular computing; rough-fuzzy sets; similarity; knowledge granularity

---

收稿日期:2013-10-20;最终修改稿收到日期:2015-01-12.本课题得到国家自然科学基金(61472056,61272060,61309014)、重庆市自然科学基金(cstc2012jjA40047)和重庆邮电大学博士启动基金(A2010-06)资助.**张清华**,男,1974年生,博士,教授,主要研究领域为智能信息处理、粗糙集与粒计算等.E-mail:zhangqh@cqupt.edu.cn.**王 进**,男,1990年生,硕士研究生,主要研究方向为粗糙集与粒计算.**王国胤**,男,1970年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为Rough集理论、粒计算、数据挖掘、知识技术等.

1 引 言

随着认知技术的发展，研究者对不确定性问题的表示和处理给予越来越多的关注，特别是不确定概念的表示和处理成为了人工智能研究中最重要的关键问题[1]. 不确定人工智能以描述不确定概念的不确定性(主要是模糊性和随机性)为突破口，建立了相关理论模型和方法，推进了不确定信息处理的研究. 例如，Zadeh[2]在1965年提出的模糊集(Fuzzy sets)理论是利用隶属函数表示对象隶属于不确定概念外延的程度；Pawlak[3]在1982年提出的粗糙集(Rough sets)理论是用上、下近似集来刻画不确定概念外延的两个边界线；张铃和张钹[4]在1990年提出的商空间(Quotient space)理论是利用保真保假原理实现不确定概念外延粒子的合成与分解；李德毅等人[5-6]在1995年提出的云模型利用3个数字特征(期望、熵和超熵)实现不确定概念的定性和定量描述，用云发生器和逆向云发生器建立不确定概念内涵和外延之间的转化；在云模型的基础上，王国胤等人[7-9]在2012年提出了不确定概念的双向认知计算模型，通过随机分组、多步转化等方式，解决了不确定概念内涵与外延之间的相互转化导致的概念不稳定问题(概念漂移问题)等. 近些年来，对于不确定问题的不确定性度量问题，很多研究者提出了不同的方法，如苗夺谦等人[10-12]总结了几种主要的粒计算模型在处理不确定问题时对应的集合描述形式，对概念的不确定度量进行了诠释；钱宇华和梁吉业等人[13-16]对粗糙集描述的知识粒和不确定性及其信息熵随知识粒度的变化规律进行了研究，并得到用于知识约简的相关结论；Yao等人[17-19]对处理不确定信息的粗糙集的概率描述进行了分析，提出了概率粗糙集和贝叶斯粗糙集等概念；王国胤和张清华等人[20-26]给出了知识在多粒度知识空间下的不确定度量，对粒计算的不确定性度量方法进行了归纳，并提出了覆盖知识空间和分层递阶商空间下不确定概念的描述方式；还有一些研究者[27]提出了相关的度量和表示不确定概念的方法. 这些理论和方法有效解决了不确定概念的描述和处理问题，促进了不确定人工智能的发展.

克莱因[28]指出："数学曾经被认为是精确论证的顶峰，真理的化身，是关于宇宙设计的真理"是一个错误观点，指出数学也存在不确定性问题. 不确定概念已随处可见，一些演化的不确定概念理论方法也应运而生. 从粒计算的观点来看，概念的确定性与不确定性是概念在不同知识粒度层次上的不同表现形式，它们并非完全对立，在一定粒度层次上可以相互转化. 某一层次上的不确定概念可能是其他层次上的确定性概念，种种不确定概念中还可能隐藏着某些确定的知识[23]. 模糊集理论、粗糙集理论、商空间理论和云模型均在一定程度上实现了不确定概念的表示与相互转化. 模糊集理论用隶属函数来刻画不确定概念外延中对象属于概念的程度，但是隶属函数的选取和隶属度值的获取具有一定的主观性. 粗糙集(也称Rough集或粗集)理论是一种定量分析处理不确定概念的数学工具，它用两个精确的集合构成不确定概念的两个边界，且边界的大小可以确定. 对模糊集和粗糙集在描述不确定概念的异同，王国胤[20]指出：模糊集理论是用不精确的方法去描述不确定的概念，而粗糙集理论是用精确的集合描述不确定概念. 由于粗糙集理论思想新颖、方法独特、计算简便，它已成为一种重要的智能信息处理技术. 商空间理论是借用集合拓扑方法，构建不确定概念外延的多粒度描述方法；云模型则是利用正态云作为概念原型来实现不确定概念的随机性和模糊性统一描述，基于云模型的双向认知模型，并利用云发生器和逆向云发生器建立不确定概念内涵和外延的双向认知计算模型[7,8].

从粒计算的观点来看，在不同粒度世界，其不确定概念的不确定性表现不同. 粗糙集方法给研究者提供了在精确划分知识空间下不确定概念的表示方法，其本质的思想是利用等价关系来建立一个知识基，在知识基上用两个集合形成不确定概念(X)的上近似集和下近似集. 如果知识基中的知识粒较粗，被刻画的不确定概念的边界域较宽；如果知识粒较细，被描述的不确定概念的边界域较窄. 虽然粗糙集模型给出了刻画不确定概念的两个边界集合，但是没有给出在当前知识基中如何得到不确定概念(目标概念)的一个确定近似概念(即用一个精确集作为不确定概念的近似集). 对此，我们在文献[22]中提出了粗糙集近似集的概念，利用条件属性对论域形成的知识基直接构建不确定概念X的近似集，这个近似集相对于粗糙集中的不确定概念(X)的下近似集$\underline{R}(X)$或上近似集$\overline{R}(X)$可能有更好的近似度. 粗糙集的近似集$R_{0.5}(X)$主要研究讨论目标概念是一个普通的康托集X，只是这个集合X在当前知识基下是粗糙的(即无法用现有知识粒的并集构成). 如果我们研究的不确定概念(目标概念)本身是一个模

糊集(A)时,如何利用现有知识基来刻画这个不确定概念A?针对此问题,粗糙模糊集(Rough-fuzzy set)在用上近似集$\overline{A}_R$和下近似集$\underline{A}_R$这两个模糊集作为不确定概念(A)(目标模糊集)的边界模糊集.很多研究者在经典粗糙集理论的基础上,对粗糙模糊集进行了研究. Dubois 和 Yao 等人[29-30]分析了粗糙模糊集和模糊粗糙集之间的联系和不同;吴伟志、张文修、徐宗本等人[31]用构造性方法和公理化研究了粗糙模糊集及其相关性质;郭增晓、米据生等人[32]对粗糙模糊集的不确定性进行了研究;魏本成、张诚一等人[33]研究了粗糙模糊集的相似度量.这些研究促进了粗糙模糊集的发展,也推广了粗糙集的适用范围,在一定程度上解决了目标概念是模糊集的不确定性决策信息系统的知识获取问题.

虽然刻画和描述一个不确定概念(A)(目标模糊集)的方法很多,其主要思路都是给出目标模糊集的上、下近似集$\overline{A}_R$和$\underline{A}_R$,然后利用它们来度量概念的不确定性或提取模糊决策规则.但这些方法都没有给出如何用一个模糊集或精确集来逼近不确定概念(A)(目标模糊集).在划分知识空间(即精确知识粒空间)下,如何构建一个模糊集的近似集是一个值得研究的课题.在研究粗糙集近似集的基础上,本文利用条件属性对论域形成的知识基(划分空间)直接构建不确定概念(A)(目标模糊集)的近似集,一方面构建不确定概念(A)(目标模糊集)在当前知识基下的模糊近似集,该模糊集是当前知识基下与不确定概念(A)(目标模糊集)最相似的模糊集;另一方面,构建不确定概念(A)(目标模糊集)在当前知识基下的近似精确集(该集合是普通的康拓集),该近似集是当前知识基下与不确定概念(A)(目标模糊集)最相似的康拓集.此外,本文还讨论了随着知识基中知识粒度的细分,粗糙模糊集的近似集与不确定概念(A)(目标模糊集)的近似度的变化规律.

本文第 2 节介绍粗糙集、粗糙模糊集和相似度等相关基本概念;第 3 节给出粗糙模糊集的近似集及其相关性质;第 4 节讨论不同知识粒度下不确定概念(A)(目标模糊集)的近似集和A的相似度变化关系;第 5 节是结束语.

2 相关基本概念

在介绍粗糙模糊集的近似集之前,这里先回顾一些基本概念,并提出均值模糊集等相关概念和本文所用的模糊集相似度公式.

定义 1(集合划分). 设U是一个论域集合,若$S=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$,其中$X_i\subseteq U(i=1,2,\cdots,m)$,且$X_i\cap X_j=\phi(i\neq j)$,称$S=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$是$U$的一个划分.

定义 2(知识基)[3,34]. 设(U,R)是 Pawlak 近似空间,即R是U上的一个等价关系,$U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$是$U$在$R$下形成的划分,称$U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$为 Pawlak 知识基,简称$(U,R)$知识基.$[x]_R\in U/R$表示对象$x$在等价关系$R$上形成的等价类.

定义 3(粗糙模糊集)[29]. 设(U,R)是 Pawlak 近似空间,即R是U上的一个等价关系,设A是U上的模糊集,A关于(U,R)的一对上近似$\overline{A}_R$和下近$\underline{A}_R$定义为U上的一对模糊集合,其隶属函数分别为$\forall x\in U$,

$$\mu_{\overline{A}_R}(x)=\sup\{u_A(y)\mid y\in[x]_R\};$$

$$\mu_{\underline{A}_R}(x)=\inf\{\mu_A(y)\mid y\in[x]_R\}.$$

其中$[x]_R$表示元素x在等价关系R下的等价类,若$\overline{A}_R=\underline{A}_R$,则称$A$是可定义的,否则称$(\underline{A}_R,\overline{A}_R)$是粗糙模糊集(Rough-fuzzy set).称$\underline{A}_R$是A关于(U,R)的正域,称$\sim\overline{A}_R$是A关于(U,R)的负域,称$\overline{A}_R\cap(\sim\underline{A}_R)$为$A$关于$(U,R)$的边界.容易验证,当$A$是$U$上的经典集合时,上述定义退化为经典的 Pawlak 粗糙集.粗糙模糊集有以下性质[29]:

(1) $\underline{A}_R\subseteq A\subseteq\overline{A}_R$;

(2) $\overline{(A\cup B)}_R=\overline{A}_R\cup\overline{B}_R$;

(3) $\underline{(A\cap B)}_R=\underline{A}_R\cap\underline{B}_R$;

(4) $\underline{A}_R\cup\underline{B}_R\subseteq\underline{(A\cup B)}_R$;

(5) $\overline{(A\cap B)}_R\subseteq\overline{A}_R\cap\overline{B}_R$;

(6) $(\overline{\sim A_R})=\sim(\underline{A}_R)$;$\underline{(\sim A)}_R=\sim\overline{A}_R$.

定义 4(阶梯模糊集). 设$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个论域集合,R是U上的等价关系,$U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$是$U$在$R$下形成的划分,其中$X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}(i=1,2,\cdots,m)$且$t_1+t_2+\cdots+t_m=n$,$A$是$U$上一个模糊集.若$\mu_A(x_{i1})=\mu_A(x_{i2})=\mu_A(x_{i3})=\cdots=\mu_A(x_{it_i})=c_i(0\leq c_i\leq 1,i=1,2,\cdots,m)$,则称$A$是知识基$U/R$上的阶梯型模糊集,$c_i$为阶梯隶属函数值.

在不混淆的情况下,可以记$\mu_A(X_i)=c_i(1\leq i\leq m)$.

显然粗糙模糊集A在U/R上形成的上、下近似集$\overline{A}_R$和$\underline{A}_R$分别是知识基U/R上的阶梯型模糊集.

定义 5(模糊集的相似度(近似度)). 设A,B是

有限论域 U 上的两个模糊子集，即 $A\in F(U)$，$B\in F(U)$，定义映射：

$$S: F(U)\times F(U)\to[0,1],$$

即 $(A,B)\to S(A,B)$. 称 $S(A,B)$ 是模糊集 A,B 之间的相似度，如果 $S(A,B)$ 满足如下条件：

(1) 有界性. 对任意的 $A,B\in F(U)$，$0\le S(A,B)\le 1$；

(2) 对称性. 对任意的 $A,B\in F(U)$，$S(A,B)=S(B,A)$；

(3) 对任意的 $A,B\in F(U)$，$S(A,A)=1$；

$S(A,B)=0$ 的充要条件是 $A\cap B=\varnothing$.

对于任意满足(1)、(2)和(3)三个条件公式都是模糊集 A,B 之间的相似度公式.

为了简化起见，设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，令

$$S(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\tag{1}$$

显然式(1)中的 $S(A,B)$ 满足定义 5. 本文用式(1)作为离散论域上模糊集的相似度公式.

如果 $U=[a,b]$ 是一个连续论域，令

$$S(A,B)=1-\frac{1}{b-a}\sqrt{\int_a^b(\mu_A(x)-\mu_B(x))^2\mathrm{d}x}\tag{2}$$

式(2)中的 $S(A,B)$ 也满足定义 5.

另外，令 $\mathrm{d}(A,B)=1-S(A,B)$，称 $\mathrm{d}(A,B)$ 为模糊集 A,B 之间的距离.

对于论域 U 上的任意模糊集 A，分别用 $\overline{A}_R$ 和 $\underline{A}_R$ 作为 A 的近似集是研究者的一般思路，但在给定的知识基 U/R 上，是否有更好的阶梯模糊集作为 A 的近似集，使得其与 A 的近似程度更好？下面给出一个模糊集的均值模糊集的概念.

定义 6(均值模糊集). 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个论域集合，R 是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集. 定义模糊集 A_R^*，其中对于任意 $x\in U$，

$$\mu_{A_R^*}(x)=\frac{\sum\limits_{y\in[x]_R}\mu_A(y)}{|[x]_R|}$$

称模糊集 A_R^* 是 A 的均值模糊集.

如果 $U=[a,b]$ 是一个连续论域集合，则 $\mu_{A^*}(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\mu_A(x)\mathrm{d}x$.

例 1. 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$，在 U 上的模糊集

$$A=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.15}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0.8}{x_7}+\frac{0.6}{x_8}+\frac{0.4}{x_9};$$

R 是 U 上的等价关系，$U/R=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4,x_5,x_6\},\{x_7,x_8,x_9\}\}$；则

$$\overline{A}_R=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0.8}{x_7}+\frac{0.8}{x_8}+\frac{0.8}{x_9};$$

$$\underline{A}_R=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}+\frac{0.7}{x_6}+\frac{0.4}{x_7}+\frac{0.4}{x_8}+\frac{0.4}{x_9};$$

$$A^*=\frac{0.25}{x_1}+\frac{0.25}{x_2}+\frac{0.25}{x_3}+\frac{0.9}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.9}{x_6}+\frac{0.6}{x_7}+\frac{0.6}{x_8}+\frac{0.6}{x_9};$$

$$\begin{aligned}S(A,\overline{A}_R)&=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\sqrt{\sum_{i=1}^{9}(\mu_A(x_i)-\mu_{\overline{A}_R}(x_i))^2}\\&=-\frac{1}{3}(0.4^2+0.35^2+0^2+0.3^2+0^2+0^2+0^2+0.2^2+0.4^2)^{\frac{1}{2}}+1\\&=0.748;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(A,\underline{A}_R)&=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\sqrt{\sum_{i=1}^{9}(\mu_A(x_i)-\mu_{\underline{A}_R}(x_i))^2}\\&=-\frac{1}{3}(0^2+0.05^2+0.4^2+0^2+0.3^2+0.3^2+0.4^2+0.2^2+0^2)^{\frac{1}{2}}+1\\&=0.754;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(A,A_R^*)&=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\sqrt{\sum_{i=1}^{9}(\mu_A(x_i)-\mu_{A^*}(x_i))^2}\\&=-\frac{1}{3}(0.15^2+0.1^2+0.25^2+0.2^2+0.1^2+0.1^2+0.2^2+0^2+0.2^2)^{\frac{1}{2}}+1\\&=0.838.\end{aligned}$$

另外，如果 U 是一个连续区间，而 A 是 U 上的模糊集，其隶属函数定义为 $\mu_A(x)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}$（相当于一个均值为 0，方差为 $1/\sqrt{2\pi}$ 的正态隶属函数）. 则 A 的下近似集 $\underline{A}_R$、上近似集 $\overline{A}_R$ 和 A 的均值模糊集 A_R^* 分别如图 1、图 2 和图 3 所示；这 3 个模糊集的对比如图 4 所示.

由此可以看出，A 的均值模糊集 A_R^* 与 A 的近似程度更高. 是否存在 U/R 上的另外的阶梯模糊集，该阶梯模糊集与 A 的近似程度比 A_R^* 与 A 的近似程度更高？即 A_R^* 是否是 A 的最佳(最接近)阶梯模糊集？接下来，我们将分析这些问题.

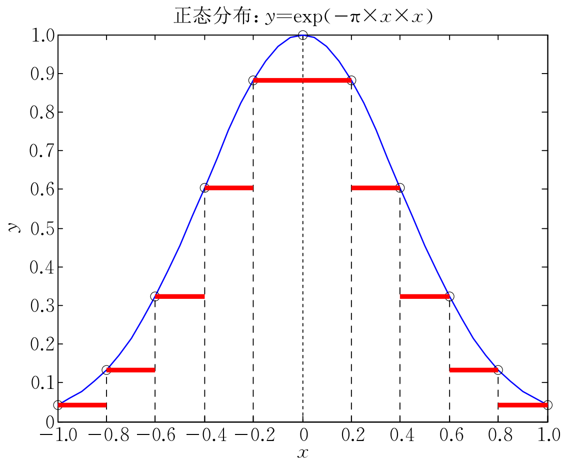

图1　模糊集 A 的下近似集

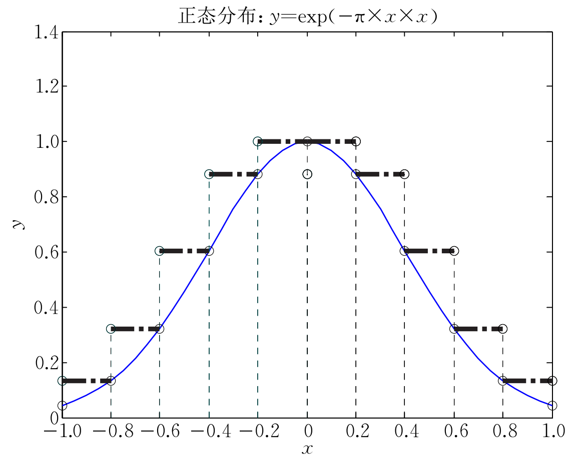

图2　模糊集 A 的上近似集

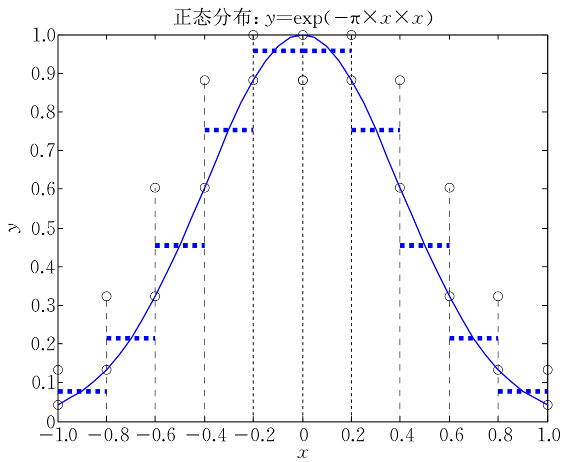

图3　模糊集 A 的均值模糊集

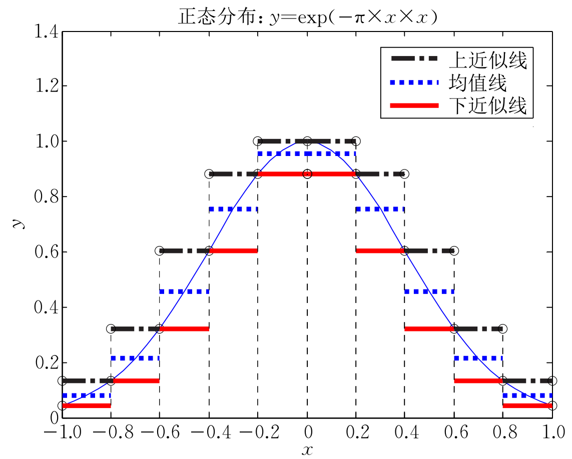

图4　模糊集 A 的上、下近似集与均值模糊集对比图

3　粗糙模糊集的近似集

对于论域 U 上的任意模糊集 A，均有 $\underline{A}_R\subseteq A\subseteq\overline{A}_R$. 因此，在当前知识基 U/R 下，如何寻求得到不确定概念 A（目标概念）的近似集合是值得探讨的问题. 粗糙模糊集给出了 A 的近似的边界模糊集合 $\overline{A}_R$ 和 $\underline{A}_R$，但是没有给出 A 的近似集合如何构造. 如果直接用 $\underline{A}_R$ 作为 A 的近似集或直接用 $\overline{A}_R$ 作为 A 的近似集，则近似度分别是 $S(A,\underline{A}_R)$ 和 $S(A,\overline{A}_R)$. 根据本文第2节的例1，我们可以看出 $S(A,\underline{A}_R)$ 或 $S(A,\overline{A}_R)$ 都不一定大于 $S(A,A_R^*)$. 在当前知识基中知识粒的粒度不变的情况下，是否有更合适的集合作为 A 的近似集呢？即在 U/R 知识基下是否存在与目标概念（模糊集）A 近似度更高的集合？从例1中是否可以得到 A_R^* 是 A 的最佳（最接近）阶梯模糊集？下面的定理1回答了这个问题.

定理1.　设 U 是一个论域集合，R 是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集，A_R^* 是 A 在 U/R 上的均值模糊集，则在 U/R 上的任意阶梯模糊集 B，均有 $S(A,A_R^*)\geq S(A,B)$.

证明.　这里我们只讨论有限离散论域（连续论域情况与之类似）.

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，其中 $X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}(i=1,2,\cdots,m)$.

令 $\mu_B(X_i)=c_i(i=1,2,\cdots,m)$，即 $\mu_B(x_{i1})=\mu_B(x_{i2})=\cdots=\mu_B(x_{it_i})=c_i$，$0\leq c_i\leq 1$，$t_1+t_2+\cdots+t_m=n$. 则

$$
\begin{aligned}
S(A,B)&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2}\\
&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Bigg[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_B(x_{1i}))^2+\\
&\quad\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_B(x_{2i}))^2+\cdots+\\
&\quad\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_B(x_{mi}))^2\Bigg]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-c_1)^2+\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-c_2)^2+\cdots+\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-c_m)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$y_1=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-c_1)^2=(\mu_A(x_{11})-c_1)^2+(\mu_A(x_{12})-c_1)^2+\cdots+(\mu_A(x_{1t_1})-c_1)^2;$$

$$y_2=\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-c_2)^2=(\mu_A(x_{21})-c_2)^2+(\mu_A(x_{22})-c_2)^2+\cdots+(\mu_A(x_{2t_2})-c_2)^2;\cdots;$$

$$y_m=\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-c_m)^2=(\mu_A(x_{m1})-c_m)^2+(\mu_A(x_{m2})-c_m)^2+\cdots+(\mu_A(x_{mt_m})-c_m)^2.$$

对于 y_1，由 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}c_1}=-2[(\mu_A(x_{11})-c_1)+(\mu_A(x_{12})-c_1)+\cdots+(\mu_A(x_{1t_1})-c_1)]$，令 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}c_1}=0$，解得 $c_1=\frac{1}{t_1}[\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})]$，又因为 $\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}c_1^2}>0$，所以，当 $c_1=\frac{1}{t_1}[\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})]$时，$y_1$取得最小值.

同理，当 $c_2=\frac{1}{t_2}[\mu_A(x_{21})+\mu_A(x_{22})+\cdots+\mu_A(x_{2t_2})]$时，$y_2$ 取得最小值. 以此类推，当 $c_m=\frac{1}{t_m}[\mu_A(x_{m1})+\mu_A(x_{m2})+\cdots+\mu_A(x_{mt_m})]$时，$y_m$取得最小值.

因此，当 $c_1=\frac{1}{t_1}[\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})]$，$c_2=\frac{1}{t_2}[\mu_A(x_{21})+\mu_A(x_{22})+\cdots+\mu_A(x_{2t_2})]$，$\cdots$，$c_m=\frac{1}{t_m}[\mu_A(x_{m1})+\mu_A(x_{m2})+\cdots+\mu_A(x_{mt_m})]$时，$\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-c_1)^2+\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-c_2)^2+\cdots+\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-c_m)^2$ 取得最小值，即

$$S(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-c_1)^2+\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-c_2)^2+\cdots+\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-c_m)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

取得最大值. 此时，

$$\mu_B(X_i)=\mu_B(x_{i1})=\mu_B(x_{i2})=\cdots=\mu_B(x_{it_i})=c_i=\frac{\sum_{y\in X_i}\mu_A(y)}{|X_i|}.$$

换言之，当阶梯模糊集 B 等于 A 的均值模糊集 A_R^* 时，$S(A,B)$取得最大值. 即在当前知识基 U/R 上的任意阶梯模糊集B，均有 $S(A,B)\le S(A,A_R^*)$. 证毕.

定理 1 表明，对于 U 上的一个模糊集 A，在当前的知识基 U/R 上的所有阶梯模糊集中，只有均值模糊集 A_R^* 与 A 最接近，即 A_R^* 是 A 的最佳近似阶梯模糊集.

推论 1. 设 U 是一个论域集合，R 是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集，A_R^* 是 A 在 U/R 上的均值模糊集，则 $S(A,A_R^*)\ge S(A,\overline{A}_R)$，且有 $S(A,A_R^*)\ge S(A,\underline{A}_R)$.

由于模糊集 A 的上、下近似集 $\overline{A}_R$ 和 $\underline{A}_R$ 分别都是 A 的阶梯模糊集，根据定理 1，推论 1 显然成立. 推论 1 事实上表明分别用 $\overline{A}_R$ 和 $\underline{A}_R$ 作为模糊集 A 的近似集都不如用 U/R 上的均值模糊集 A_R^* 作为 A 的近似集好，在图 4 中，可以看到 A 的均值模糊集 A_R^* 介于 $\overline{A}_R$ 和 $\underline{A}_R$ 之间.

定理 1 及其推论 1 给出了在 U/R 上模糊集 A 的最佳近似集，该集合是 U/R 上的均值模糊集. 然而在 U/R 上是否存在模糊集 A 的最佳的近似精确集(康拓集)，而且该近似集是 U/R 上的部分知识粒的并集(最接近模糊集 A 的一个精确集)？若存在，则这个精确集作为模糊集 A 的近似集将有利于模糊集在划分知识空间中的分割.

定义 7(U/R 上的精确集). 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集，$U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，其中 $X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}(i=1,2,\cdots,m)$. 称 A^R 为模糊集 A 在 U/R 上的精确集，当且仅当对于任意 $X_i\in U/R$，$\mu_{A^R}(X_i)=1$ 或者 $\mu_{A^R}(X_i)=0$，即 $\mu_{A^R}(x_{i1})=\mu_{A^R}(x_{i2})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{it_i})=1$ 或 $\mu_{A^R}(x_{i1})=\mu_{A^R}(x_{i2})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{it_i})=0$，$i=1,2,\cdots,m$.

一个 U/R 上的精确集是指可以用 U/R 上的部分知识粒的并集构成的集合，即 $U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 中部分分块的并集.

定义 8(U/R 上的 0.5-精确集). 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 U 上的等价关系,A 是 U 上一个模糊集,称 $A_{0.5}^R$ 为模糊集 A 在 U/R 上的 0.5-精确集,其中,对于任意 $x\in U$,

$$\mu_{A_{0.5}^R}(x)=\begin{cases}1, & \dfrac{\sum\limits_{y\in[x]_R}\mu_A(y)}{|[x]_R|}\geq 0.5\\[2ex] 0, & \dfrac{\sum\limits_{y\in[x]_R}\mu_A(y)}{|[x]_R|}<0.5\end{cases}.$$

此时,$A_{0.5}^R$ 是 U 上一个普通的精确集,也是 $U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 中部分元素的并集,即 U/R 上的 0.5-精确集 $A_{0.5}^R$ 是一个 U/R 上的精确集,如图 5 中的深色区域所示.

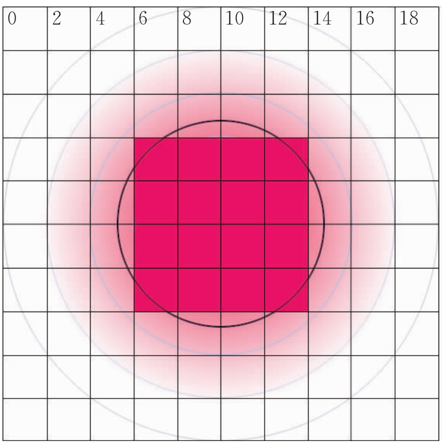

图 5 模糊集的 0.5-精确集(深色区域)

定理 2. 设 U 是一个论域集合,R 是 U 上的等价关系,A 是 U 上一个模糊集,$A_{0.5}^R$ 为模糊集 A 在 U/R 上的 0.5-精确集,则在 U/R 上的任意精确集 A^R,均有 $S(A,A_{0.5}^R)\geq S(A,A^R)$.

证明. 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $U/R=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$,其中 $X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}$, $0\leq c_i\leq 1$, $t_1+t_2+\cdots+t_m=n$, $i=1,2,\cdots,m$.

$$S(A,A_{0.5}^R)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_{A_{0.5}^R}(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1i}))^2+\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{2i}))^2+\cdots+\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{mi}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

令 $y_1=\sum\limits_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1i}))^2$;$y_2=\sum\limits_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{2i}))^2$;$\cdots$;$y_m=\sum\limits_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{mi}))^2$.

$$S(A,A^R)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_{A^R}(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A^R}(x_{1i}))^2+\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A^R}(x_{2i}))^2+\cdots+\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A^R}(x_{mi}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

令 $z_1=\sum\limits_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A^R}(x_{1i}))^2$;$z_2=\sum\limits_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A^R}(x_{2i}))^2$;$\cdots$;$z_m=\sum\limits_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A^R}(x_{mi}))^2$.

对于 X_1,

① 若 $\sum\limits_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\dfrac{t_1}{2}$,则 $\mu_{A_{0.5}^R}(x_{11})=\mu_{A_{0.5}^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1t_1})=1$. 此时

i) 若 $\mu_{A^R}(x_{11})=\mu_{A^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{1t_1})=1$,显然有 $y_1=z_1$;

ii) 若 $\mu_{A^R}(x_{11})=\mu_{A^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{1t_1})=0$,则

$$\begin{aligned}y_1&=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1i}))^2=(\mu_A(x_{11})-1)^2+(\mu_A(x_{12})-1)^2+\cdots+(\mu_A(x_{1t_1})-1)^2\\&=\mu_A(x_{11})^2+\mu_A(x_{12})^2+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})^2-2(\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1}))+t_1.\end{aligned}$$

因为,$\sum\limits_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\dfrac{t_1}{2}$,

即 $2(\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1}))\geq t_1$,因此

$$\begin{aligned}y_1&\leq\mu_A(x_{11})^2+\mu_A(x_{12})^2+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})^2\\&=(\mu_A(x_{11})-\mu_{A^R}(x_{11}))^2+(\mu_A(x_{12})-\mu_{A^R}(x_{12}))^2+\cdots+(\mu_A(x_{1t_1})-\mu_{A^R}(x_{1t_1}))^2\\&=z_1.\end{aligned}$$

② 若 $\sum\limits_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\dfrac{t_1}{2}$,则 $\mu_{A_{0.5}^R}(x_{11})=\mu_{A_{0.5}^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1t_1})=0$. 此时

i) 若 $\mu_{A^R}(x_{11})=\mu_{A^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{1t_1})=0$,显然有 $y_1=z_1$;

ii) 若 $\mu_{A^R}(x_{11})=\mu_{A^R}(x_{12})=\cdots=\mu_{A^R}(x_{1t_1})=1$，则

$$y_1=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^R}(x_{1i}))^2=\mu_A(x_{11})^2+\mu_A(x_{12})^2+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})^2.$$

因为$\sum_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\frac{t_1}{2}$，即 $2(\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1}))<t_1$，因此

$$\begin{aligned}y_1&=\mu_A(x_{11})^2+\mu_A(x_{12})^2+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})^2\\&<\mu_A(x_{11})^2+\mu_A(x_{12})^2+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})^2-\\&\quad 2(\mu_A(x_{11})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1}))+t_1\\&=(\mu_A(x_{11})-1)^2+(\mu_A(x_{12})-1)^2+\cdots+\\&\quad(\mu_A(x_{1t_1})-1)^2\\&=z_1.\end{aligned}$$

根据①②可知 $y_1\le z_1$.

同理可证，$y_2\le z_2,\cdots,y_m\le z_m$.

综上所述，

$$S(A,A_{0.5}^R)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^m y_i}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^m z_i}=S(A,A^R).$$

证毕.

定理 2 表明，在 U/R 知识基上形成的所有精确集中，U/R 上的 0.5-精确集是模糊集 A 最佳近似精确集. 因此，可以用每个知识粒中对象属于模糊集的隶属度均值是否大于 0.5 来决定该知识粒是否属于近似集，这为在 U/R 知识基上构建模糊集的近似集提供理论基础，并易于得到模糊集的最佳近似精确集.

4　粗糙模糊集的近似集随知识粒度的变化关系

从粒计算的观点来看，一个目标概念在不同知识粒空间中，其不确定性表现不同，随着知识基中知识粒子的不断细化，粗糙集、粗糙模糊集的不确定性的变化规律的研究成为热点问题[21-23]，我们在文献[21]中研究分析了粗糙集的模糊度随知识粒度的变化规律，在文献[23]中研究了不同粒计算方法的不确定性随知识粒度的变化关系，在文献[22]中研究了粗糙集的近似集随知识粒度的变化规律. 第 3 节我们研究了一个模糊集在一个划分知识基 U/R 上的近似模糊集和精确集如何构建的问题. 当知识基中的知识粒被细分时，模糊集在 U/R 上的均值模糊集和 0.5-精确集如何变化，它们与目标概念的近似程度 $S(A,A_R^*)$ 和 $S(A,A_{0.5}^R)$ 是否发生变化？如果变化，其规律是什么？接下来研究这些问题.

命题 1.　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个实数，令 $y=(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2$. 则当 $a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 时，y 取得最小值.

定义 9[35].　设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限论域，$P'=\{P_1',P_2',\cdots,P_l'\}$ 和 $P''=\{P_1'',P_2'',\cdots,P_m''\}$ 为 U 上的两个划分空间，如果 $\forall_{P_i'\in P'}(\exists_{P_j''\in P''}(P_i'\subseteq P_j''))$，则称 P' 是 P'' 的细划分空间，记为 $P'\le P''$.

定义 10[35].　设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限论域，$P'=\{P_1',P_2',\cdots,P_l'\}$ 和 $P''=\{P_1'',P_2'',\cdots,P_m''\}$ 为 U 上的两个划分空间，如果 $P'\le P''$，且 $\exists_{P_i'\in P'}(\exists_{P_j''\in P''}(P_i'\subset P_j''))$，则称 P' 是 P'' 的严格细划分空间，记为 $P'<P''$.

定理 3.　设 U 是一个论域集合，R_1 和 R_2 都是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集. 若 $R_1\supseteq R_2$，则 $S(A,A_{R_1}^*)\le S(A,A_{R_2}^*)$.

证明.　设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$U/R_1=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，其中 $X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}(i=1,2,\cdots,m)$，$U/R_2=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_l\}$，$m\le l\le n$. 因为 $R_1\supseteq R_2$，所以 $U/R_2\le U/R_1$，划分 U/R_2 是划分 U/R_1 的细分，换言之，U/R_1 中的每个元素是 U/R_2 中的若干个元素的并集. 为了简化证明，不妨设 $U/R_2=\{Y_1,Y_2,X_2,X_3,X_4,\cdots,X_m\}$，即 U/R_1 中只有一个元素 X_1 被细分成两个元素 Y_1 和 Y_2，其他元素保持不变(其他情况证明类似). 设 $|Y_1|=a$，$|Y_2|=b$，$a+b=t_1$，其中 $Y_1=\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1a}\}$，$Y_2=\{x_{1,a+1},x_{1,a+2},\cdots,x_{1t_1}\}$.

$$\begin{aligned}S(A,A_{R_1}^*)&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n(\mu_A(x_i)-\mu_{A_{R_1}^*}(x_i))^2}\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{2i}))^2+\cdots+\\&\quad\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{mi}))^2\Big]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(A,A_{R_2}^*)&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n(\mu_A(x_i)-\mu_{A_{R_2}^*}(x_i))^2}\\&=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2+\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{2i}))^2+\cdots+$$

$$\left.\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{mi}))^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

显然

$$\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{2i}))^2+\cdots+$$

$$\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{mi}))^2$$

$$=\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{2i}))^2+\cdots+$$

$$\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{mi}))^2;$$

令 $$\alpha=\frac{\mu_A(x_{1i})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})}{t_1},$$

$$\beta=\frac{\mu_A(x_{1i})+\mu_A(x_{12})+\cdots+\mu_A(x_{1a})}{a},$$

$$\gamma=\frac{\mu_A(x_{1,a+1})+\mu_A(x_{1,a+2})+\cdots+\mu_A(x_{1t_1})}{t_1-a}.$$

根据命题1和均值模糊集的定义有

$$\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\beta)^2$$

$$\leq\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\alpha)^2,$$

$$\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2=\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\gamma)^2$$

$$\leq\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\alpha)^2,$$

所以，$$\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2+$$

$$\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_2}^*}(x_{1i}))^2$$

$$\leq\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\alpha)^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\alpha)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\alpha)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{R_1}^*}(x_{1i}))^2.$$

因此，$S(A,A_{R_1}^*)\leq S(A,A_{R_2}^*)$. 证毕.

定理4. 设 U 是一个论域集合，R_1 和 R_2 都是 U 上的等价关系，A 是 U 上一个模糊集. 若 $R_1\supseteq R_2$，则 $S(A,A_{0.5}^{R_1})\leq S(A,A_{0.5}^{R_2})$.

证明. 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$U/R_1=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$，其中 $X_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{it_i}\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，$U/R_2=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_l\}$，$m\leq l\leq n$. 因为 $R_1\supseteq R_2$，所以 $U/R_2\leq U/R_1$，为了简化证明，不妨设 U/R_1 中只有一个元素 X_1 被细分成两个元素 Y_1 和 Y_2，其他元素保持不变(其他情况类似)，即 $U/R_2=\{Y_1,Y_2,X_2,X_3,X_4,\cdots,X_m\}$. 设 $|Y_1|=a$，$|Y_2|=b=t_1-a$，其中 $Y_1=\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1a}\}$，$Y_2=\{x_{1,a+1},x_{1,a+2},\cdots,x_{1t_1}\}$.

$$S(A,A_{0.5}^{R_1})=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2+\right.$$

$$\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{2i}))^2+\cdots+$$

$$\left.\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{mi}))^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

令 $$y_1=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2;$$

$$y_2=\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{2i}))^2;\cdots;$$

$$y_m=\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{mi}))^2.$$

$$S(A,A_{0.5}^{R_2})=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\right.$$

$$\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+$$

$$\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{2i}))^2+\cdots+$$

$$\left.\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{mi}))^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

令 $$z_{11}=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2;$$

$$z_{12}=\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2;$$

$$z_2=\sum_{i=1}^{t_2}(\mu_A(x_{2i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{2i}))^2;\cdots;$$

$$z_m=\sum_{i=1}^{t_m}(\mu_A(x_{mi})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{mi}))^2.$$

显然，$y_2=z_2$；$y_3=z_3$；$\cdots$；$y_m=z_m$. 而

$$y_1=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2+$$

$$\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2.$$

① 当$\sum_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{t_1}{2}$时，

i) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{a}{2}$，且$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，则

$\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i})=1$($i=1,2,\cdots,t_1$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=1$($i=1,2,\cdots,a$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=1$($i=a+1,a+2,\cdots,t_1$)，因此

$$\begin{aligned}y_1&=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2\\&=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-1)^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2=z_{11}+z_{12}.\end{aligned}$$

ii) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{a}{2}$且$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，则

$$\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i})=1(i=1,2,\cdots,t_1),$$

$$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=1(i=1,2,\cdots,a),$$

$$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=0(i=a+1,a+2,\cdots,t_1),$$

$$\begin{aligned}y_1&=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2=\\&\quad\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-1)^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})^2-2\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})+b\\&\geq\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2=z_{11}+z_{12}.\end{aligned}$$

iii) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})<\frac{a}{2}$，且$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，类似的可以证明，$y_1\geq z_{11}+z_{12}$.

② 当$\sum_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\frac{t_1}{2}$时，

i) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})<\frac{a}{2}$，且$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i})=0$($i=1,2,\cdots,t_1$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=0$($i=1,2,\cdots,a$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=0$($i=a+1,a+2,\cdots,t_1$)，此时，显然有 $y_1=z_{11}+z_{12}$.

ii) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})<\frac{a}{2}$且$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i})=0$($i=1,2,\cdots,t_1$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=0$($i=1,2,\cdots,a$)，$\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i})=1$($i=a+1,a+2,\cdots,t_1$)，则

$$\begin{aligned}y_1&=\sum_{i=1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_1}}(x_{1i}))^2=\sum_{i=1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})^2\\&=\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})^2\\&\geq\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})^2-2\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})+b\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})^2-1)^2\\&=\sum_{i=1}^{a}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2+\\&\quad\sum_{i=a+1}^{t_1}(\mu_A(x_{1i})-\mu_{A_{0.5}^{R_2}}(x_{1i}))^2=z_{11}+z_{12}.\end{aligned}$$

iii) 若$\sum_{i=1}^{a}\mu_A(x_{1i})\geq\frac{a}{2}$，且有$\sum_{i=a+1}^{t_1}\mu_A(x_{1i})<\frac{b}{2}$($b=t_1-a$)，类似的可以证明 $y_1\geq z_{11}+z_{12}$.

综合①②，可以得到 $y_1\geq z_{11}+z_{12}$.

综上所述，$S(A,A_{0.5}^{R_1})\leq S(A,A_{0.5}^{R_2})$.　　证毕.

定理 3 和定理 4 表明，随着知识粒度的细分，均值模糊集和 0.5-精确集与目标模糊概念的近似度将逐渐增加. 图 6 是知识粒被细分后的 0.5-精确集，它与图 5 相比，图 6 中的精确集比图 5 中的精确集与目标模糊集的近似度更好. 可以推断，随着知识基中的知识粒子的细分，0.5-精确集与目标模糊集的近似度将提高. 图 7 中，带有五角星的小方格表示知识粒细化后没有在 0.5-精确集中的细知识粒，带有圆形的小方格表示知识粒细化后增加进入 0.5-精确集的知识粒，其余被着色的小方格表示知识粒细化前后均在 0.5-精确集中的知识粒.

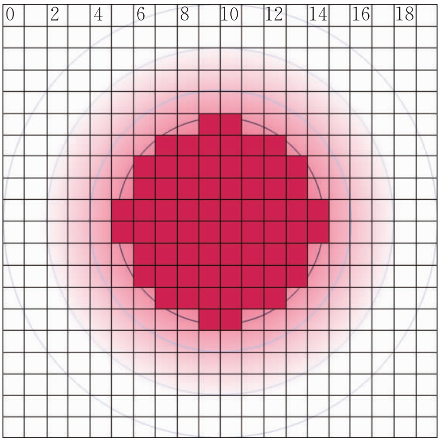

图 6 知识粒细分后的 0.5-精确集(深色区域)

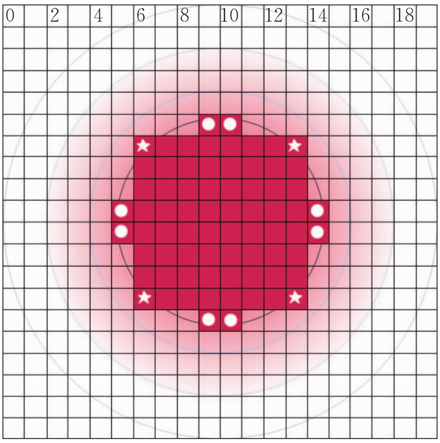

图 7 0.5-精确集随知识粒度细化的变化对比图

5 结束语

在过去 30 多年的粗糙集研究中,无论是在粗糙集系统理论、扩展模型,还是在粗糙集应用系统的研制开发上,都已经取得了非常丰富的成果,如在机器学习、专家系统、智能决策、海量数据分析、模糊推理、复杂问题求解、医疗诊断、故障分析等领域均有出色的应用.结合模糊集理论,粗糙模糊集和模糊粗糙集相继被提出,并在不同的领域得到应用.粗糙模糊集解决了在 Pawlak 近似空间下,目标概念是模糊概念(模糊集)时的近似刻画问题,主要用上、下两个近似模糊集作为目标模糊集的边界,但没有提出在当前知识基下如何用一个集合(模糊集或精确集)作为目标集合的近似集的问题.本文从一个新视角提出如何用一个模糊集或精确集来近似刻画粗糙模糊集的问题.论文首先定义了 Pawlak 近似空间 U/R 下的均值模糊集、阶梯模糊集、0.5-精确集等概念,然后给出模糊集之间相似度(近似度)的概念,构造了一个物理意义非常清晰的相似度公式,分析得出均值模糊集是所有阶梯模糊集中与目标概念最接近的模糊集的结论,也得到在 U/R 下 0.5-精确集是与目标概念最接近的精确集的结论.另外,从粒计算的角度分析了在不同知识粒度下,均值模糊集和 0.5-精确集与目标模糊集的相似度的变化规律.这些方法从一个新侧面来刻画模糊集的不确定概念,构造出模糊集的近似集,有利于促进模糊决策和模糊划分的研究.实际问题中,一个不确定性问题(如边界不清晰问题)往往会引起矛盾,这些不确定性往往来自两个方面:一方面是知识基的不确定,另一方面是目标概念的不确定,解决这种不确定(或争端问题)的关键在于给出目标概念在当前知识基下的一个近似集,而不是仅仅给出不确定问题(会引起争端问题)的边界线.希望这些研究工作能够推动不确定人工智能的发展,扩展粗糙集理论、粗糙模糊集理论、模糊粗糙集理论等的应用范围.在今后的研究中,我们将致力于用近似集来实现决策规则的提取,实现模糊图像的近似分割等.

致 谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行,尤其是对论文给予评审并提出宝贵意见的专家表示深深的感谢!

参 考 文 献

[1] Li De-Yi, Liu Chang-Yu, Du Yi, Han Xu. Artificial intelligence with uncertainty. Journal of Software, 2004, 15(11): 1583-1594(in Chinese)
(李德毅,刘常昱,杜鹢,韩旭. 不确定性人工智能. 软件学报,2004,15(11):1583-1594)

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353

[3] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356

[4] Zhang Ling, Zhang Bo. The Theory and Applications of Problem Solving-Quotient Space Based Granular Computing (The 2nd Version). Beijing: Tsinghua University Press, 2007(in Chinese)
(张铃,张钹. 问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及其应用(第 2 版). 北京:清华大学出版社,2007)

[5] Li De-Yi, Meng Hai-Jun, Shi Xue-Mei. Membership clouds and membership cloud generators. Journal of Computer Research and Development, 1995, 32(6): 16-18(in Chinese)
(李德毅,孟海军,史雪梅. 隶属云和隶属云发生器. 计算机研究与发展,1995,32(6):16-18)

[6] Li De-Yi, Du Yi. Artificial Intelligence with Uncertainty. Beijing: National Defence Industry Press, 2005(in Chinese)
(李德毅，杜鹢. 不确定性人工智能. 北京：国防工业出版社，2005)

[7] Wang Guo-Yin, Xu Chang-Lin, Zhang Qing-Hua, Wang Xiao-Rong. A multi-step backward cloud generator algorithm// Proceedings of the 8th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Chengdu, China, 2012: 313-322

[8] Wang Guo-Yin, Xu Chang-Lin. Cloud model—A bidirectional cognition model between concept's extension and intension// Proceedings of the 1st International Conference on Advanced Machine Learning Technologies and Applications. Cairo, Egypt, 2012: 391-400

[9] Wang Guo-Yin, Li De-Yi, Yao Yi-Yu, et al. Cloud Model and Granular Computing. Beijing: Science Press, 2012(in Chinese)
(王国胤，李德毅，姚一豫等. 云模型与粒计算. 北京：科学出版社，2012)

[10] Miao Duo-Qian, Li De-Yi, Yao Yi-Yu, et al. Uncertainty and Granular Computing. Beijing: Science Press, 2011(in Chinese)
(苗夺谦，李德毅，姚一豫等. 不确定性与粒计算. 北京：科学出版社，2011)

[11] Miao Duo-Qian, Xu Fei-Fei, Yao Yi-Yu, Wei Lai. Set-theoretic formulation of granular computing. Chinese Journal of Computers, 2012, 35(2): 351-363(in Chinese)
(苗夺谦，徐菲菲，姚一豫，魏莱. 粒计算的集合论描述. 计算机学报，2012，35(2)：351-363)

[12] Miao Duo-Qian, Wang Jue. An information representation of the concepts and operations in rough set theory. Journal of Software, 1999, 10(2): 113-116(in Chinese)
(苗夺谦，王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示. 软件学报，1999，10(2)：113-116)

[13] Qian Yu-Hua, Liang Ji-Ye, Pedrycz W, Dang Chuang-Yin. Positive approximation: An accelerator for attribute reduction in rough set theory. Artificial Intelligence, 2010, 174(9-10): 597-618

[14] Liang Ji-Ye, Wang Jun-Hong, Qian Yu-Hua. A new measure of uncertainty based on knowledge granulation for rough sets. Information Sciences, 2009, 179(4): 458-470

[15] Liang Ji-Ye, Qian Yu-Hua. Granulation monotonicity of entropy measure in information systems. Journal of Shanxi University (Natural Science Edition), 2007, 30(2): 156-162 (in Chinese)
(梁吉业，钱宇华. 信息系统中熵度量的粒化单调性. 山西大学学报(自然科学版)，2007，30(2)：156-162)

[16] Liang J Y, Shi Z Z. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2004, 12(1): 37-46

[17] Yao Y Y. Probabilistic rough set approximations. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49(2): 255-271

[18] Yao Y, Zhou B. Naive Bayesian rough sets//Proceedings of the 5th International Conference on Rough Set and Knowledge Technology. Beijing, China, 2010: 719-726

[19] Yao Y Y. Two semantic issues in a probabilistic rough set model. Fundamenta Informaticae, 2011, 108(3): 249-265

[20] Wang Guo-Yin, Miao Duo-Qian, Zhou Zhi-Hua, et al. Uncertain knowledge representation and processing based on rough set. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2010, 22(5): 541-544(in Chinese)
(王国胤，苗夺谦，周志华等. 不确定信息的粗糙集表示和处理. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2010，22(5)：541-544)

[21] Wang Guo-Yin, Zhang Qing-Hua. Uncertainty of rough sets in different knowledge granularities. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(9): 1588-1598(in Chinese)
(王国胤，张清华. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究. 计算机学报，2008，31(9)：1588-1598)

[22] Zhang Qing-Hua, Wang Guo-Yin, Xiao Yu. Approximation sets of rough sets. Journal of Software, 2012, 23(7): 1745-1759(in Chinese)
(张清华，王国胤，肖雨. 粗糙集的近似集. 软件学报，2012，23(7)：1745-1759)

[23] Wang Guo-Yin, Zhang Qing-Hua, Ma Xi-Ao, Yang Qing-Shan. Granular computing models for knowledge uncertainty. Journal of Software, 2011, 22(4): 676-694(in Chinese)
(王国胤，张清华，马希骜，杨青山. 知识不确定性问题的粒计算模型. 软件学报，2011，22(4)：676-694)

[24] Zhang Q, Wang G. The uncertainty measure of hierarchical quotient space structure. Mathematical Problems in Engineering, 2011

[25] Hu Jun, Wang Guo-Yin. Uncertainty measure rules sets of rough sets. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2010, 23(5): 606-614(in Chinese)
(胡军，王国胤. 粗糙集的不确定性度量准则. 模式识别与人工智能，2010，23(5)：606-615)

[26] Zhang Qing-Hua, Wang Guo-Yin, Liu Xian-Quan. Hierarchical structure analysis of fuzzy quotient space. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2008, 21(5): 627-634(in Chinese)
(张清华，王国胤，刘显全. 分层递阶的模糊商空间结构分析. 模式识别与人工智能，2008，21(5)：627-634)

[27] Liu Jie, Chen Xiao-Ping, Cai Qing-Sheng, Fan Yan. Recognition structure of uncertainty: A unified framework for representation, reasoning and learning. Journal of Software, 2002, 13(4): 649-651(in Chinese)
(刘洁，陈小平，蔡庆生，范焱. 不确定信息的认知结构表示、推理和学习. 软件学报，2002，13(4)：649-651)

[28] Kline M, Li Hong-Kui Translate. Mathematics: The Loss of Certainty. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2007(in Chinese)
(克莱因著，李宏魁译. 数学：确定性的丧失. 长沙：湖南科技出版社，2007)

[29] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems, 1990, 17(2-3): 191-209

[30] Yao Y Y. A comparative study of fuzzy sets and rough sets. Information Sciences, 1998, 109(1): 227-242

[31] Wu Wei-Zhi, Zhang Wen-Xiu, Xu Zong-Ben. Constructive and axiomatic approached of the theory of rough sets. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(2): 197-202 (in Chinese)
(吴伟志，张文修，徐宗本. 粗糙模糊集的构造与公理化方法. 计算机学报，2004，27(2)：197-202)

[32] Guo Zeng-Xiao, Mu Ju-Sheng. An uncertainty measure in rough fuzzy sets. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 19(4): 135-140(in Chinese)
(郭增晓，米据生. 粗糙模糊集的模糊性度量. 模糊系统与数学，2005，19(4)：135-140)

[33] Wei Ben-Cheng, Zhang Cheng-Yi, Dang Ping-An. On measures of similarity between rough fuzzy sets, 2007, 37(17): 139-142(in Chinese)
(魏本成，张诚一，党平安. 关于粗糙模糊集的相似度量. 数学的实践与认识，2007，37(17)：139-142)

[34] Wang Guo-Yin. Rough Set Theory and Knowledge Discovery. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001(in Chinese)
(王国胤. Rough 集理论与知识获取. 西安：西安交通大学出版社，2001)

[35] Miao Duo-Qian, Wang Guo-Yin, Liu Qing, et al. Granular Computing: Past, Present and Future Prospects. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese)
(苗夺谦，王国胤，刘清等. 粒计算：过去、现在与展望. 北京：科学出版社，2007)

ZHANG Qing-Hua, born in 1974, Ph. D., professor. His research interests include rough set, granular computing, and uncertainty information processing etc.

WANG Jin, born in 1990, M. S. candidate. His research interests include rough set, granular computing.

WANG Guo-Yin, born in 1970, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His research interests include rough set, granular computing, data mining and knowledge technology etc.

Background

The approximation representation of an uncertain concept is an important issue in uncertainty artificial intelligence field. In our recent research, we find that an uncertain concept can be described with the upper-approximate set and lower-approximate set as its two boundaries, but there are few methods for constructing a fuzzy approximation set or a crisp approximation set of an uncertain concept in Pawlak's rough set model. So, in our previous work, an approximation set of rough set was defined from a new viewpoint, and we found that some change regularities of the similarity between the uncertain concept (set) and its approximate set with the changing knowledge granularity in different knowledge granularity space.

Rough-fuzzy set can describe a fuzzy set (or an uncertain concept) with upper-approximation fuzzy set and lower-approximation fuzzy set in Pawlak's knowledge space. Though analysis lots of references, we find there are few methods for constructing a fuzzy approximation set or a crisp approximation set of a target fuzzy concept in the current knowledge base. An approximate set of a fuzzy set is very important to fuzzy partition and fuzzy image segmentation. Based on our previous work, in this paper the concept of similarity is presented first, and then the definitions of step-fuzzy set, average-fuzzy set and 0.5-crisp set of a fuzzy are proposed in the knowledge space U/R. We find that the average-fuzzy set is the best fuzzy approximation set of the target fuzzy set in all step-fuzzy sets and the 0.5-crisp set also is the best crisp approximation set of the target fuzzy set in all crisp sets in Pawlak's knowledge space. Moreover, the similarity degree between the average-fuzzy set and the target fuzzy, and the similarity degree between the 0.5-crisp set and the target fuzzy are analyzed in detail respectively and the change rules of these similarity degree with the changing knowledge granularity are given.

This research work is supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 61472056, 61272060, 61379114), the Chongqing Natural Science Foundation (No. cstc2012jjA40047) and the Research Foundation for the Doctoral Program of Chongqing University of Posts and Telecommunications (No. A2010-06).