

基于必然属性分析的粒描述

智慧来¹⁾ 李金海^{2),3)}

¹⁾(河南理工大学计算机科学与技术学院 河南 焦作 454000)

²⁾(昆明理工大学数据科学研究中心 昆明 650500)

³⁾(昆明理工大学理学院 昆明 650500)

摘 要 粒计算是在 Zadeh 教授提出的模糊信息粒化思想的基础上,逐渐发展起来的一个有效处理信息的数学工具.粒计算利用粒化信息的思想解决复杂问题,而在信息粒化的过程中通常都伴随着粒描述.所谓粒描述,是指在明确粒化准则的情况下如何描述目标概念或论域子集.因此,粒描述是采用粒计算思维解决复杂问题的前提和基础,进一步研究将有利于粒的理解与解释.众所周知,现有的粒描述主要集中在共性属性分析的基础上开展相关研究,其核心理论工具是形式概念分析与粗糙集.共性属性分析刻画了粒的共性,即粒中每个对象均拥有的属性.然而,现实中一个粒具有的属性有时不单指粒中所有对象共同拥有的属性,还有可能指粒中部分对象共同拥有的属性,甚至有时只需要粒中存在一个对象拥有该属性即可.实际上,共性属性分析强调的是所有对象共同拥有的属性才是这个粒的属性.与共性属性分析不同,必然属性分析强调的是只属于这个粒的属性才是它的属性.换言之,必然属性分析讨论粒描述时,除了涉及所有对象共同拥有的属性,还可能涉及部分对象共同拥有的属性.目前,从必然属性分析的角度研究粒描述尚未被详细讨论.该文基于形式概念分析中粒的思想和粗糙集理论中上、下近似的方法对这一问题展开研究.首先,介绍了必然属性分析视角下的粒描述逻辑.其次,分别基于形式背景及其补背景研究了粒描述.具体地,利用形式背景描述粒具有的必然属性,利用补背景描述粒不具有的必然属性.此外,定义了一元描述子用来特指形式背景及其补背景的面向对象概念格中的概念内涵,进而通过一个一元描述子刻画一个一元可定义粒,将一对一元描述子作为上、下近似以刻画一个一元不可定义粒.然后,为了同时使用形式背景及其补背景的信息,提出了基于必然属性分析的三支概念格,并定义二元描述子用来特指基于必然属性分析的三支概念格中的概念内涵,进而由一个二元描述子刻画一个二元可定义粒,将一对二元描述子作为上、下近似以刻画一个二元不可定义粒.最后,比较了三种近似描述的精度.有关结论表明基于二元描述子的近似描述方法优于基于一元描述子的近似描述方法,而基于一元描述子的近似描述方法又优于基于形式背景及其补背景的面向对象概念格的方法.

关键词 粒计算;粒描述;形式概念分析;必然属性分析;粗糙集;三支概念格

中图法分类号 TP18 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2018.02702

Granule Description Based on Necessary Attribute Analysis

ZHI Hui-Lai¹⁾ LI Jin-Hai^{2),3)}

¹⁾(School of Computer Science and Technology, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000)

²⁾(Data Science Research Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500)

³⁾(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500)

Abstract Granular computing is an effective mathematical tool of dealing with information and can be considered as an extension of the idea of fuzzy information granularity proposed by professor Zadeh. To the best of our knowledge, granular computing solves complicated problems via information granularity. It should be pointed out that information granularity is often accompanied by granule description. The so-called granule description is to describe a target concept or a subset

of a universe of discourse when specific granularity principles are not available. Therefore, granule description is the foundation and basis of solving complicated problems by granular computing, and any further researches can be beneficial to the understanding and explanation of granules. As is well-known, the existing study on granule description is mainly based on common attribute analysis, and the key theoretical tools are formal concept analysis and rough set. Common attribute analysis characterizes the commonness of a granule by extracting the common attributes possessed by all the objects of the granule. However, an attribute a granule has in the real world, may not only be the one possessed by all the objects of the granule, but also be the one possessed by part of objects of the granule, or even sometimes the one possessed by an object of the granule. In fact, common attribute analysis emphasizes that the attribute a granule has must be the one possessed by all the objects of the granule. Different from common attribute analysis, necessary attribute analysis emphasizes that the attribute a granule has is the one belonging to the granule only. In other words, besides the attributes possessed by all the objects of a granule, necessary attribute analysis of granule description may also involve the attributes possessed by part of objects of the granule. Currently, it still lacks of a thorough study on granule description from the perspective of necessary attribute analysis. In this paper, this problem is investigated by incorporating the idea of granules from formal concept analysis and the methods of upper and lower approximations from rough set theory. At the beginning, necessary attribute analysis based granule description logic is introduced. After that, granule description is studied in formal contexts and their complements, respectively. Specifically, in formal contexts, granules are described with the necessary attributes they have, and in complement contexts, they are described with the necessary attributes they do not have. Besides, unary descriptors are defined to express the intents of concepts of the object-oriented concept lattices of a formal context and its complement, and a unary definable granule is described by one unary descriptor while a unary indefinable granule is described by a pair of unary descriptors called as the upper and lower approximation descriptions. And then, in order to use the information from both a formal context and its complement, necessary attribute analysis based three-way concept lattices are proposed, and binary descriptors are defined to express the intents of concepts of necessary attribute analysis based three-way concept lattices. Also, a binary definable granule is described by a binary descriptor while a binary indefinable granule is described by a pair of binary descriptors called as the upper and lower approximation descriptions. Finally, three types of approximate description methods are compared with each other in terms of description accuracy. The obtained results show that the binary descriptor based approximate description method is superior to the unary descriptor based approximate description method which is superior to those by using the object-oriented concept lattices of a formal context and its complement.

Keywords granular computing; granule description; formal concept analysis; necessary attribute analysis; rough set; three-way concept lattice

1 引言

粒计算(Granular Computing)是一种看待客观事物的世界观和方法论. 随着 Zadeh 教授对模糊信息粒化思想的逐步完善^[1], 研究人员对信息粒化的

兴趣愈发浓厚. Zadeh 教授认为很多领域都存在信息粒的概念, 只是在不同领域中它的表现形式会有一定差异. 实际上, 信息粒是对现实事物的一种抽象, 信息粒化是人类处理和存储信息的一种具体反映. 粒计算通常把复杂问题进行抽象、分解、转化, 从而得到若干相对简单的子问题, 以实现复杂问题的

简易求解^[2-4].

信息化是实现粒计算的前提和基础,它可以看作是问题空间的一个划分过程.在给定粒化准则的情况下,信息粒化能够产生一系列描述问题空间的信息粒.这些粒之间再配备相应的偏序关系就构成多层次的粒结构.粒计算通过不同粒层上粒之间的转换与推理,以及同一粒层上粒之间的相互交互实现复杂问题求解^[5-6].粒计算的很多思想在许多领域中得到了应用,如结构化问题求解、结构化信息处理、结构化哲学思维^[7-9].从某种意义上,所有采用这一思维方式解决问题的方法都属于粒计算的研究内容.需要指出的是,采用不同的粒化方法,可以得到既有区别又有联系的粒计算模型.

在利用粒计算思想求解复杂问题时,依据一定准则划分问题空间,得到问题空间的子集,称为粒.然而,若事先没有给出或者没有明确给出问题空间的划分准则,如何来描述问题空间的子集?则称这个问题为粒描述,它是粒计算领域中公认的重要问题之一.实际上,深入研究粒的描述,不仅能加深对粒的理解,并且对回答“为什么有的概念复杂且难以理解,而有的概念则相对简单”这一认知科学中的基本问题有很大帮助^[10].广义上,只要是对问题空间子集进行描述的工作都属于粒描述的研究范畴.狭义的粒描述是指给定一个粒,找到描述这个粒的逻辑公式.

巧合的是,粗糙集^[11]与形式概念分析^[12]在同一年被提出.有学者已阐明这两个理论实际上存在诸多互补性^[13-16].不仅如此,它们均被认为是一种有效的粒计算方法^[17-19].基于粗糙集的粒描述和基于形式概念分析的粒描述本质上是一致的,即依据一定的准则划分论域,得到粒的集合,进而利用近似刻画的方式描述原始划分准则所不能描述的目标概念或论域子集.不同的是基于形式概念分析的方法不仅得到了粒的集合,而且还建立了粒的偏序关系,并赋予每个粒一个特定的属性标签.所以,两者的区别在于基于粗糙集的粒描述是直接给出目标对象集的近似集,而基于形式概念分析的粒描述可以显式地给出目标对象集的属性刻画.另外,考虑到对象与属性之间可以定义 Galois 连接,因此这两种描述方式又是紧密联系的.

形式概念分析是研究知识表示的一种有效数学工具,它的核心数据结构概念格是对概念及其层次关系的描述,在一定程度上是对客观事物的一种高度简化的抽象粒描述^[20].由于该理论便于概

念结构的开发与讨论,在某种意义上,概念格已成为一种外部认知的手段,并在人工智能领域有广泛而成熟的应用基础^[21-23].此外,研究人员在形式概念分析中引入粒计算思想,得到了一系列成果,如粒规则获取^[24]、粒概念学习^[25-26]、充分必要信息粒转化^[19,27-28]、粒约简^[29-30]、概念粒计算系统构建^[31]等.

粗糙集是一个处理不确定性的数学工具.运用该理论的特点在于求解问题时无需提供问题空间之外的任何先验知识,其有效性已从许多领域的成功应用中得到证实.目前,基于粗糙集的知识表示与处理是人工智能领域中的热点研究问题之一^[17,32-35].粒计算思想在粗糙集中主要体现在粒规则与粒约简等方面^[36-37].此外,为了适应多源信息处理,多粒度粗糙集^[38]一经提出便受到广泛关注,并扩展到模糊、邻域、覆盖等类型的信息系统^[39-42].另外,钱宇华等还提出了局部多粒度粗糙集^[43],折延宏和贺晓丽使用多值逻辑方法论述了多粒度粗糙集的内部结构^[44].

狭义的粒描述已有一些探讨.文献^[45]研究了粒的共性属性以及粒的稳定性,提出了基于形式概念分析的粒描述.在该文中,首先将粒分成原子粒,基本粒和复合粒三类;然后根据描述逻辑公式中采用的不同连接符提出了 \wedge -可定义粒、 (\wedge, \neg) -可定义粒以及 (\wedge, \vee) -可定义粒,并针对每一种粒分别讨论了粒的描述方法.从目前已开展的研究不难看出,能够被完全描述的粒仅仅只是少数,大量的粒是不能被完全描述的.因此,在该文结尾部分又提出了粒的近似描述问题.文献^[46]融合形式概念分析和粗糙集,提出将粗糙可定义粒作为基本粒,利用一对粗糙可定义粒来近似描述粗糙不可定义粒.实际上,在语义上粗糙可定义粒与面向对象概念格中的面向对象概念外延等价.

文献^[45]基于共性属性讨论了信息粒的描述问题.在实际应用中,基于共性属性的粒描述是十分常见的.例如,为了提升企业的核心竞争力,企业通常需要分析每个员工的特点并挖掘出员工的共性,以便有针对性地展开培训.但是,共性属性分析有时会存在缺陷,比如分析企业下属部门员工具备哪些技能,能够承担哪类任务,这种情况下基于共性属性分析就不能较好地解决问题.详细的讨论见例 1.

例 1. 一个文秘办公室有 4 个员工,员工熟练掌握的技能包括英文写作、LaTeX 排版、WPS 排版、新闻报道.每个员工具体掌握的技能如表 1 所示,其中数字“1”表示员工具有相应列的技能,数字“0”表示员工不具有相应列的技能.

表 1 文秘办公室员工技能统计

	英文写作	LaTeX 排版	WPS 排版	新闻报道
员工 1	1	0	1	0
员工 2	1	1	0	0
员工 3	1	0	1	1
员工 4	0	1	0	0

假设对象粒由员工 1、2 和 3 共同组成. 下面讨论共性属性分析存在的缺陷.

显然, 使用共性属性分析可以得到员工掌握的共同技能, 比如员工 1、2 和 3 都熟练掌握了英文写作. 但是, 该方法并不能得到员工 1、2 和 3 还掌握了哪些其他员工(员工 1、2 和 3 这个整体之外的员工)所不具有的技能. 例如, 员工 1、2 和 3 除了可以熟练进行英文写作外, 这个整体中的某些人(显然可以代表员工 1、2 和 3 这个整体)还胜任 WPS 排版和新闻报道的工作, 这两个技能也是员工 1、2 和 3 这个整体所独有的, 但是使用共性属性分析无法获得它们. 此时, 若文秘办公室需要完成对外宣传, 就可以将任务(英文写作, WPS 排版和新闻报道)分配给员工 1、2 和 3 这个整体. 显而易见, 使用共性属性分析不能完成这个任务的分配. 此外, 需要指出的是, 虽然员工 2 还掌握了 LaTeX 排版, 但是员工 4 也掌握了 LaTeX 排版, 因此 LaTeX 排版不是员工 1、2 和 3 这个整体所掌握的独有技能.

上述问题实际上描述了对象群体的必然属性, 也就是只属于这个对象群体的属性(显然, 基于共性属性分析的粒描述无法胜任此类问题). 类似的问题在许多领域都广泛存在. 因此, 从必然属性分析的角度研究粒描述, 是一个与基于共性属性分析的粒描述有着同等研究意义的重要课题.

需要指出的是, 面向对象概念格是进行必然属性分析的一个有力工具, 并已有一些相关的研究成果^[47-54]. 例如, 受面向属性概念格启发^[48], Yao 结合粗糙集与形式概念分析定义了必然属性分析算子, 并研究了与共性属性分析算子之间的关系^[47, 49]. Medina 研究了概念格、面向对象概念格、面向属性概念格之间的关联^[50-51]. 文献^[52]提出了一种快速构造面向对象概念格的算法. 此外, Shao 等人提出了基于面向对象概念格的属性约简方法^[53], Wang 和 Zhang 进一步阐述了基于面向对象概念格与基于面向属性概念格的两种约简方法之间的联系^[54].

围绕上述问题, 并受面向对象概念格启发, 本文研究基于必然属性分析的粒描述. 具体地, 首先提出基于必然属性的粒描述逻辑; 然后给出一元可定义

粒、一元描述子、二元可定义粒以及二元描述子, 在此基础上讨论一元不可定义粒和二元不可定义粒的近似描述; 最后, 对相关研究成果作了比较分析, 并指出今后需要进一步探讨的若干问题.

2 基本概念

为了本文内容的完整性以及方便读者阅读, 这一节介绍下文中即将涉及到的基本概念.

2.1 必然属性与面向对象概念格

众所周知, 形式背景是形式概念分析中最基本的概念.

定义 1^[12]. 一个形式背景 $K=(G, M, I)$ 是由两个集合 G 和 M 以及它们之间的二元关系 I 组成. G 的元素称为对象, M 的元素称为属性, $(g, m) \in I$ 或 gIm 表示对象 g 拥有属性 m .

为了方便, 记对象 g 所拥有的属性构成的集合为 $g^* = \{m \in M | gIm\}$, 拥有属性 m 的对象构成的集合为 $m^* = \{g \in G | gIm\}$.

定义 2^[47-48]. 在形式背景 $K=(G, M, I)$ 中, 设 $A \subseteq G, B \subseteq M$, 定义

$$A^\square = \{m \in M | m^* \subseteq A\} \quad (1)$$

$$B^\diamond = \{g \in G | g^* \cap B \neq \emptyset\} \quad (2)$$

通常, \square 称为必然性算子, \diamond 称为可能性算子. A^\square 是 A 的所有必然属性组成的集合, B^\diamond 是具有必然属性 B 的最小对象集.

定义 3^[47]. 在形式背景 $K=(G, M, I)$ 中, 如果 $A \subseteq G, B \subseteq M, A = B^\diamond$ 且 $B = A^\square$, 则称二元组 $C=(A, B)$ 是一个面向对象概念, A 是面向对象概念 C 的外延, B 是面向对象概念 C 的内涵.

定义 4^[47]. 设 $C_1=(A_1, B_1)$ 和 $C_2=(A_2, B_2)$ 是形式背景 $K=(G, M, I)$ 的两个面向对象概念, 定义 $C_1 \leq C_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$, 并称 C_2 是 C_1 的父概念, C_1 是 C_2 的子概念, 称 \leq 为概念之间的层次序.

形式背景 $K=(G, M, I)$ 的所有面向对象概念通过层次序构成一个完备格, 称为面向对象概念格, 记为 $L(G, M, I)$. 若概念 $C_1 \leq C_2$, 且不存在概念 C_3 使得 $C_1 \leq C_3 \leq C_2$, 则称 C_2 是 C_1 的上近邻, 或 C_1 是 C_2 的下近邻, 并分别记为 $C_1 < C_2$ 和 $C_2 > C_1$.

定义 5^[47]. 在面向对象概念格 $L(G, M, I)$ 中, 如果一个概念具有形式 $((g^\square)^\diamond, g^\square)$ 且 $g \in G$, 则称 $((g^\square)^\diamond, g^\square)$ 是一个对象诱导的面向对象概念, g 是 $((g^\square)^\diamond, g^\square)$ 的对象标签; 类似地, 如果一个概念具有形式 $(m^\diamond, (m^\diamond)^\square)$ 且 $m \in M$, 则称 $(m^\diamond,$

$(m^\diamond)^\square$) 是一个属性诱导的面向对象概念, m 是 $(m^\diamond, (m^\diamond)^\square)$ 的属性标签.

在不产生歧义的情况下, 面向对象概念简称为概念, 面向对象概念格简称为概念格.

定理 1^[49]. 在面向对象概念格 $L(G, M, I)$ 中, 任意两个概念 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ 的下确界和上确界分别定义为

$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = ((A_1 \cap A_2)^\square, B_1 \cap B_2) \quad (3)$$

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = (A_1 \cup A_2, (B_1 \cup B_2)^\square) \quad (4)$$

面向对象概念格的构造算法可以参考文献[52], 也可以根据 Wille 概念格与面向对象概念格算子之间的关系, 通过修改 Wille 概念格的构造算法得到.

2.2 粗糙集

为方便起见, 下面的定义用等价关系代替划分.

定义 6^[11]. 一个近似空间定义为一个关系系统 $S = (U, R)$, 其中非空集合 U 是论域, R 是 U 上等价关系的一个集族.

定义 7^[11]. 设 $P \subseteq R$, 且 $P \neq \emptyset$, 称 P 中所有等价关系的交集为 P 诱导的一个不可区分关系, 记作 $IND(P)$. 进一步, 不可区分关系产生的等价类之间满足下列式子:

$$[x]_{IND(P)} = \bigcap_{p \in P} [x]_p \quad (5)$$

定义 8^[11]. 给定近似空间 $S = (U, R)$, 称 $X \subseteq U$ 为 U 上的一个概念. 形式上, 空集也视为一个概念. 非空子集 $P \subseteq R$ 所诱导的不可区分关系 $IND(P)$ 的所有等价类组成的集合称为基本知识, 相应的等价类称为基本概念.

定义 9^[11]. 给定近似空间 $S = (U, R)$, 子集 $X \subseteq U$. X 的下近似和上近似分别定义为

$$R_*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\} \quad (6)$$

$$R^*(X) = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \quad (7)$$

进一步, 定义 X 的边界域为

$$BN_R = R^*(X) - R_*(X) \quad (8)$$

若 $BN_R \neq \emptyset$, 则集合 X 就是一个粗糙集.

下近似 $R_*(X)$ 是 X 肯定包含的基本知识组成的集合, 它包括了所有使用知识 R 可确切分类到 X 中的元素; 上近似 $R^*(X)$ 是 X 可能包含的基本知识组成的集合, 它包括了所有使用知识 R 可能分类到 X 中的元素. 边界域则由不能肯定分类到这个子集或其补集中的所有元素组成.

需要指出的是, 文献[46]融合形式概念分析与粗糙集, 提出了粗糙可定义粒, 并以对象诱导的面向对象概念的外延作为基本粒, 通过一对基本粒近似描述其它粗糙不可定义粒. 在本文中, 充分借鉴了上

近似和下近似描述不可定义粒的思想.

3 粒的描述逻辑语言

本文中粒的描述语言采用粗糙集中的决策逻辑辑^[55-56], 并对其进行部分修正和扩展以适应基于必然属性的分析与推理.

描述逻辑语言建立在一组原子公式的基础上, 这些原子公式构成了复杂知识表示的基础. 语义上, 一个原子公式描述对象的一个属性, 并用小写英文字母表示, 例如 a, b, c, d 等.

以原子公式作为基础, 通过使用逻辑连接符 $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ 和 \leftrightarrow , 以递归的方式可以构造更加复杂的逻辑表达式. 形式化地, 若 φ 和 ψ 是逻辑式, 那么 $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi$ 和 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 也都是逻辑式.

给定一个论域 G , 所有可能的粒组成 G 的幂集, 记作 2^G . 描述论域 G 的属性集用 M 表示, 论域中对象和属性的关系用二元关系 $I: G \times M \rightarrow \{0, 1\}$ 表示. 因此, 可以通过一个形式背景 $K = (G, M, I)$ 描述一个论域.

定义 10. 给定一个粒 $X \in 2^G$ 和一个属性集 A , 若对于任意的 $a \in A$, 都有 $a^* \subseteq X$, 则称 X 必然具有属性集 A , 并记作 $X \mapsto A$.

进一步, 当属性集由逻辑式表达, 下列式子的语义定义为

$$X \mapsto A \wedge B \Leftrightarrow (X \mapsto A) \wedge (X \mapsto B);$$

$$X \mapsto A \vee B \Leftrightarrow (X \mapsto A) \vee (X \mapsto B);$$

$$X \mapsto \neg A \Leftrightarrow \sim X \mapsto A;$$

$$X \mapsto A \rightarrow B \Leftrightarrow (X \mapsto A) \rightarrow (X \mapsto B);$$

$$X \mapsto A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (X \mapsto A) \leftrightarrow (X \mapsto B).$$

在文献[45]中, 从共性属性的角度研究信息粒的描述: 给定一个信息粒 $X \in 2^G$ 和一个属性集 A , 若对于任意的 $a \in A, x \in X$, 都有 xIa , 则称 X 具有属性集 A . 显然, 本文的研究角度与文献[45]完全不同. 本文研究对象的必然属性, 而文献[45]研究对象的共有属性.

为了得到必然属性分析的粒描述逻辑语言, 下面讨论共有属性分析的粒描述逻辑语言的一些性质. 对于一个属性的合取式 φ , 记其中包含的文字为 $\|\varphi\|$.

定义 11. 给定一个属性的合取式 φ , 称

$$m(\varphi) = \{x \in G \mid x \rightarrow \|\varphi\|\} \quad (9)$$

是 φ 的外延. 其中, 集合内的约束条件表示对象具有合取式的所有共有属性. 若 $m^{-1}(X) = \varphi$ 且 $m(\varphi) = X$, 则称 φ 是 X 的描述.

为了叙述方便,在下文中用 $d(X)$ 代替 $m^{-1}(X)$ 来表示 X 的描述.

命题 1. 设 φ 和 ψ 是两个公式,则以下命题成立:

- (1) $m(\neg\varphi) = G - m(\varphi)$;
- (2) $m(\varphi \wedge \psi) = m(\varphi) \cap m(\psi)$;
- (3) $m(\varphi \vee \psi) = m(\varphi) \cup m(\psi)$;
- (4) $m(\varphi \rightarrow \psi) = (G - m(\varphi)) \cup m(\psi)$.

定义 12^[45]. 设 X 是形式背景 $K = (G, M, I)$ 的一个粒, φ 是一个公式. 则 φ 对于 X 的查全率和查准率分别定义如下:

$$\alpha(\varphi, X) = \frac{|m(\varphi) \cap X|}{|X|}, \beta(\varphi, X) = \frac{|m(\varphi) \cap X|}{|m(\varphi)|} \quad (10)$$

在不引起歧义时,分别用 $\alpha(\varphi)$ 和 $\beta(\varphi)$ 代替 $\alpha(\varphi, X)$ 和 $\beta(\varphi, X)$.

实际上, $\alpha(\varphi, X)$ 刻画了能够准确描述的部分占粒 X 的比例, $\beta(\varphi, X)$ 刻画了能够准确描述的部分占 φ 的外延的比例. $\alpha(\varphi, X)$ 和 $\beta(\varphi, X)$ 的值越大表明公式 φ 对粒 X 的描述越贴近. 实际上,粒描述的本质就是给定一个粒,找到查全率和查准率最大的公式.

命题 2. 设 φ 和 ψ 是两个公式,则下列命题成立:

- (1) $\alpha(\neg\varphi) = 1 - \alpha(\varphi)$;
- (2) $\alpha(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$;
- (3) $\alpha(\varphi \vee \psi) \geq \max(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$;
- (4) $\alpha(\varphi \vee \psi) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi) - \alpha(\varphi \wedge \psi)$.

命题 3. 设 φ 和 ψ 是两个公式,则下列命题不成立:

- (1) $\beta(\neg\varphi) = 1 - \beta(\varphi)$;
- (2) $\beta(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\beta(\varphi), \beta(\psi))$;
- (3) $\beta(\varphi \vee \psi) \geq \max(\beta(\varphi), \beta(\psi))$;
- (4) $\beta(\varphi \vee \psi) = \beta(\varphi) + \beta(\psi) - \beta(\varphi \wedge \psi)$.

4 基于一元描述子的粒描述

本小节研究基于一元描述子的粒描述. 具体地,定义正文字可定义粒和负文字可定义粒,这二者又统称为一元可定义粒,并将一元可定义粒的描述称为一元描述子. 为了更加简洁地刻画一元可定义粒,给出了面向对象概念的最小产生子,并提出计算最小产生子的方法. 此外,基于一元描述子还讨论了不可定义粒的近似描述.

下面先介绍必然属性分析视角下形式背景的属性特征.

4.1 形式背景的属性特征

对于一个形式背景,通常存在一些冗余属性,删除这些属性并不改变面向对象概念格的结构,反而能够简化概念单元.

定义 13^[20]. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景,称 $K_N = (G, N, I_N)$ 是 K 的一个子背景,其中 $N \subseteq M, I_N = I \cap (G \times N)$.

定义 14^[53-54]. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $N \subseteq M$. 若对任意面向对象概念 $(A, B) \in L(K)$, 存在 $(A, C) \in L(K_N)$, 则称 N 是 K 的一个协调集. 进一步,若 N 是 K 的一个协调集,且 N 的任意真子集都不是 K 的一个协调集,则称 N 是 K 的一个约简集,并称 $b \in M - N$ 为冗余属性.

定义 15^[53-54]. 若一个形式背景不存在冗余属性,则称这个形式背景为净化形式背景,并称净化形式背景的面向对象概念格为净化的面向对象概念格.

定义 16^[57]. 设 L_1, L_2 是两个完备格. 若对于任意两个元素 $a, b \in L_1$, 存在双射 $f: L_1 \rightarrow L_2$ 使得 $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ 成立,则称 L_1 与 L_2 同构.

显然,对于形式背景 $K = (G, M, I)$ 和子背景 $K_N = (G, N, I_N)$, 如果 N 是 K 的一个协调集,那么 $L(K)$ 与 $L(K_N)$ 同构.

下列定理 2 提供了一个识别冗余属性的方法.

定理 2. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $b \in M$. 如果存在若干属性 $b_i \in M - \{b\} (i=1, 2, \dots, t)$ 使得 $\bigcup_{i=1}^t b_i^* = b^*$, 那么 b 是一个冗余属性.

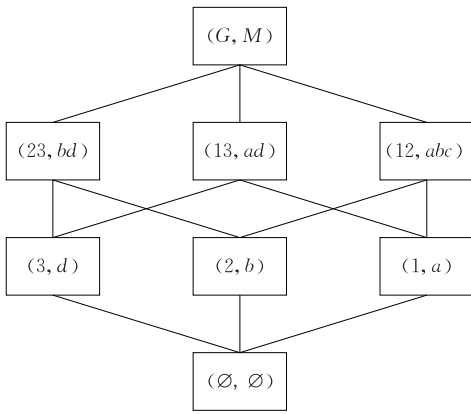
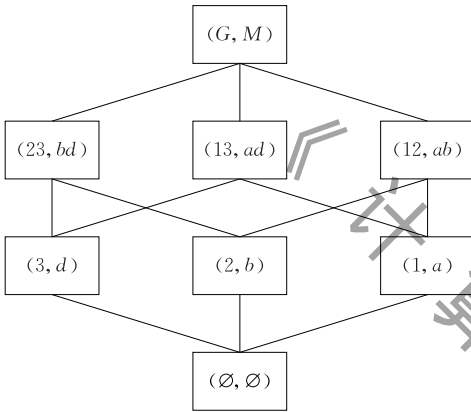
例 2. 形式背景 K_1 包含 3 个对象和 4 个属性,如表 2 所示. 显然有 $a^* \cup b^* = c^*$ 成立,因而根据定理 2, 可知 c 是一个冗余属性. 删除冗余属性后的净化形式背景 K_2 见表 3. 原形式背景的面向对象概念格 $L(K_1)$ 见图 1, 净化的形式背景的面向对象概念格 $L(K_2)$ 见图 2, 其中外延和内涵均采用了集合的缩写. 显然,面向对象概念格 $L(K_1)$ 与 $L(K_2)$ 同构.

表 2 非净化的形式背景 K_1

	a	b	c	d
1	1	0	1	0
2	0	1	1	0
3	0	0	0	1

表 3 净化的形式背景 K_2

	a	b	d
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

图 1 面向对象概念格 $L(K_1)$ 图 2 面向对象概念格 $L(K_2)$

4.2 正文字可定义粒的描述

本小节定义正文字可定义粒,并基于形式背景的面向对象概念格研究正文字可定义粒的描述问题.

定义 17. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \in 2^G$. 若存在正文字的析取式 φ 使得 $m(\varphi) = X$, 则称 X 为正文字可定义粒. 其中, $m(\varphi)$ 表示具有 φ 中所有必然属性的最小对象集.

显然,对于形式背景 $K = (G, M, I)$ 中的一个粒 $X \in 2^G$,若存在一个面向对象概念 $C \in L(K)$ 使得 C 的外延等于 X , 则 X 是一个正文字可定义粒.

换言之,对于一个正文字可定义粒 X ,一定存在一个正文字的析取式 φ 使得 $\alpha(\varphi, X) = 1, \beta(\varphi, X) = 1$.

对于一个正文字可定义粒 X ,若与其对应的面向对象概念为 (X, B) , 那么 X 的描述为(以下析取式的语义是指包含这些必然属性,区别于文献[45]的合取式的语义表示同时具有共有属性.)

$$d(X) = \bigvee_{a \in B} a \quad (11)$$

然而,对于一个正文字可定义粒 X ,集合 B 中的属性并不都是必须的.换言之,当删除 B 中的某些属性后,仍有可能准确描述这个粒 X .

在形式概念分析中,采用最小产生子(Minimal Generator)^[58]来表达一个概念的核心属性.有的文献亦称最小产生子为内涵亏值^[59].最小产生子在稳定性计算^[60]、粒的描述^[45]等问题中得到了广泛应用.受此启发,下列定义 18 也提出了面向对象概念的最小产生子.

定义 18. 对于给定的面向对象概念 $C = (X, B)$,如果属性集 $R \subseteq B$ 满足 $R^\diamond = B^\diamond = X$ 且对于任意的 $S \subseteq R$ 有 $S^\diamond \subset B^\diamond$, 则称 R 是 C 的一个最小产生子.在此基础上,若 T 满足 $R \subseteq T \subseteq B$, 则称 T 是 C 的一个内涵缩减集.

定理 3. 在一个净化的面向对象概念格中,若一个概念只有一个下近邻,则这个概念是一个属性诱导的面向对象概念.

定理 4. 在一个净化的面向对象概念格中,属性诱导的面向对象概念的最小产生子由这个概念的属性标签组成.

换言之,定理 3 和定理 4 分别给出了属性诱导的面向对象概念的识别及其最小产生子的构成.下面继续讨论非属性诱导的面向对象概念的最小产生子.

引理 1. 在面向对象概念格中,一个非属性诱导的面向对象概念至少有两个下近邻.

定义 19. 若 $B = \{b_i\}_{i \in T}$ (T 为指标集) 是一组属性,则定义集合 B 的约简为

$$\text{simp}(B) = B - \{b_i \in B \mid \exists b_j \in B, b_i^* \subseteq b_j^*\} \quad (12)$$

约定,具体操作时,式(12)中 b_j 覆盖 b_i 的作用可以由 B 中多个属性组合完成.

引理 2. 若 $B = \{b_i\}_{i \in T}$ (T 为指标集) 是一组属性,则有 $(\text{simp}(B))^\diamond = B^\diamond$.

引理 3. 一个非属性诱导的面向对象概念的一个内涵缩减集为它的任意两个下近邻的最小产生子的并集.

根据引理 1、引理 2 和引理 3 可以直接得到下面的定理 5.

定理 5. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个纯化的形式背景,若 $(A, B) \in L(K)$ 不是属性诱导的面向对象概念,则 (A, B) 的一个最小产生子为它任意两个下近邻的最小产生子的并的约简.

根据定理 4 和定理 5,下面提出计算面向对象概念最小产生子的方法:

若一个面向对象概念是属性诱导的,则它的最小产生子由它的属性标签组成(定理 4 的结论).否则,这个面向对象概念的一个最小产生子是它任意两个下近邻的最小产生子的并的约简.

综上所述,对于一个正文字可定义粒 X ,若与其

对应的面向对象概念为 (X, B) , 且 X 的最小产生子为 R , 那么 X 的最简描述为

$$d(X) = \bigvee_{r \in R} r \quad (13)$$

例 3. 考虑表 4 中的形式背景 K , 它的面向对象概念格如图 3 所示.

表 4 形式背景 K

	a	b	c	d	e	f
1	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	1	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	1
6	0	0	0	1	1	1

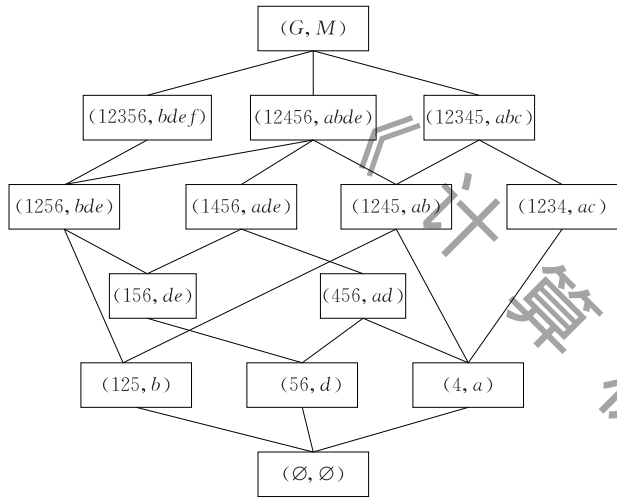


图 3 面向对象概念格 $L(K)$

形式背景 K 的非平凡正文字可定义粒如表 5 所示. 根据最小产生子可以直接得到粒的最简描述, 这里不再赘述.

表 5 正文字可定义粒

正文字可定义粒	面向对象概念	最小产生子
12356	$(12356, bdef)$	f
12456	$(12456, abde)$	abe
12345	$(12345, abc)$	bc
1256	$(1256, bde)$	be
1456	$(1456, ade)$	ae
1245	$(1245, ab)$	ab
1234	$(1234, ac)$	c
156	$(156, de)$	e
456	$(456, ad)$	ad
125	$(125, b)$	b
56	$(56, d)$	d
4	$(4, a)$	a

4.3 负文字可定义粒的描述

为了充分利用补背景的信息, 本小节讨论负文字可定义粒.

定义 20. 对于形式背景 $K = (G, M, I)$ 中的一个粒 $X \in 2^G$, 若存在负文字的析取式 φ 使得

$m(\varphi) = X$, 则称 X 为负文字可定义粒.

定义 21^[20]. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, 记 $I^c = G \times M - I$, 则称 $K^c = (G, M, I^c)$ 为 K 的补背景.

显然, 对于形式背景 $K = (G, M, I)$ 中的一个粒 $X \in 2^G$, 若存在一个面向对象概念 $(X, B) \in L(K^c)$, 则 X 是一个负文字可定义粒.

换言之, 对于一个负文字可定义粒 X , 一定存在负文字的析取式 φ 使得 $\alpha(\varphi, X) = 1$ 且 $\beta(\varphi, X) = 1$.

例 4. 表 4 中的形式背景的补背景 K^c 如表 6 所示, 其对应的面向对象概念格 $L(K^c)$ 见图 4.

表 6 补背景 K^c

	a	b	c	d	e	f
1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	1	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0

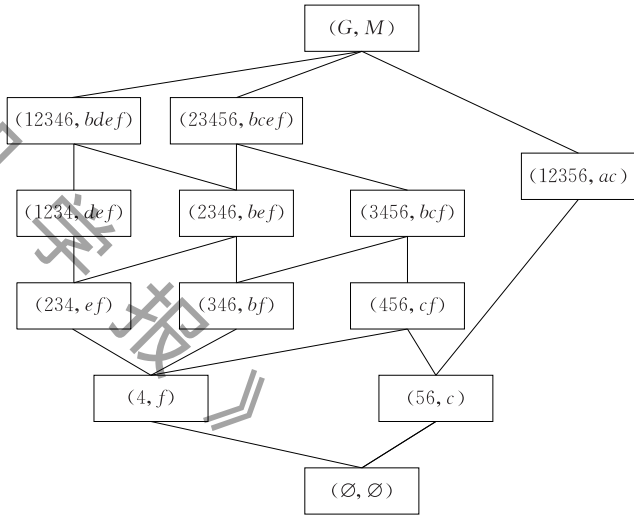


图 4 面向对象概念格 $L(K^c)$

在补背景 K^c 中, 存在 11 个非平凡的面向对象概念, 对应 11 个负文字可定义粒, 如表 7 所示.

表 7 负文字可定义粒

负文字可定义粒	面向对象概念	最小产生子
12346	$(12346, bdef)$	bd
23456	$(23456, bcef)$	ce
1234	$(1234, def)$	d
2346	$(2346, bef)$	be
3456	$(3456, bcf)$	bc
12356	$(12356, ac)$	a
234	$(234, ef)$	e
346	$(346, bf)$	b
456	$(456, cf)$	cf
4	$(4, f)$	f
56	$(56, c)$	c

对于一个负文字可定义粒 X , 若与其对应的面向对象概念为 (X, B) , 且 X 的最小产生子为 R , 那么 X 的最简描述为

$$d(X) = \bigvee_{r \in R} \neg r \quad (14)$$

4.4 一元不可定义粒的描述

对于一个给定的形式背景 K , 其正文字可定义粒与 K 的面向对象概念一一对应, 负文字可定义粒与其补背景 K^c 的面向对象概念一一对应. 但是正文字可定义粒与负文字可定义粒之间不存在直接的对应关系, 因为它们分别是基于原形式背景和补背景独立给出的.

定义 22. 一个形式背景中所有的正文字可定义粒和负文字可定义粒统称为一元可定义粒, 并称一元可定义粒的描述为一元描述子.

此外, 若一个粒不是一元可定义粒, 则称之为二元不可定义粒.

定义 23. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, g_U 是一元可定义粒的集合, $X \in 2^G$ 是一个一元不可定义粒. 若存在 $X_l, X_u \in g_U$ 使得 $X_l \subset X \subset X_u$, 且不存在 $X_l^*, X_u^* \in g_U$ 使得 $X_l \subset X_l^* \subset X \subset X_u^* \subset X_u$, 则称 X_l 和 X_u 分别是 X 的 U -下近似粒和 U -上近似粒, 且 X 的 U -近似描述为 $d_U(X) = [d(X_l), d(X_u)]$, X 的 U -近似描述精度为

$$\rho_U(X) = \frac{|X_l|}{|X_u|} \quad (15)$$

需要指出的是, X 的 U -近似描述可能不唯一, 此时每一个 U -近似描述对应着一个 U -近似描述精度. 因此, 从描述精度的角度而言, 本文认为描述精度最大的近似描述是 X 的最佳 U -近似描述.

下列算法 1 给出了基于一元描述子的一元不可定义粒的近似描述方法.

算法 1. 一元不可定义粒的 U -近似描述.

输入: 一元不可定义粒 $X \in 2^G$, 形式背景 $K = (G, M, I)$ 及其补背景 K^c 的面向对象概念格 $L(K)$ 和 $L(K^c)$

输出: X 的 U -近似描述

1. 遍历 $L(K)$, 查找满足 $X_l \subset X \subset X_u$ 的最大概念 (X_l, B_l) 和最小概念 (X_u, B_u) ;
 2. 遍历 $L(K^c)$, 查找满足 $X'_l \subset X \subset X'_u$ 的最大概念 (X'_l, B'_l) 和最小概念 (X'_u, B'_u) ;
 3. 计算 $X_l = \max\{X_l, X'_l\}$, $X_u = \min\{X_u, X'_u\}$;
 4. 计算 $d(X_l), d(X_u)$;
 5. 输出 X 的 U -近似描述 $[d(X_l), d(X_u)]$, 算法结束.
- 假设 $L(K)$ 有 n_1 个概念, $L(K^c)$ 有 n_2 个概念. 算

法 1 需要遍历形式背景及其补背景的面向对象概念格以找到上近似和下近似. 由于算法 1 可以利用概念之间的偏序关系缩小遍历范围, 因此访问概念的次数小于 $n_1 + n_2$.

例 5. 对于表 4 中的形式背景 K , 可以验证 $X = \{2, 3, 4, 5\}$ 是一个一元不可定义粒.

通过算法 1 计算 X 的 U -近似描述, 具体过程如下: 首先得到 X 的 U -下近似粒 $X_l = \max\{\{4\}, \{2, 3, 4\}\} = \{2, 3, 4\}$ 和 X 的 U -上近似粒 $X_u = \min\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$; 然后根据表 5 和表 7 中的计算结果, 得到 X 的 U -近似描述 $[d(\{2, 3, 4\}), d(\{1, 2, 3, 4, 5\})] = [\neg e, b \vee c]$ 或 $[d(\{2, 3, 4\}), d(\{2, 3, 4, 5, 6\})] = [\neg e, \neg c \vee \neg e]$, 并且 U -近似描述精度均为 $\rho_U(X) = 0.6$.

5 基于二元描述子的粒描述

在上一节中, 使用一元描述子描述了原形式背景或补背景中的可定义粒. 为了提高粒描述的精度, 需要同时利用原形式背景及其补背景的信息. 因此, 本小节继续提出不同于一元描述子的二元描述子, 它能够描述对象肯定具有的必然属性和肯定不具有的必然属性, 从而达到提高描述精度的目的.

为此, 先定义基于必然属性分析的三支概念格.

5.1 N -三支概念与 N -三支概念格

令 M 是一个属性集, $2^M \times 2^M$ 是 2^M 和 2^M 的笛卡尔积. 定义 $2^M \times 2^M$ 上的偏序关系 \leq 如下:

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2, B_1 \subseteq B_2 \quad (16)$$

此外,

$$(A_1, B_1) \cap (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \quad (17)$$

$$(A_1, B_1) \cup (A_2, B_2) = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \quad (18)$$

定义 24. 在形式背景 $K = (G, M, I)$ 中, 对于 $X \subseteq G, A, B \subseteq M$, 定义一对算子 $p: 2^G \rightarrow 2^M \times 2^M$ 和 $q: 2^M \times 2^M \rightarrow 2^G$ 如下:

$$X^p = (X^\square, X^\bar{\square}), (A, B)^q = A^\diamond \cup B^{\bar{\diamond}} \quad (19)$$

其中,

$$X^{\bar{\square}} = \{m \in M \mid m^{\bar{\square}} \subseteq X\}, B^{\bar{\diamond}} = \{x \in X \mid x^{\bar{\square}} \cap B \neq \emptyset\}, \\ m^{\bar{\square}} = \{x \in G \mid xI^c m\}, x^{\bar{\square}} = \{m \in M \mid xI^c m\}, I^c = G \times M - I.$$

根据定义 24, 类似于面向对象概念格, 易证下面命题 4 中的所有性质成立.

命题 4. 对于 $X, X_1, X_2 \subseteq G$ 和 $A, A_1, A_2, B,$

$B_1, B_2 \subseteq M$, 下列命题成立:

- (1) $X^{pq} \subseteq X, (A, B) \leq (A, B)^{qp}$;
- (2) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1^p \subseteq X_2^p, (A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Rightarrow (A_1, B_1)^q \subseteq (A_2, B_2)^q$;
- (3) $X^p = X^{pqp}, (A, B)^q = (A, B)^{qpq}$;
- (4) $X \subseteq (A, B)^q \Leftrightarrow X^p \leq (A, B)$;
- (5) $(X_1 \cap X_2)^p = X_1^p \cap X_2^p, ((A_1, B_1) \cup (A_2, B_2))^q = (A_1, B_1)^q \cup (A_2, B_2)^q$;
- (6) $(X_1 \cup X_2)^p \geq X_1^p \cup X_2^p, ((A_1, B_1) \cap (A_2, B_2))^q \subseteq (A_1, B_1)^q \cap (A_2, B_2)^q$.

接下来利用算子 p 和 q 定义基于必然属性分析的三支概念.

定义 25. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \subseteq G, A, B \subseteq M$. 若 $X^p = (A, B)$ 且 $(A, B)^q = X$, 则称 $(X, (A, B))$ 为基于必然属性分析的三支概念, 简称 N -三支概念. 此时, 称 X 为 N -三支概念的外延, (A, B) 为 N -三支概念的内涵.

实际上, 对于形式背景 $K = (G, M, I)$ 的一个 N -三支概念 $(X, (A, B))$, A 描述了 X 肯定拥有的必然属性, B 描述了 X 肯定不拥有的必然属性. 在此基础上, $M - A - B$ 则描述了 X 的其他情况. 换言之, 对象集 X 将全体属性 M 划分为三部分: A, B 和 $M - A - B$. 因此, 它符合三支决策理论中的三分论思想^[61]. 更多关于三支决策理论的介绍参见文献 [62-65], 在此不再赘述.

此外, 定义 N -三支概念之间的偏序关系:

$$(X_1, (A_1, B_1)) \leq (X_2, (A_2, B_2)) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \quad (20)$$

则形式背景的所有 N -三支概念配备偏序关系 \leq 构成一个完备格, 称为基于必然属性分析的三支概念格, 简称 N -三支概念格, 并记作 $L_m(K)$.

在 N -三支概念格中, 两个 N -三支概念 $(X_1, (A_1, B_1))$ 和 $(X_2, (A_2, B_2))$ 的上确界与下确界定义如下:

$$(X_1, (A_1, B_1)) \vee (X_2, (A_2, B_2)) = (X_1 \cup X_2, ((A_1, B_1) \cup (A_2, B_2))^{qp}) \quad (21)$$

$$(X_1, (A_1, B_1)) \wedge (X_2, (A_2, B_2)) = ((X_1 \cap X_2)^{pq}, (A_1, B_1) \cap (A_2, B_2)) \quad (22)$$

实际上, N -三支概念与文献 [66] 中的三支面向对象概念在语义上等价. 本文将重命名是为了把语义统一到必然属性分析框架下. 下面讨论同一形式背景上的 N -三支概念格、面向对象概念格以及补背景的面向对象概念格之间的关系.

定理 6. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景. 若 $(X, (A, B)) \in L_m(K)$, 则 $(A^\diamond, A) \in L(K), (B^\diamond, B) \in L(K^c)$.

定理 7. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $Ext(L(K))$ 是 $L(K)$ 中所有面向对象概念外延的集合, $Ext(L(K^c))$ 是 $L(K^c)$ 中所有面向对象概念外延的集合, $Ext(L_m(K))$ 是 $L_m(K)$ 中所有 N -三支概念外延的集合. 则下列结论成立:

- (1) $Ext(L(K)) \subseteq Ext(L_m(K))$;
- (2) $Ext(L(K^c)) \subseteq Ext(L_m(K^c))$.

命题 5. $Ext(L(K)) \cup Ext(L(K^c)) = Ext(L_m(K))$ 不成立.

显然, 在同一形式背景上, N -三支概念格包含了面向对象概念格以及补背景的面向对象概念格的全部信息.

定义 26. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $(X, (A, B)) \in L_m(K)$. 若存在 $(X, X^\square) \in L(K)$, 但不存在 $(X, X^{\bar{\square}}) \in L(K^c)$, 则称 $(X, (A, B))$ 为一个 I 型 N -三支概念; 若存在 $(X, X^{\bar{\square}}) \in L(K^c)$, 但不存在 $(X, X^\square) \in L(K)$, 则称 $(X, (A, B))$ 为一个 II 型 N -三支概念; 若 $(X, X^\square) \in L(K)$ 且 $(X, X^{\bar{\square}}) \in L(K^c)$, 则称 $(X, (A, B))$ 为一个 III 型 N -三支概念; 若不存在 $(X, X^\square) \in L(K)$, 也不存在 $(X, X^{\bar{\square}}) \in L(K^c)$, 则称 $(X, (A, B))$ 为一个 IV 型 N -三支概念.

令 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别代表所有 I 型、II 型、III 型、IV 型 N -三支概念外延组成的集合. 则 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 = Ext(L_m(K))$, 且 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 两两不相交.

例 6. 对于表 4 中的形式背景, 其对应的 N -三支概念格 $L_m(K)$ 如图 5 所示.

在 $L_m(K)$ 中, 存在四种类型的 N -三支概念, 其中, $(\{1, 3, 4, 5, 6\}, (\{a, d, e\}, \{b, c, f\})) \in L_m(K)$ 是一个 IV 型 N -三支概念, 从而验证了命题 5.

5.2 二元可定义粒的描述

本小节讨论二元可定义粒的描述. 为此, 先给出二元描述子的概念.

定义 27. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \in 2^G$. 若存在 N -三支概念 $(X, (A, B)) \in L_m(K)$, 则称 (A, B) 为二元描述子, X 为二元可定义粒.

类似于第 4.2 小节的讨论, 下面给出 N -三支概念的最小产生子.

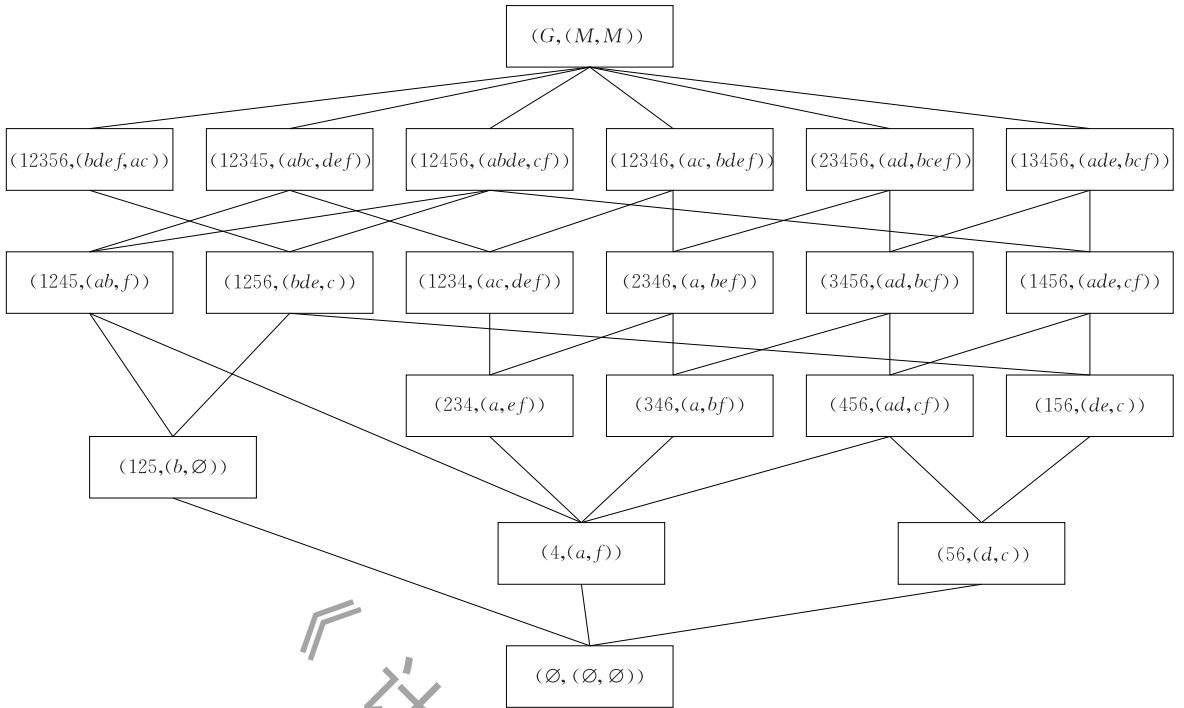


图 5 N -三支概念格 $L_m(K)$

定义 28. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景, $(X, (A, B)) \in L_m(K)$. 如果 $E \subseteq A$ 和 $F \subseteq B$ 满足 $E^\diamond \cup F^\diamond = X$, 且对于任意的 $C \subset E$ 与 $D \subset F$ 有 $C^\diamond \cup D^\diamond \subset X$, 则称 (E, F) 是 $(X, (A, B))$ 的一个最小产生子. 进一步地, 若 $E \subseteq U \subseteq A$ 且 $F \subseteq V \subseteq B$, 则称 (U, V) 是 $(X, (A, B))$ 的一个内涵缩减集.

命题 6. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景, $m, n \in M$. 则 $(m^\diamond, (m^{\diamond\Box}, m^{\diamond\bar{\Box}}))$ 和 $(n^\diamond, (n^{\diamond\Box}, n^{\diamond\bar{\Box}}))$ 是两个 N -三支概念.

不同于面向对象概念格, N -三支概念格中属性诱导的 N -三支概念分为两种类型.

定义 29. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景. 如果一个 N -三支概念具有形式 $(m^\diamond, (m^{\diamond\Box}, m^{\diamond\bar{\Box}}))$ 或 $(n^\diamond, (n^{\diamond\Box}, n^{\diamond\bar{\Box}}))$, 其中 $m, n \in M$, 则称这个 N -三支概念是一个属性诱导的 N -三支概念, 并称 $(m^\diamond, (m^{\diamond\Box}, m^{\diamond\bar{\Box}}))$ 为 I 型属性诱导的 N -三支概念, $(n^\diamond, (n^{\diamond\Box}, n^{\diamond\bar{\Box}}))$ 为 II 型属性诱导的 N -三支概念.

定理 8. 在一个净化的形式背景的 N -三支概念格中, 若一个 N -三支概念只有一个下近邻, 则这个 N -三支概念是一个属性诱导的 N -三支概念.

定理 9. 在一个净化的形式背景的 N -三支概念格中, I 型属性诱导的 N -三支概念 $(m^\diamond, (m^{\diamond\Box}, m^{\diamond\bar{\Box}}))$ 的最小产生子为 $(\{m\}, \emptyset)$, II 型属性诱导的

N -三支概念 $(n^\diamond, (n^{\diamond\Box}, n^{\diamond\bar{\Box}}))$ 的最小产生子为 $(\emptyset, \{n\})$.

换言之, 定理 8 和定理 9 分别给出了属性诱导的 N -三支概念的识别方法以及最小产生子的构成. 接下来, 讨论非属性诱导的 N -三支概念最小产生子的计算问题.

定义 30. 设 (A, B) 是两个属性集组成的序对, 定义其约简如下:

$$simp_c(A, B) = (simp_1(A), simp_2(B)) \quad (23)$$

其中,

$$simp_1(A) = A - \{a \in A \mid \exists b \in B, a^* \subseteq b^*\},$$

$$simp_2(B) = B - \{b \in B \mid \exists a \in A, a^* \supseteq b^*\}.$$

约定, 具体操作时, $simp_1(A)$ 中 b 覆盖 a 的作用可以由 B 中多个属性组合完成; 类似地, $simp_2(B)$ 中 a 覆盖 b 的作用也可以由 A 中多个属性组合完成. 甚至, A 和 B 联合完成属性覆盖亦可.

定义 31. 设 (A, B) 和 (C, D) 是两个属性集序对. 定义它们的约简并如下:

$$(A, B) \tilde{\cup} (C, D) = simp_c(simp(A \cup C), simp(B \cup D)) \quad (24)$$

引理 4. 在 N -三支概念格中, 一个非属性诱导的 N -三支概念至少有两个下近邻.

引理 5. 若 $simp_c(A, B) = (E, F)$, 则 $A^\diamond \cup B^{\bar{\diamond}} = E^\diamond \cup F^{\bar{\diamond}}$.

引理 6. 一个非属性诱导的 N -三支概念的一个内涵缩减集为它的任意两个下近邻的最小产生子的并集。

根据引理 4、引理 5 和引理 6, 可直接得到下面的定理 10。

定理 10. 在一个净化的形式背景的 N -三支概念格中, 若一个 N -三支概念不是属性诱导的 N -三支概念, 则它的任意两个下近邻的一个最小产生子的约简并是它的一个最小产生子。

根据定理 9 和定理 10, 计算 N -三支概念最小产生子的方法如下:

若一个 N -三支概念是一个属性诱导的 N -三支概念, 则它的最小产生子可以根据定理 9 直接得到; 否则, 这个 N -三支概念的最小产生子是它任意两个下近邻的最小产生子的约简并。

若二元可定义粒 X 对应的 N -三支概念有最小产生子 (E, F) , 则 X 的最简描述为

$$d(X) = (\bigvee_{e \in E} e) \vee (\bigvee_{f \in F} \neg f) \quad (25)$$

例 7. 对于表 4 中的形式背景, 其非平凡二元可定义粒、对应的 N -三支概念以及最小产生子如表 8 所示。

表 8 二元可定义粒

二元可定义粒	N -三支概念	最小产生子
12356	(12356, (bdef, ac))	(f, \emptyset), (\emptyset , a)
12345	(12345, (abc, def))	(bc, \emptyset), (b, d)
12456	(12456, (abde, cf))	(abe, \emptyset), (be, f), (b, cf)
12346	(12346, (ac, bdef))	(c, b), (\emptyset , bd)
23456	(23456, (ad, bcef))	(\emptyset , ce), (d, e)
13456	(13456, (ade, bcf))	(e, b)
1245	(1245, (ab, f))	(ab, \emptyset), (b, f)
1256	(1256, (bde, c))	(be, \emptyset), (b, c)
1234	(1234, (ac, def))	(c, \emptyset), (\emptyset , d)
2346	(2346, (a, bcf))	(\emptyset , be)
3456	(3456, (ad, bcf))	(\emptyset , bc), (d, b)
1456	(1456, (ade, cf))	(ae, \emptyset), (e, f)
125	(125, (b, \emptyset))	(b, \emptyset)
234	(234, (a, ef))	(\emptyset , e)
346	(346, (a, bf))	(\emptyset , b)
456	(456, (ad, cf))	(ad, \emptyset), (\emptyset , cf), (a, c), (d, f)
156	(156, (de, c))	(e, \emptyset)
4	(4, (a, f))	(a, \emptyset), (\emptyset , f)
56	(56, (d, c))	(d, \emptyset), (\emptyset , c)

5.3 二元不可定义粒的描述

本小节给出二元不可定义粒的近似描述方法。为此, 先引出二元不可定义粒的概念。

定义 32. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \in 2^G$ 。若不存在 N -三支概念 $(X, (A, B)) \in L_m(K)$, 则称 X 为二元不可定义粒。

定义 33. 令 g_B 代表二元可定义粒的集合。对于一个二元不可定义粒 $X \in 2^G$, 若存在 $X_l, X_u \in g_B$ 使得 $X_l \subset X \subset X_u$, 且不存在 $X_l^*, X_u^* \in g_B$ 使得 $X_l \subset X_l^* \subset X \subset X_u^* \subset X_u$, 则称 X_l 和 X_u 是 X 的 B -下近似和 B -上近似, X 的 B -近似描述为 $d_B(X) = [d(X_l), d(X_u)]$, X 的 B -近似描述精度为

$$\rho_B(X) = \frac{|X_l|}{|X_u|} \quad (26)$$

下列算法 2 给出了基于二元描述子的二元不可定义粒的近似描述方法。

算法 2. 二元不可定义粒的 B -近似描述。

输入: 二元不可定义粒 $X \in 2^G$, 形式背景 $K = (G, M, I)$ 的 N -三支概念格 $L_m(K)$

输出: X 的 B -近似描述。

1. 遍历 $L_m(K)$, 查找满足 $X_l \subset X \subset X_u$ 的最大 N -三支概念 $(X_l, (A_l, B_l))$ 和最小 N -三支概念 $(X_u, (A_u, B_u))$;
2. 计算 $d(X_l), d(X_u)$;
3. 输出 X 的 B -近似描述 $[d(X_l), d(X_u)]$, 算法结束。

假设 $L_m(K)$ 有 n 个概念, 算法 2 遍历形式背景的 N -三支概念格以找到上近似和下近似。由于算法 2 可以利用概念之间的偏序关系缩小遍历范围, 因此访问概念的次数小于 n 。

例 8. 对于表 4 中的形式背景, 可以验证 $X = \{3, 4\}$ 是一个二元不可定义粒。

下面通过算法 2 计算 X 的描述精度最大的一个 B -近似描述: 首先得到 $X_l = \{4\}, X_u = \{3, 4, 6\}$; 然后根据表 8 中的计算结果, 得到 X 的 B -近似描述如下: $[d(\{4\}), d(\{3, 4, 6\})] = [a, \neg b]$ 或 $[\neg f, \neg b]$, 并且 B -近似描述精度均为 $\rho_B(X) = 0.33$ 。

6 三种近似描述的对比研究

文献[46]结合形式概念分析与粗糙集, 提出了粗糙可定义粒的概念, 并给出了基于粗糙可定义粒的近似描述方法。在本文中, 定义了正文字可定义粒, 与文献[46]中的粗糙可定义粒在语义上完全等价。此外, 本文还提出了一元可定义粒、二元可定义粒, 并分别基于一元可定义粒和二元可定义粒讨论了粒的近似描述问题。下面从描述精度的角度对这三种近似描述方法进行比较研究。

为了叙述方便, 把全体粗糙可定义粒组成的集合记作 g_R 。对于一个粒 X , 基于粗糙可定义粒的上近似和下近似分别称为 R -上近似和 R -下近似, 并将基于粗糙可定义粒的近似描述称为 R -近似描述,

记作 $d_R(X)$, 且描述精度记作 $\rho_R(X)$.

引理 7. 在一个形式背景中, 粗糙可定义粒的全体 g_R 、一元可定义粒的全体 g_U 以及二元可定义粒的全体 g_B 满足 $g_R \subset g_U \subseteq g_B$.

根据 g_R 、 g_U 、 g_B 三者之间的包含关系直接得到下面的定理 11.

定理 11. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \in 2^G$. 则 X 的 R -描述精度 $\rho_R(X)$ 、 X 的 U -描述精度 $\rho_U(X)$ 以及 X 的 B -描述精度 $\rho_B(X)$ 满足 $\rho_R(X) \leq \rho_U(X) \leq \rho_B(X)$.

需要指出的是, 如果某一近似描述存在多种情况, 则取其最佳近似描述以保证描述精度的唯一性.

最后, 通过一个例子说明上述结论的直观性.

例 9. 对于表 4 中的形式背景, 取 $X = \{3, 4\}$. 那么 X 的 R -上近似和 R -下近似分别为 $\{1, 2, 3, 4\}$ 与 $\{4\}$, R -描述精度 $\rho_R(X) = 0.25$; X 的 U -上近似和 U -下近似分别为 $\{3, 4, 6\}$ 与 $\{4\}$ (或 $\{2, 3, 4\}$ 与 $\{4\}$), U -描述精度 $\rho_U(X) = 0.33$, 满足 $\rho_R(X) \leq \rho_U(X)$. 此外, X 的 B -上近似和 B -下近似分别为 $\{3, 4, 6\}$ 与 $\{4\}$, B -描述精度 $\rho_B(X) = 0.33$, 满足 $\rho_U(X) \leq \rho_B(X)$. 因此, $\rho_R(X) \leq \rho_U(X) \leq \rho_B(X)$ 成立. 实际上, 任取 $X \in 2^G$, 均可以验证 $\rho_R(X) \leq \rho_U(X) \leq \rho_B(X)$ 成立.

7 结 论

由于粒计算是大数据挖掘和从人工智能到机器实现的有效方法^[2-3, 67], 而粒描述又是使用粒计算思想解决复杂问题的前提和基础, 因此本文结合形式概念分析中粒的思想和粗糙集中上下近似的方法研究粒的必然属性描述是有意义的. 有关结论能够促进粒计算在大数据分析与人机智能实现等领域的应用.

实际上, 基于必然属性分析的粒描述方法能够解决实际应用中的一类问题, 它描述了对象群体具有的独有属性. 显然, 这一类问题基于共性属性分析是不能解决的. 具体地, 本文提出了正文字可定义粒、负文字可定义粒, 定义了一元描述子, 并给出基于一元描述子的粒的近似描述. 此外, 借鉴三支决策的三分思想, 提出了 N -三支概念格以及二元描述子, 讨论了基于二元描述子的粒的近似描述. 有关结论表明基于二元描述子的描述精度较高.

需要指出的是, 文献[45]采用概念格模型研究粒的共性属性描述, 根据描述逻辑公式中采用的连

接符的差异提出了 \wedge -可定义粒、 (\wedge, \neg) -可定义粒以及 (\wedge, \vee) -可定义粒. 在研究粒的共性属性描述时, 属性之间是“交”关系, 而在研究粒的必然属性描述时, 属性之间是“并”关系, 必然属性的语义决定了在本文中只能采用“ \vee ”和“ \neg ”两种连接符. 其次, 文献[45]和文献[46]的研究只利用了原形式背景的概念格信息, 而本文中则同时利用了原形式背景及其补背景的面向对象概念格的信息, 不需要推理便可直接得到粒肯定不具有的必然属性.

为了更好地实现基于二元描述子的粒描述, 今后需要进一步开展的研究内容包括:

- (1) N -三支概念格的快速构造与动态更新维护算法;
 - (2) N -三支概念格与现有的三支概念格之间的联系、区别和转换机制;
 - (3) 不完备形式背景的 N -三支概念格以及粒描述问题;
 - (4) 基于 N -三支概念格的迭代深度概念挖掘;
 - (5) 融合共性属性和必然属性两种策略的粒描述方法;
 - (6) N -三支概念格与概念认知学习的结合机制.
- 此外, 针对大数据的大规模、高速增长和多模态等特性^[67], 利用多粒度思想开展粒的描述也是有待深入研究的重要课题.

致 谢 评审专家提供了宝贵意见和建议, 牛娇娇女士绘制了本文的所有图片, 在此表示感谢!

参 考 文 献

- [1] Zadeh L A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 90(2): 111-127
- [2] Miao Duo-Qian, Zhang Qing-Hua, Qian Yu-Hua, et al. From human intelligence to machine implementation model: Theories and applications based on granular computing. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2016, 11(6): 743-757 (in Chinese)
(苗夺谦, 张清华, 钱宇华等. 从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法. *智能系统学报*, 2016, 11(6): 743-757)
- [3] Xu Ji, Wang Guo-Yin, Yu Hong. Review of big data processing based on granular computing. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1497-1517 (in Chinese)
(徐计, 王国胤, 于洪. 基于粒计算的大数据处理. *计算机学报*, 2015, 38(8): 1497-1517)

- [4] Wang Guo-Yin, Zhang Qing-Hua, Ma Xi-Ao, et al. Granular computing models for knowledge uncertainty. *Journal of Software*, 2011, 24(4): 676-694(in Chinese)
(王国胤, 张清华, 马希骛等. 知识不确定性问题的粒计算模型. *软件学报*, 2011, 24(4): 676-694)
- [5] Lu W, Pedrycz W, Liu X D, et al. The modeling of time series based on information granules. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41(8): 3799-3808
- [6] Pedrycz W. From numeric to granular description and interpretation of information granules. *Fundamenta Informaticae*, 2013, 127(1-4): 399-412
- [7] Hu H, Pang L, Tian D P, et al. Perception granular computing in visual haze-free task. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41(6): 2729-2741
- [8] Salehi S, Selamata A, Fujita H. Systematic mapping study on granular computing. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 80: 78-97
- [9] Zhang Yan-Ping, Zhang Ling, Wu Tao. The representation of different granular worlds: A quotient space. *Chinese Journal of Computers*, 2004, 27(3): 238-333(in Chinese)
(张燕平, 张铃, 吴涛. 不同粒度世界的描述法——商空间法. *计算机学报*, 2004, 27(3): 238-333)
- [10] Bourne L E. Knowing and using concepts. *Psychological Review*, 1970, 77(6): 546-556
- [11] Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 1982, 11(5): 341-356
- [12] Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts//Rival I ed. *Ordered Sets*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1982: 445-470
- [13] Kent R E. Rough concept analysis: A synthesis of rough sets and formal concept analysis. *Fundamenta Informaticae*, 1996, 27(2-3): 169-181
- [14] Ma J M, Zhang W X, Leung Y, et al. Granular computing and dual Galois connection. *Information Sciences*, 2007, 177(23): 5365-5377
- [15] Wolff K E. A conceptual view of knowledge bases in rough set theory. *Lecture Notes in Computer Science*, 2005, 2001: 220-228
- [16] Lai H L, Zhang D X. Concept lattices of fuzzy contexts: Formal concept analysis vs. rough set theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2009, 50(5): 69-707
- [17] Wang Guo-Yin, Yao Yi-Yu, Yu Hong. A survey on rough set theory and applications. *Chinese Journal of Computers*, 2009, 32(7): 1229-1246(in Chinese)
(王国胤, 姚一豫, 于洪. 粗糙集理论与应用研究综述. *计算机学报*, 2009, 32(7): 1229-1246)
- [18] Miao Duo-Qian, Xu Fei-Fei, Yao Yi-Yu, Wei Lai. Set-theoretic formulation of granular computing. *Chinese Journal of Computers*, 2012, 35(2): 351-363(in Chinese)
(苗夺谦, 徐菲菲, 姚一豫, 魏莱. 粒计算的集合论描述. *计算机学报*, 2012, 35(2): 351-363)
- [19] Wei L, Wan Q. Granular transformation and irreducible elements judgment based on pictorial diagrams. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(2): 380-387
- [20] Ganter B, Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Berlin, Germany: Springer, 1999
- [21] Poelmans J, Ignatov D I, Kuznetsov S O, et al. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on applications. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(16): 6538-6560
- [22] Xu Wei-Hua, Li Jin-Hai, Wei Ling, et al. *Formal Concept Analysis: Theory and Application*. Beijing: Science Press, 2016(in Chinese)
(徐伟华, 李金海, 魏玲等. *形式概念分析理论与应用*. 北京: 科学出版社, 2016)
- [23] Li J H, Mei C L, Lv Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts. *Information Sciences*, 2012, 189: 191-207
- [24] Li J H, Mei C L, Cherukuri A K, et al. On rule acquisition in decision formal contexts. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2013, 4(6): 721-731
- [25] Li Jin-Hai, Wu Wei-Zhi. Granular computing approach for formal concept analysis and its research outlooks. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2017, 52(7): 1-12 (in Chinese)
(李金海, 吴伟志. 形式概念分析的粒计算方法及其研究展望. *山东大学学报(理学版)*, 2017, 52(7): 1-12)
- [26] Li J H, Mei C L, Xu W H, et al. Concept learning via granular computing: A cognitive viewpoint. *Information Sciences*, 2015, 298: 447-467
- [27] Xu W H, Pang J Z, Luo S Q. A novel cognitive system model and approach to transformation of information granules. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(3): 853-866
- [28] Xu W H, Li W T. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(2): 366-379
- [29] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2009, 21(10): 1461-1474
- [30] Wei L, Zhang X H, Qi J J. Granular reduction of property-oriented concept lattices. *Lecture Notes in Computer Science*, 2010, 6208: 154-164
- [31] Qiu Guo-Fang, Ma Jian-Min, Yang Hong-Zhi, et al. A mathematical model for concept granular computing systems. *Science China: Information Sciences*, 2009, 39(12): 1239-1247(in Chinese)
(仇国芳, 马建敏, 杨宏志等. 概念粒计算系统的数学模型. *中国科学: 信息科学*, 2009, 39(12): 1239-1247)
- [32] Lang G M, Li Q G, Cai M J, et al. Characteristic matrixes-based knowledge reduction in dynamic covering decision information systems. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 85: 1-26
- [33] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets. *Information Sciences*, 2010, 180(3): 341-353
- [34] Zhang Wen-Xiu, Qiu Guo-Fang. *Uncertain Decision Making Based on Rough Sets*. Beijing: Tsinghua University Press, 2005(in Chinese)

- (张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定性决策. 北京: 清华大学出版社, 2005)
- [35] Zhang X H, Dai J H, Yu Y C. On the union and intersection operations of rough sets based on various approximation spaces. *Information Sciences*, 2015, 292: 214-229
- [36] Min F, Zhu W. Granular association rule mining through parametric rough sets. *Lecture Notes in Computer Science*, 2012, 7670: 320-331
- [37] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: A multigranulation fusion strategy. *Information Sciences*, 2014, 264: 196-210
- [38] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set. *Information Sciences*, 2010, 180(6): 949-970
- [39] Huang B, Guo C X, Zhuang Y L, et al. Intuitionistic fuzzy multigranulation rough sets. *Information Sciences*, 2014, 277: 299-320
- [40] Lin G P, Qian Y H, Li J J. NMGRS: Neighborhood-based multigranulation rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2012, 53(7): 1080-1093
- [41] Liu C H, Miao D Q, Qian J. On multi-granulation covering rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(6): 1404-1418
- [42] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation rough sets based on tolerance relations. *Soft Computing*, 2013, 17(7): 1241-1252
- [43] Qian Y H, Liang X Y, Lin G P, et al. Local multigranulation decision-theoretic rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 82: 119-137
- [44] She Y H, He X L. A multiple-valued logic approach for multigranulation rough set model. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 82: 270-284
- [45] Zhi H L, Li J H. Granule description based on formal concept analysis. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 104: 62-73
- [46] Yao Y Y. Rough-set concept analysis: Interpreting RS-definable concepts based on ideas from formal concept analysis. *Information Sciences*, 2016, 346-347: 442-462
- [47] Yao Y Y. Concept lattices in rough set theory//Proceedings of the 23rd International Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society. Banff Alberta, Canada, 2004: 796-801
- [48] Duntsch I, Gediga G. Modal-style operators in qualitative data analysis//Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. Maebashi, Japan, 2002: 155-162
- [49] Yao Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis//Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Uppsala, Sweden, 2004: 59-68
- [50] Medina J. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattices. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, 64(6): 1992-2002
- [51] Medina J. Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices. *Information Sciences*, 2012, 190: 95-106
- [52] Ma J M, Cai M J, Zou C J. Concept acquisition approach of object-oriented concept lattices. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1): 123-134
- [53] Shao M, Guo L, Li L. A novel attribute reduction approach based on the object oriented concept lattice//Proceedings of the International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Banff Alberta, Canada, 2011: 71-80
- [54] Wang X, Zhang W X. Relations of attribute reduction between object and property oriented concept lattices. *Knowledge-Based Systems*, 2008, 21(5): 398-403
- [55] Pawlak Z. *Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Boston, USA: Kluwer Publishers, 1991
- [56] Yao Y Y, Zhou B. A logic language of granular computing//Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. Lake Tahoe, Canada, 2007: 178-185
- [57] Davey B A, Priestley H A. *Introduction to Lattice and Order*. 2nd Edition. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002
- [58] Ganter B, Kuznetsov S O. Hypotheses and version spaces//Proceedings of the 10th International Conference on Conceptual Structures. Dresden, Germany, 2003: 83-95
- [59] Ma Yuan, Zhang Xue-Dong, Chi Cheng-Ying. Compact dependencies and intent waned values. *Journal of Software*, 2011, 22(5): 962-971(in Chinese)
(马垣, 张学东, 迟呈英. 紧致依赖与内涵亏值. *软件学报*, 2011, 22(5): 962-971)
- [60] Zhi H L. On the computation of formal concept stability. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014: 1-6
- [61] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions//Proceedings of the 8th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Chengdu, China, 2012: 1-17
- [62] Qi J J, Wei L, Yao Y Y. Three-way formal concept analysis. *Lecture Notes in Computer Science*, 2014, 8818: 732-741
- [63] Qi J J, Qian T, Wei L. The connections between three-way and classical concept lattices. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 143-151
- [64] Yao Y Y. Three-way decisions and cognitive computing. *Cognitive Computation*, 2016, 8(4): 543-554
- [65] Chen Y M, Zeng Z Q, Zhu Q X, et al. Three-way decision reduction in neighborhood systems. *Applied Soft Computing*, 2016, 38: 942-954
- [66] Wei L, Qian T. The three-way object oriented concept lattice and the three-way property oriented concept lattice//Proceedings of the 2015 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou, China, 2015: 854-859
- [67] Liang Ji-Ye, Qian Yu-Hua, Li De-Yu, et al. Theory and method of granular computing for big data mining. *Science China: Information Sciences*, 2015, 45(11): 1355-1369(in Chinese)
(梁吉业, 钱宇华, 李德玉等. 大数据挖掘的粒计算理论与方法. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45(11): 1355-1369)

附录.

A. 第 3 节“粒的逻辑描述语言”的相关证明

命题 2. 设 φ 和 ψ 是两个公式, 则下列命题成立:

- (1) $\alpha(\neg\varphi) = 1 - \alpha(\varphi)$;
- (2) $\alpha(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$;
- (3) $\alpha(\varphi \vee \psi) \geq \max(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$;
- (4) $\alpha(\varphi \vee \psi) = \alpha(\varphi) + \alpha(\psi) - \alpha(\varphi \wedge \psi)$.

证明.

$$\begin{aligned} (1) \alpha(\neg\varphi) &= \frac{|m(\neg\varphi) \cap X|}{|X|} = \frac{|(G - m(\varphi)) \cap X|}{|X|} \\ &= \frac{|G \cap X|}{|X|} - \frac{|m(\varphi) \cap X|}{|X|} = 1 - \alpha(\varphi). \end{aligned}$$

(2) 因为 $m(\varphi \wedge \psi) = m(\varphi) \cap m(\psi)$, 所以 $m(\varphi \wedge \psi) \subseteq m(\varphi)$ 且 $m(\varphi \wedge \psi) \subseteq m(\psi)$. 根据查全率的定义, 可知 $\alpha(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$ 成立.

(3) 因为 $m(\varphi \vee \psi) = m(\varphi) \cup m(\psi)$, 所以 $m(\varphi \vee \psi) \supseteq m(\varphi)$ 且 $m(\varphi \vee \psi) \supseteq m(\psi)$. 根据查全率的定义, 可知 $\alpha(\varphi \vee \psi) \geq \max(\alpha(\varphi), \alpha(\psi))$ 成立.

$$\begin{aligned} (4) \alpha(\varphi \vee \psi) &= \frac{|m(\varphi \vee \psi) \cap X|}{|X|} \\ &= \frac{|(m(\varphi) + m(\psi) - m(\varphi) \cap m(\psi)) \cap X|}{|X|} \\ &= \alpha(\varphi) + \alpha(\psi) - \alpha(\varphi \wedge \psi). \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

命题 3. 设 φ 和 ψ 是两个公式, 则下列命题不成立:

- (1) $\beta(\neg\varphi) = 1 - \beta(\varphi)$;
- (2) $\beta(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\beta(\varphi), \beta(\psi))$;
- (3) $\beta(\varphi \vee \psi) \geq \max(\beta(\varphi), \beta(\psi))$;
- (4) $\beta(\varphi \vee \psi) = \beta(\varphi) + \beta(\psi) - \beta(\varphi \wedge \psi)$.

证明. 下面通过举反例来证明这些命题.

(1) 如果 $m(\varphi) \cap X = \emptyset$, 那么 $m(\neg\varphi) \cap X = X$. 因此有 $\beta(\varphi) = 0$ 且 $\beta(\neg\varphi) = \frac{|X|}{|\beta(\neg\varphi)|} \neq 1 - \beta(\varphi)$.

(2) 如果 $m(\varphi) \cap m(\psi) \cap X = m(\varphi) \cap m(\psi)$, 那么 $\beta(\varphi \wedge \psi) = 1$. 这意味着 $\beta(\varphi \wedge \psi) \leq \min(\beta(\varphi), \beta(\psi))$ 不成立.

(3) 如果 $m(\varphi) \cap X = m(\psi) \cap X = (m(\varphi) \cup m(\psi)) \cap X = X$, 那么 $\beta(\varphi \vee \psi) = \frac{|X|}{|m(\varphi) \cup m(\psi)|} < \frac{|X|}{|m(\varphi)|} = \beta(\varphi)$ 并且

$\beta(\varphi \vee \psi) = \frac{|X|}{|m(\varphi) \cup m(\psi)|} < \frac{|X|}{|m(\psi)|} = \beta(\psi)$. 这意味着 $\beta(\varphi \vee \psi) \leq \max(\beta(\varphi), \beta(\psi))$.

(4) 如果 $m(\varphi) \cap X = (m(\varphi) \cup m(\psi)) \cap X = X$ 且 $m(\psi) \cap X = \emptyset$, 那么有

$$\begin{aligned} \beta(\varphi \vee \psi) &= \frac{|X|}{|m(\varphi) \cup m(\psi)|} \\ &\neq \frac{|X|}{|m(\varphi)|} \\ &= \beta(\varphi) + \beta(\psi) - \beta(\varphi \wedge \psi). \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

B. 第 4 节“基于一元描述子的粒描述”的相关证明

定理 2. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景, $b \in M$. 如果

存在若干属性 $b_t \in M - \{b\} (t = 1, 2, \dots, t)$ 使得 $\bigcup_{i=1}^t b_i^* = b^*$, 那么 b 是一个冗余属性.

证明. 令 $N = M - \{b\}$, $K_N = (G, N, I_N)$. 对于任意一个面向对象概念 $(A, B) \in L(K)$, 若 $b \notin B$, 则一定存在一个面向对象概念 $(A, B) \in L(K_N)$. 若 $b \in B$, 则一定存在一个面向对象概念 $(A, C) \in L(K_N)$, 其中 $C = (B - \{b\}) \cup (\bigcup_{i=1}^t b_i)$. 因此, b 是一个冗余属性. 证毕.

定理 3. 在一个净化的面向对象概念格中, 若一个概念只有一个下近邻, 则这个概念是一个属性诱导的面向对象概念.

证明. 假设面向对象概念 (A, B) 是一个属性诱导的面向对象概念, 但不是上确界不可约元, 即 (A, B) 有两个或两个以上的下近邻, 并记作 $(A_t, B_t) (t \in T)$, T 为指标集. 由于 (A, B) 是一个属性诱导的面向对象概念, 因此存在属性 m 使得 $m^\diamond = A$. 根据面向对象概念格的性质, 有 $A = m^\diamond = \bigcup_{t \in T} B_t^\diamond$, 这意味着属性 m 是可约简的, 这与净化的前提条件相矛盾. 故假设不成立, 原命题成立. 证毕.

定理 4. 在一个净化的面向对象概念格中, 属性诱导的面向对象概念的最小产生子由这个概念的属性标签组成.

证明. 可由定义 5 和定义 18 直接得到. 证毕.

引理 1. 在面向对象概念格中, 一个非属性诱导的面向对象概念至少有两个下近邻.

证明. 由定理 3 可直接得到. 证毕.

引理 2. 若 $B = \{b_t\}_{t \in T}$ (T 为指标集) 是一组属性, 则有 $(\text{simp}(B))^\diamond = B^\diamond$.

证明. 不失一般性, 假设有两个属性 b_i 和 b_j , 且满足 $b_i^* \subseteq b_j^*$. 因而有 $(\text{simp}(B))^\diamond = \bigcup_{b \in B - b_i} b^\diamond = \bigcup_{b \in B} b^\diamond = B^\diamond$.

证毕.

引理 3. 一个非属性诱导的面向对象概念的一个内涵缩减集为它的任意两个下近邻的最小产生子的并集.

证明. 根据引理 1, 一个非属性诱导的面向对象概念 (A, B) 至少存在两个下近邻, 不妨记为 (A_1, B_1) 和 (A_2, B_2) , 且分别具有最小产生子 R_1 和 R_2 . 根据面向对象概念格的基本定理, $A = A_1 \cup A_2 = R_1^\diamond \cup R_2^\diamond$. 又因为 $B^\diamond = A$, 且 $R_1^\diamond \cup R_2^\diamond = (R_1 \cup R_2)^\diamond$, 所以 $A = B^\diamond = (R_1 \cup R_2)^\diamond$ 成立. 故本引理成立. 证毕.

定理 5. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个纯化的形式背景, 若 $(A, B) \in L(K)$ 不是属性诱导的面向对象概念, 则 (A, B) 的最小产生子为它任意两个下近邻的最小产生子的并的约简.

证明. 根据引理 1、引理 2 和引理 3, 结合内涵缩减集的定义, 即可证得本定理. 证毕.

C. 第 5 节“基于二元描述子的粒描述”的相关证明

定理 6. 设 $K = (G, M, I)$ 是一个形式背景. 若 $(X, (A, B)) \in L_m(K)$, 则 $(A^\diamond, A) \in L(K)$, $(B^\diamond, B) \in L(K')$.

证明. 由于 $(X, (A, B)) \in L_m(K)$, 那么有 $X^\square = A$ 且 $X^\diamond = B$ 成立. 因此有 $(A^\diamond, A) = (X^{\square\diamond}, X^\square) \in L(K)$ 且 $(B^\diamond, B) = (X^{\square\diamond}, X^\square) \in L(K^c)$ 成立. 证毕.

定理 7. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景, $Ext(L(K))$ 是 $L(K)$ 中所有面向对象概念外延的集合, $Ext(L(K^c))$ 是 $L(K^c)$ 中所有面向对象概念外延的集合, $Ext(L_m(K))$ 是 $L_m(K)$ 中所有 N -三支概念外延的集合. 则下列结论成立:

- (1) $Ext(L(K)) \subseteq Ext(L_m(K))$;
- (2) $Ext(L(K^c)) \subseteq Ext(L_m(K^c))$.

证明. 下面只证明结论(1)、结论(2)的证明可类似得到.

假设 $X \in Ext(L(K))$, 则有 $(X, X^\square) \in L(K)$. 进一步得到 $(X, (X^\square, X^{\square\diamond})) \in L_m(K)$, 这意味着 $X \in Ext(L_m(K))$. 因此, 结论 $Ext(L(K)) \subseteq Ext(L_m(K))$ 成立. 证毕.

命题 5. $Ext(L(K)) \cup Ext(L(K^c)) = Ext(L_m(K))$ 不成立.

证明. 由定理 7 可得 $Ext(L(K)) \cup Ext(L(K^c)) \subseteq Ext(L_m(K))$, 但在一般情况下 $Ext(L(K)) \cup Ext(L(K^c)) \supseteq Ext(L_m(K))$ 不成立, 反例见例 6. 证毕.

命题 6. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景, $m, n \in M$. 则 $(m^\diamond, (m^{\square\diamond}, m^{\square\diamond}))$ 和 $(n^\diamond, (n^{\square\diamond}, n^{\square\diamond}))$ 是两个 N -三支概念.

证明. 令 $X = m^\diamond, (A, B) = (m^{\square\diamond}, m^{\square\diamond})$. 一方面, $X^p = (m^{\square\diamond}, m^{\square\diamond}) = (A, B)$. 另一方面, $(A, B)^q = m^{\square\diamond\diamond} \cup m^{\square\diamond\diamond}$. 又因为 $m^{\square\diamond\diamond} = m^\diamond, m^{\square\diamond\diamond} \subseteq m^\diamond$, 所以 $(A, B)^q = m^{\square\diamond\diamond} \cup m^{\square\diamond\diamond} = m^\diamond = X$. 根据 N -三支概念的定义可知 $(m^\diamond, (m^{\square\diamond}, m^{\square\diamond}))$ 是一个 N -三支概念. 采用类似的方法, 可证 $(n^\diamond, (n^{\square\diamond}, n^{\square\diamond}))$ 也是一个 N -三支概念. 证毕.

定理 8. 在一个净化的形式背景的 N -三支概念格中, 若一个 N -三支概念只有一个下近邻, 则这个 N -三支概念是

一个属性诱导的 N -三支概念.

证明. 类似于定理 3 可证. 证毕.

定理 9. 在一个净化的形式背景的 N -三支概念格中, I 型属性诱导的 N -三支概念 $(m^\diamond, (m^{\square\diamond}, m^{\square\diamond}))$ 的最小产生子为 $(\{m\}, \emptyset)$, II 型属性诱导的 N -三支概念 $(n^\diamond, (n^{\square\diamond}, n^{\square\diamond}))$ 的最小产生子为 $(\emptyset, \{n\})$.

证明. 可由定义 28 和定义 29 直接得到. 证毕.

引理 4. 在 N -三支概念格中, 一个非属性诱导的 N -三支概念至少有两个下近邻.

证明. 由定理 8 可以直接得到. 证毕.

引理 5. 若 $simp_c(A, B) = (E, F)$, 则 $A^\diamond \cup B^\diamond = E^\diamond \cup F^\diamond$.

证明. 根据定义 30 可直接得到. 证毕.

引理 6. 一个非属性诱导的 N -三支概念的一个内涵缩减集为它的任意两个下近邻的最小产生子的并集.

证明. 类似于引理 3 可证. 证毕.

D. 第 6 节“三种近似描述的对比研究”的相关证明

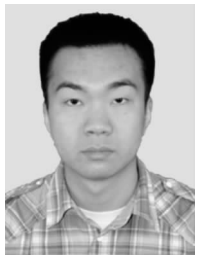
引理 7. 在一个形式背景中, 粗糙可定义粒的全体 g_R 、一元可定义粒的全体 g_U 、二元可定义粒的全体 g_B 满足 $g_R \subset g_U \subseteq g_B$.

证明. 因为包含正文字可定义粒和负文字可定义粒, 正文字可定义粒亦即粗糙可定义粒, 所以 $g_R \subset g_U$ 显然成立. 又根据定理 7 和命题 5 并结合一元可定义粒和二元可定义粒的定义, 可知 $g_U \subseteq g_B$ 成立.

综上所述, 可知本引理成立. 证毕.

定理 11. 设 $K=(G, M, I)$ 是一个形式背景, $X \in 2^G$. 则 X 的 R -描述精度 $\rho_R(X)$ 、 X 的 U -描述精度 $\rho_U(X)$ 、 X 的 B -描述精度 $\rho_B(X)$ 满足 $\rho_R(X) \leq \rho_U(X) \leq \rho_B(X)$.

证明. 根据引理 7 可直接得到. 证毕.



ZHI Hui-Lai, born in 1981, Ph. D., lecturer. His current research interests include granular computing, formal concept analysis, rough set.

LI Jin-Hai, born in 1984, Ph. D., professor, Ph. D. supervisor. His current research interests include concept lattice, rough set, granular computing.

Background

Granular computing is an emerging computing paradigm of information processing which lies in the scope of cognitive science and cognitive informatics. Note that, as one of the most important problems in granular computing, granule

description has attracted much attention in recent years, but relatively little work has been done on it. This problem deserves to be investigated in depth since it not only helps us to have a better understanding and comprehension of granules,

but also sheds some light on the open problem “why some concepts are psychologically simple and easy to be understood, while others seem to be difficult”. Common attribute analysis based granule description has recently been studied. However, different from the existing studies which concern common attributes, necessary attribute analysis based granule description is still an open problem. In 2016, Yao Y Y proposed rough-set definable granules and described rough-set indefinable granules by a pair of rough-set definable granules called as the lower and upper approximate descriptions. But in Yao’s study, the complement context was not taken into consideration which gives us a chance for further improvement.

In this paper, we study granule description from the perspective of necessary attribute analysis and try to use the information from both a formal context and its complement context. More specifically, we propose unary descriptor by which approximate descriptions of unary indefinable granules are also discussed. And then, we present necessary attribute analysis based three-way concept lattice and binary descriptor

by which approximate descriptions of binary indefinable granules are investigated as well. The proposed method, especially the necessary attribute analysis based three-way concept lattice, will be used in future work such as three-way decision making, new types of decision rule mining, heterogeneous system analysis, and so on.

The paper is partial work of the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61502150, 61562050, 61305057 and 61573173. The projects try to propose some new knowledge discovery methods based on rough set, formal concept analysis and granular computing. We have studied granule description from the perspective of common attribute analysis, concept lattice reduction, concept-cognitive learning, three-way concept-cognitive learning, and incremental algorithms for concept lattice construction and rule acquisition in formal contexts. And the results of this paper will be a vital step in understanding the meaning of granules once these granules are obtained from a real-world problem.

《计算机学报》